УДК 517.5
ББК 32.973

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМАХ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

Тухлиев Дилшод Камаридинович *- преподаватель кафедры информатики и вычислительной математики ХГУ имени академика Б.Гафурова (Республика Таджикистан, г. Худжанд), e-mail: dtukhliev@mail.ru*

ДОИМИҲОИ АНИҚ ДАР ТЕОРЕМАҲОИ БАРЪАКС ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН B_2

Тухлиев Дилшод Қамаридинович *- омӯзгори кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарор ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: dtukhliev@mail.ru*

EXACT CONSTANTS IN INVERSE THEOREMS IN THE BERGMAN SPACE B_2

Tukhliev Dilshod Kamaridinovich *- Teacher of the Department of Informatics and Computational Mathematics Science of Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand);*
e-mail: dtukhliev@mail.ru

Ключевые слова: *точные константы, модуль непрерывности, верхние грани, наилучшее приближение, комплексные алгебраические полиномы, обратные теоремы, пространство Бергмана.*

В работе найдены точные константы в обратных теоремах теории приближения аналитических в единичном круге функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Бергмана B_2.

Калимаҳои калидӣ: *доимиҳои аниқ, модули бефосилагӣ, сарҳади болоӣ, наздикшавии беҳтарин, полиномҳои комплексии алгебравӣ, теоремаҳои баръакс, фазои Бергман.*

Дар мақола доимиҳои аниқ дар теоремаҳои баръакси назарияи наздиккунии функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ ба воситаи бисёрузваҳои алгебравии комплексӣ дар фазои Бергман B_2 ёфта шудааст.

Key words*: exact constants, modulus of continuity, upper faces, best approximation, complex algebraic polynomials, cross-sections, inverse theorems, Bergman space.*

In this paper, we find exact constants in the inverse theorems of the approximation theory of analytic functions in the unit circle by complex algebraic polynomials in the Bergman space B2.

Будем рассматривать пространство $\mathrm{B}_2 := \mathrm{B}_2(U)$ функций f аналитических в единичном круге $U := \{z \in C : |z| < 1\}$ таких для которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{\mathrm{B}_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 \, d\sigma \right)^{1/2} < \infty, \tag{1}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ - элемент площади. Очевидно, что норму (1) можно написать также в следующем виде

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \, \rho d\rho dt \right)^{1/2} < \infty, \tag{2}$$

Через P_n обозначим совокупность комплексных алгебраических полиномов степени $\le n$. Хорошо известно [1], что среди всех полиномов $p_{n-1} \in \mathrm{P}_{n-1}$ наилучшее квадратичное приближение функции $f \in \mathrm{B}_2$ в области U доставляет частичная сумма

$(n-1)-$ го порядка

$$T_{n-1}(f,z)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k z^k$$

разложения функции $f(z)$ в степенной ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k.$$

При этом для величины наилучшей полиномиальной аппроксимации произвольной функции $f\in B_2$ имеем

$$E_{n-1}(f)_2:=E_{n-1}(f)_{B_2}=\inf\left\{\|f-p_{n-1}\|_2: p_{n-1}\in P_{n-1}\right\}=$$

$$=\|f-T_{n-1}(f)\|_2=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k|^2}{k+1}\right\}^{1/2}, \qquad (3)$$

где $c_k(f)-$ коэффициенты Тейлора функции f.

Далее введем обозначение

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{\mathcal{B}_2}:=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k f\left(\rho e^{i(t+kh)}\right)\right|^2 d\rho dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (4)$$

и равенством

$$\Omega_m(f;t)_{B_2}:=\sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{2,\mu}:|h|\le t\right\}=$$

$$=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}\cdot c_k^2(f):|h|\le t\right\}, \qquad (5)$$

определим модуль непрерывности $m-$го порядка функции $f\in B_2$. Применяя равенство Парсеваля из равенства (4) легко получить [2,3], что

$$\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{B_2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}c_k^2(f)=$$

$$=4^m\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{kh}{2}\right)\right)^{4m}c_k^2(f)=$$

$$=4^m\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{kh}{2}\right)\right)^{4m}c_k^2(f)+4^m\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{kh}{2}\right)\right)^{4m}c_k^2(f)\le$$

$$\le 4^m\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kh}{2}\right)^{4m}c_k^2(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)\right\}\le$$

$$\le 4^m\left\{\left(\frac{h}{2}\right)^{4m}\sum_{k=1}^{n}k^{4m}c_k^2(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)\right\}, \qquad (6)$$

в силу которого запишем

$$\Omega_m(f;2/n)_{B_2}:=\sup\left\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{2,\mu}^2:0<h\le 2/n\right\}\le$$

$$\le 4^m\left\{\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=1}^{n}k^{4m}c_k^2(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)\right\}. \qquad (7)$$

Нам далее понадобится следующая

Лемма. *Для произвольной функции* $f\in B_2$ *и любых* $m,n\in N$ *имеет место равенство*

$$\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=1}^{n}k^{4m}c_k^2(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)=$$

$$=\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{4m}-k^{4m}\right]E_k^2(f). \qquad (8)$$

Доказательство. Применяя к первой сумме в левой части равенства (8) преобразование Абеля [4], получаем

$$\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=1}^{n}k^{4m}c_k^2(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)=$$

$$=\frac{1}{n^{4m}}\left\{n^{4m}\sum_{k=0}^{n}c_k^2(f)-\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{4m}-k^{4m}\right]\cdot\sum_{l=0}^{k}c_l^2(f)\right\}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2(f)-\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{4m}-k^{4m}\right]\sum_{l=0}^{k}c_l^2(f)=$$

$$=\|f\|_{B_2}^2-\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{4m}-k^{4m}\right]\cdot\left(\|f\|_{2,\mu}^2-\sum_{l=k+1}^{\infty}c_l^2(f)\right)=$$

$$=\|f\|_{B_2}^2\cdot\left(1-\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{4m}-k^{4m}\right]\right)+$$

$$+\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{4m}-k^{4m}\right]\cdot\sum_{l=k+1}^{\infty}c_l^2(f)=$$

$$=\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{4m}-k^{4m}\right]E_k^2(f)_{B_2},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f\in B_2$, *при любых* $m,n\in N$ *справедливо точное неравенство*

$$\Omega_m^2(f;2/n)_{B_2}\le\frac{4^m}{n^{4m}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)^{4m}-k^{4m}\right]E_k^2(f)_{B_2}. \qquad (9)$$

Существует функция $f_0\in B_2$, для которой неравенство (9) обращается в равенство.

Докозательство. Так как в силу равенства (6)

$$\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{B_2}^2=4^m\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{kh}{2}\right)^{4m}c_k^2(f)=$$

$$=4^m\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{kh}{2}\right)^{4m}c_k^2(f)+4^m\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)\le$$

$$\le 4^m\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kh}{2}\right)^{4m}c_k^2(f)+4^m\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)=$$

$$=4^m\left(\frac{h}{2}\right)^{4m}\sum_{k=1}^{n}k^{4m}c_k^2(f)+4^m\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^2(f)=$$

$$= 4^m\left\{(\frac{h}{2})^{4m}\sum_{k=1}^{n} k^{4m}c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)\right\},$$

то отсюда и из равенства (8) получаем

$$\Omega_m^2(f;2/n)_{B_2} = \sup\{\| \Delta_h^m(f;\cdot) \|_{B_2}^2 : 0 < h \le 2/n\} \le$$

$$\le 4^m\left\{\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=1}^{n} k^{4m}c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)\right\} =$$

$$= \frac{4^m}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}]E_k^2(f)_{B_2},$$

и таким образом, неравенство (9) доказано. Для функции $f_0(z) = z^n \in B_2$, неравенство (6) обращается в равенство. В самом деле, для этой функции

$$E_k^2(f_0)_{B_2} = \frac{1}{n+1}, k = \overline{0, n-1}.$$

$$\Omega_m^2(f_0;2/n) = \frac{4^m}{n+1}\sup_{0<h\le 2/n}\left(\sin\frac{kh}{2}\right) = \frac{4^m}{n+1}\cdot \sin\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{2n} = \frac{4^m}{n+1},$$

а потому имеем

$$\frac{4^m}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}]E_k^2(f_0)_{B_2} =$$

$$= \frac{4^m}{n+1}\cdot\frac{1}{n^{4m}}\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] = \frac{4^m}{n+1} = \Omega_m^2(f_0;2/n),$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Для произвольной функции* $f \in B_2$ *и любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *справедливо*

$$\Omega_m^2(f;2/n)_{B_2} \le \frac{4^{m+1}m}{n^{4m}}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k^{4m-1}E_k^2(f) \tag{10}$$

Доказательство. В силу доказанной выше теоремы 1 и вполне очевидного неравенства

$$(k+1)^{4m} - k^{4m} = \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4m} - 1\right] \le$$

$$\le k^{4m}\cdot\frac{4m}{k} = 4m\cdot k^{4m-1} \tag{11}$$

имеем

$$\| \Delta_h^m(f;\cdot) \|_{2,\mu}^2 = 4^m\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{kh}{2}\right)^{4m} c_k^2(f) =$$

$$= 4^m\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{kh}{2}\right)^{4m} c_k^2(f) + 4^m\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) =$$

$$= 4^m\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kh}{2}\right)^{4m} c_k^2(f) + 4^m\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) =$$

$$= 4^m \left(\frac{h}{2}\right)^{4m} \sum_{k=1}^{n} k^{4m} c_k^2(f) + 4^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) =$$

$$= 4^m \left\{ (\frac{h}{2})^{4m} \sum_{k=1}^{n} k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\},$$

$$\Omega_m^2(f; 2/n)_{B_2} = \sup\left\{\| \Delta_h^m(f;\cdot) \|_{B_2}^2 : 0 < h \leq 2/n\right\} \leq$$

$$\leq 4^m \left\{ \frac{1}{n^{4m}} \sum_{k=1}^{n} k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\} =$$

$$= \frac{4^m}{n^{4m}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^{4m} - k^{4m}] E_k^2(f)_{B_2} \leq$$

$$\leq \frac{4^{m+1} m}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^{4m-1} E_k^2(f).$$

То есть

$$\Omega_m^2(f; 2/n)_{B_2} \leq \frac{4^{m+1} m}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^{4m-1} E_k^2(f)$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М. – Л.: Наука, 1964, С. 201-202.
2. Тухлиев Д.К. О точных константах в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана // ДАН РТ. 2018. Т.61. №6. С.517-523.
3. Тухлиев Д.К. О точных константах в теоремах о приближений функций в пространстве Бергмана // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки, 2018, №3 (46). С.12-22.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II. – М.: Наука, 1970, С.305-306.

.

REFERENCES

1. Smirnov V. I., Lebedev N. A. Constructive theory of functions of a complex variable. - M.-L.: Nauka, 1964, pp. 201-202.
2. Tukhliev D.K. On exact constants in direct and converse theorems in Bergman space // DAN RT. 2018.T.61. №6. pp.517-523.
3. Tukhliev D. K. On exact constants in theorems on approximations of functions in the Bergman space / / Scientific Notes of the B. Gafurov KhSU, Natural and Economic Sciences Series, 2018, No. 3 (46). pp. 12-22.
4. Fichtenholz G. M. Course of differential and integral calculus. Vol. II. - Moscow: Nauka, 1970, pp. 305-306.