УДК –517
ББК –22.161
Н-13

ИНВАРИАНТЫ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

Набиева Манзура – *преподаватель кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд)*

ИНВАРИАНТҲОИ ГУРУҲИ ТАБДИЛДИҲИҲОИ ҲАМВОРӢ ВА ИСТИФОДАИ ОНҲО.

Набиева Манзура – *омӯзгори кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинов МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд)*

INVARIANTS OF THE GROUP OF TRANSFORMATIONS OF THE PLANE AND THEIR USE

Nabieva Manzura – *Teacher of the Department of Mathematical Analysis named after professor A.Mukhsinov State Educational Instituon “KhSU named after academician B. Gafurov” (Tajikistan Republic, Khujand)*

Ключевые слова: *плоскость, однопараметрическая группа, инфинитезимальный оператор, оператор группы, дифференциальное уравнение, замена переменных, инвариант.*

Статья посвящена основным понятиям и свойствам однопараметрических групп и их инвариантам. Так как необходимым и достаточным условием инвариантности является решение линейного уравнения в частных производных первого порядка, то с помощью характеристического уравнения определены инварианты нескольких часто встречающихся групп. Инварианты однопараметрических групп применены к интегрированию нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Отметим, что результаты полученных методами группового анализа в разобранных примерах, нельзя получить обычными методами.

Вожаҳои калидӣ: *ҳамворӣ, гуруҳи якпараметрӣ, оператори инфитинитезимали, оператори гуруҳ, муодилаи дифференсиалӣ, ивазкунии тағйирёбандаҳо, инвариант.*

Мақолаи мазкур мафҳумҳои асосии гуруҳҳи якпараметри ва инвариантҳои он бахшида шудааст. Азбаски шартҳои зарури ва кифоягии инвариантнокӣ аз муодилаҳои хаттии дар ҳосилаҳои хусусии тартиби якум иборат аст, инвариантҳои гуруҳ бо ёрии муодилаи характеристикии якчанд гуруҳҳои бисёртар вомехӯранд, ёфта шудааст. Инвариантҳои гуруҳҳи якпараметри барои интегронидани баъзе муодилаҳои дифференсиалии ғайрихатти тартиби якум татбиқ карда шудааст. Қайд менамоем, ки натиҷаҳои бо усули таҳлили гуруҳ, мисолҳои дар боло таҳлил карда шуда, усулҳои одии муодилаҳои дифференсиалиро татбиқ карда ҳал намудан мумкин нест.

Key words: *plane, one – parameter group, infinitesimal operator, group operator differential equation, change of variables, invariant.*

This article is devoted to the basic concept and properties of one – parameter groups and their invariants. Since a necessary and sufficient condition for invariance is the solution of a linear partial differential equation of the first order, the invariants of several frequently occurring groups are determined using the characteristic equation. Invariants of one – parameter groups are applied to the integration of nonlinear ordinary differential equations of the first order. Note that the results obtained by the methods of group analysis in the above discussed examples cannot be obtained by conventional methods.

I. Однопараметрическая группа преобразований плоскости.

Пусть

$$(\bar{x},\bar{y}) = T_a(x,y) = \big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a)\big), \qquad (1)$$

где

$$\varphi|_{a=0} = x, \quad \psi|_{a=0} = y \qquad (2)$$

множество преобразований плоскости $R^2(a \in \Delta \subset R)$. Это множество называется однопараметрической группой G, если выполнены следующие условия:

1) последовательные выполнения преобразований T_a и T_b равносильно применению третьего преобразования того же вида (1), т.е. $(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) = T_a\big(T_b(x,y)\big) = T_{\gamma(a,b)}(x,y)$, где $\gamma\,(a,b) = c \in \Delta$.

2) выполняется закон ассоциативности, т.е.

$$T_aT_bT_c = (T_aT_b)T_c = T_a(T_bT_c)$$

3) $T_0 = J$- тождественное преобразование,

(если $T_{a_0} = J(a_0 \neq 0)$, то сделав замену $a = \bar{a} + a_0$, мы получим множество преобразований $\{T_{\bar{a}}\}$, для которого $T_0 = J$),

4) для каждого T_a существует обратное преобразование $T_a^{-1} = T_{a-1}$ такое, что $T_aT_{a-1} = T_aT_{a-1} = J$

Можно доказать, что с помощью подходящего выбора параметра групповое свойство $T_aT_b = T_{\gamma(a,b)}$ может быть записано в виде $T_aT_b =$

$= T_{a+b}$, т.е.

$$\bar{\bar{x}} = \varphi(\bar{x},\bar{y},b) = \varphi(x,y,a+b)$$
$$\bar{\bar{y}} = \psi(\bar{x},\bar{y},b) = \psi(x,y,a+b)$$

Пример 1. Преобразования,

$$\bar{x} = \frac{x}{1-ax}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{1-ax}$$

называется однопараметрической группой проективных преобразований. Все условия группы выполняются, действительно, если

1) $(\bar{x},\bar{y}) = T_a(x,y) = \left(\frac{x}{1-ax}, \frac{y}{1-ax}\right)$, тогда

$$T_b\big(T_a(x,y)\big) = (\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) = \left(\frac{\bar{x}}{1-ax},\frac{\bar{y}}{1-ax}\right) = \left(\frac{\frac{x}{1-bx}}{1-a-\frac{x}{1-bx}},\frac{\frac{Y}{1-bx}}{1-a\frac{x}{1-bx}}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{1-bx-ax},\frac{y}{1-bx-ax}\right) = \left(\frac{x}{1-(a+b)x}, \qquad \frac{Y}{1-(a+b)x}\right)$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{x}{1-(a+b)x}, \quad \bar{\bar{y}} = \frac{y}{1-(a+b)x}$$

2) Выполнения свойства ассоциативности проверяется непосредственно.

3) $T_0(x,y) = (x,y)$

4) так как $T_{-a}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) = \left(\frac{\bar{x}}{1+a\bar{x}},\frac{\bar{y}}{1-a\bar{x}}\right) = \left(\frac{\frac{x}{1-ax}}{1+a\cdot\frac{x}{1-ax}}, \frac{\frac{y}{1-ax}}{1+a\frac{x}{1-ax}}\right) = (x,y)$, то для преобразование T_a обратным является $T_{a^{-1}} = T_{-a}$.

Заметим, что условие $T_aT_b = T_{a+b}$ выполняется не для всех x, y a и b, например, если $x = y = 1$, и $a + b = 1$, то для $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ отображение T_aT_b не имеет смысла, так как в этом случае

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{1-(a+b)}, \quad \bar{\bar{y}} = \frac{1}{1-(a+b)}$$

Если значения параметра принадлежат некоторому под интервалу, то T_aT_b имеет смысл. В нашем случае таким под интервалом является $\Delta=$

$= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Когда нужно перемножить три преобразования, то параметр нужно выбирать из ещё меньшего промежутка. Таким образом, для семейства преобразований $\{T_a\}$, умножение элементов T_a и T_b возможно не при всех значениях $a, b \subset \Delta$, a только для a и b из некоторого под интервала $\Delta_1 \subset \Delta$ содержавшего $a = 0$, этот под интервал выбирается так, чтобы каждое преобразования T_a при $a \in \Delta_1$ обладает обратным преобразованием $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$ с $a^{-1} \in \Delta_1$. Пример 1 показывает, что основной интервал Δ может зависеть от преобразуемой точки плоскости. Таким образом, мы имеем дело с локальной однопараметрической группой преобразований.

II. Инфинитезимальные преобразования и операторы.

Разложим функции φ и ψ из (1) в ряд Тейлора по степеням, а тогда с учётом (2) имеем

$$(1') \qquad \bar{x} \approx x + \xi(x,y)a, \quad \bar{y} \approx y + \eta(x,y)a,$$

где

$$\xi(x,y) = \left.\frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a}\right|_a = 0$$

$$\eta(x,y) = \left.\frac{\partial\psi(x,y,a)}{\partial a}\right|_a = 0$$

(1') называется инфинитезимальным (бесконечно малым) преобразованием (1). Например, для примера 1

$$\xi = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x}{1-ax}\right)\right|_{a=0} = \left.\frac{x^2}{(1-ax)^2}\right|_{a=0} = x^2$$

$$\eta = \left.\frac{\partial\psi}{\partial a}\right|_{a=0} = \eta(x,y) = \left.\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{y}{1-ax}\right)\right|_{a=0} = \left.\frac{xy}{(1-ax)^2}\right|_{a=0} = xy$$

и инфинитезимальное преобразование имеет вид

$$\bar{x} \approx x + x^2a, \qquad \bar{y} \approx y + xya$$

Если фиксировать точку (x,y), то отображение $\ell{:}\,\Delta\to R^2$ является кривой проходящей через точку (x,y), описываемую пробрасываемой преобразованными точками $(\bar{x},\bar{y})$ а вектор с компонентами (ξ,η) является касательным вектором к точке (x,y), и поэтому называется касательным векторным полем группы.

Теорема 1. (С. Ли) Любая однопараметрическая группа (1) является решением уравнение Ли

$$\left.\frac{d\varphi}{da}\xi(\varphi,\psi),\varphi\right|_{a=0} = x$$

$$\left.\frac{d\psi}{da}\eta(\varphi,\psi),\psi\right|_{a=0} = y$$

Обратно, если задано касательное в векторное поле (ξ,η), то с помощи уравнения Ли восстанавливается однопараметрическая группа преобразований (1).

Пример 2. Найдём однопараметрическую группу касательного векторного поля $(\xi,\eta) = (x^2,xy)$ в этом случая уравнение Ли имеет вид

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d\bar{x}}{da} = \bar{x}^2, \bar{x}\right|_{a=0} = x \\ \left.\dfrac{d\bar{y}}{da} = \bar{x}\bar{y}, \bar{y}\right|_{a=0} = y \end{cases}$$

решая первое уравнение системы, находим

$$-\frac{1}{x} = a + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{a-\frac{1}{x}} = \frac{x}{1-ax}$$

Подставив во второе уравнение системы имеем

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = \frac{x}{1-ax}\cdot da \Rightarrow \ln\bar{y} = \int\frac{x}{1-ax}da = -\int\frac{d(1-ax)}{1-ax} \Rightarrow \ln\bar{y} = -\ln(1-ax) \Rightarrow \ln C_2$$

отсюда получим

$$\bar{y} = \frac{C_2}{1-ax},$$

с учётом начального условия имеем $y = C_2$, значит $\bar{y} = \frac{y}{1-ax}$.

В результате мы получим однопараметрическую группу проективных преобразований примера 1.

Отметим, что касательное векторное поле записывается в виде следующего дифференциального оператора первого порядка, который называется инфинитезимальным оператором группы (или просто оператором группы)

$$x = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$$

III. Инварианты групп.

Определение 1. Функции $F(x, \bar{y})$ называется инвариантом группы (1), если выполнено условие

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y)$$

т.е. функции $F(x, y)$ инвариант группы, если функция F постоянна вдоль траектории, описываемой преобразованными точками $(\bar{x}, \bar{y})$.

Теорема 2. Для того чтобы функция $F(x, y)$ являлась инвариантом группы (1), необходимо и достаточно выполнения условия

$$XF = \xi(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

Первым интегралом уравнения (3) является $J(x, y) = C$. Таким образом, всякая однопараметрическая группа на плоскости имеет один независимый инвариант $J = J(x, y)$ и он находится из уравнения характеристики

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)}$$

Любой другой инвариант группы (1) является функцией от $J(x, y)$.

Найдём инварианты некоторых груп преобразований.

Пример 3. Переносы $\bar{x} = x + \ell a,\ \bar{y} = y - ka$ параллельно прямой $kx + \ell y = 0$, здесь $\xi(x, y) = \ell,\ \eta(x, y) = -k,\ x = \ell\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{\ell} = \frac{dy}{-k} \Rightarrow J = kx + \ell y$$

Пример 4. Группа вращения вокруг нуля:

$$\bar{x} = xcosa + y\sin a$$
$$\bar{y} = y\cos a - x\sin a$$

Разложим в ряд Тейлора по степеням a, тогда

$$\bar{x} = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) + y\left(a - \frac{a^3}{3!} + \cdots\right)$$
$$\bar{y} = y\left(1 - \frac{a^2}{2!} + \cdots\right) - x\left(a - \frac{a^3}{3!} + \cdots\right),$$

отсюда $\xi = y, \eta = -x$, и оператором группы является $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{y}$, а характеристическое уравнение имеет вид $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$, отсюда $J = x^2 + y^2$ инвариант группы. Непосредственно можно убедиться, что $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = x^2 + y^2 = J$.

Пример 5. Группа Лоренца:

$$\bar{x} = x\,cha + y\,sha,\ \ \bar{y} = y\,cha + xsha$$

здесь

$$\bar{x} = x\frac{e^a + e^{-a}}{2} + y\frac{e^a - e^{-a}}{2} == \frac{x}{2}\left(2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{a^4}{4!} + \cdots\right) + \frac{y}{2}\left(2a + 2\frac{a^3}{3!} + 2\frac{a^5}{5!} + \cdots\right) \Rightarrow \xi = y$$

Аналогично получаем $\eta = x$. Значит, оператор группы $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

и характеристическое уравнение $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$. Отсюда инвариант $J = x^2 - y^2$

Пример 6. Преобразование Галилея: $\bar{x} = x + ay,\ \bar{y} = y$. Тогда $\xi = y,\ \eta = 0$ и $J = y$

Пример 7. Неоднородное растяжение: $\bar{x} = xe^a,\ \bar{y} = ye^{ka}$.

Так как $\bar{x} = xe^a = x + xa + o(a)$ и $\bar{y} = ye^{ka} = y + (ky)a + o(a)$, то $\xi = x,\ \eta = = ky$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{ky} \Rightarrow k\ln x - \ln y = \ln c$, т.е. $J = \frac{x^k}{y}$ является инвариантом группы.

Пример 8. Группа проективных преобразований

$$\bar{x} = \frac{x}{1 - ax},\quad \bar{y} = \frac{y}{1 - ax},$$

так как

$$\bar{x} = x\frac{1}{1-ax} = x(1+ax+\cdots) = x + x^2a + \mathrm{o}(a)$$

и

$$\bar{y} = y\frac{1}{1-ax} = y(1+ax+\cdots) = y + (xy)a + \mathrm{o}(a), \text{то } \xi(x,y) = x^2,$$

$\eta(x,y) = xy$ *и* инфинитезимальный оператор имеет вид $X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$,

Из характеристического уравнения $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} \Rightarrow \ln x - \ln y = \ln c \Rightarrow J(x,y) = \frac{x}{y}$ есть инвариант группы.

IV. Некоторые применения однопараметрических групп преобразований плоскости и их инвариантов

Пример 8. Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$x^4\dot{y}^2 - x\dot{y} - y = 0, \quad \text{где } \dot{y} = \frac{dy}{dx}.$$

Так как уравнение степенного вида, то естественно ожидать, что оно будет допускать группу растяжений. Пусть $\bar{x} = xe^a$, $\bar{y} = ye^b$. Тогда $\dot{\bar{y}}^2 = \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 e^{2(b-a)}$ и для заданного дифференциального уравнения имеем

$$\bar{x}^4\dot{\bar{y}}^2 - \bar{x}\,\dot{\bar{y}} - \bar{y} = x^4e^{4a}\cdot\dot{y}^2\cdot e^{2(b-a)} - xe^a\cdot ye^{b-a} - ye^b = 0$$

Значит, если $2b + 2a = b$, то заданное уравнение инвариантно относительно группы неоднородного растяжений $\bar{x} = xe^a$,$\bar{y} = ye^b$, то есть когда $b = -2a$. В этом случае $\bar{x} = xe^a$, $\bar{y} = ye^{-2a}$ и отсюда имеем $\xi = x$, $\eta = -2y$. Тогда оператором группы является оператор $X = x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}$. Из характеристического уравнения $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y}$ находим $J = \frac{x^{-2}}{y}$ есть инвариант группы.

Сделаем замену $z = \frac{1}{x^2y} \Rightarrow y = \frac{1}{zx^2}$, $\dot{y} = -\frac{\dot{z}x^2+2xz}{z^2x^4} = -\frac{\dot{z}x+2z}{z^2x^3}$,

тогда заданное дифференциальное уравнение имеет вид

$$x^4\left(-\frac{\dot{z}x+2z}{z^2x^3}\right)^2 + x\frac{\dot{z}x+2z}{z^2x^3} - \frac{1}{zx^2} = 0$$

или

$$\frac{(\dot{z}x+2z)}{z^{\varphi}} + \frac{\dot{z}x+2z}{z^2} - \frac{1}{z} = 0$$
$$(\dot{z}x+2z)^2 + z^2(\bar{z}x+2z) - z^3 = 0,$$

если обозначить $\dot{z}x + 2z = u$, то получим квадратное уравнение $u^2 + z^2u - -z^3 = 0$, $D = z^4 - 4z^3$. Тогда $u = \dot{z}x + 2z = \frac{-z^2 - z\sqrt{z^2-4z}}{2}$, последнее уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными вида

$$\dot{z}x = f(z)$$

Пример 9. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{y}^4 - 4y(x\dot{y} - 2y)^2 = 0,$$

это уравнение можно записать в виде $\dot{y}^4 - \left(2\sqrt{y}x\dot{y} - 4\sqrt{y} - y\right)^2 = 0$ или в виде двух уравнений $\dot{y}^2 = \pm 2\sqrt{y}\,xy - 4\sqrt{y}y$. Пусть $\bar{x} = xe^a$ и $\bar{y} = ye^b$,

тогда $\dot{\bar{y}}^2 = \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cdot e^{2b-2a}$, $2\sqrt{\bar{y}}\bar{x}\dot{\bar{y}} = 2\sqrt{y}\;\cdot e^bxe^a - \dot{y}\cdot e^{b-a} =$

$= 2\sqrt{y}\cdot x\dot{y}\cdot e^{\frac{3b}{2}}, 4\sqrt{\bar{y}}\cdot\bar{y} = 4\sqrt{y}\cdot e^{\frac{b}{2}}\cdot ye^b = 4^{\frac{3b}{2}}$

Для того, чтобы уравнение было инвариантным относительно неоднородных растяжений, должно выполнятся равенство

$$2b - 2a = \frac{3b}{2} \Rightarrow 4b - 4a = 3b \Rightarrow b = 4a,$$

т.е. группа имеет вид $\bar{x} = xe^a$, $\bar{y} = ye^{4a}$, инвариантом этой группы является функция $J = \frac{x^4}{y}$ (см. пример 7). Сделаем замену $z = \frac{x^4}{y}$ или $y = \frac{x^4}{z}$. $\dot{y} = \frac{4x^3z - \dot{z}x^4}{z^2} = x^3\frac{4z-\dot{z}x}{z^2}$, тогда уравнение имеет вид

$$\left(x^3\frac{4z-\dot{z}x}{z^2}\right)^2 = \pm 2\sqrt{\frac{x^4}{z}}\cdot x^4\,\frac{4z-\dot{z}x}{z^2} - 4\sqrt{\frac{x^4}{z}} - \frac{x^4}{z}$$

или

$$(4z-\dot{z}x)^2 = \pm z^4\left(2z^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{4z-\dot{z}x}{z^2} - 4z^{-\frac{3}{2}}\right) = \pm\left[2z^{\frac{3}{2}}(4z-\dot{z}x) - z^{\frac{5}{2}}\right]$$

Если обозначить $u = 4z - \dot{z}x$, то будем иметь квадратное уравнение относительно и $u^2 \mp 2z^{\frac{3}{2}}u + z^{\frac{5}{2}} = 0$. Для него

$$u = 4z - \dot{z}x = \sqrt{z^3} - z\sqrt{z-\sqrt{z}}$$

В результате мы получим уравнение с разделяющимися переменными вида

$$x\dot{z} = f(z),$$

где

$$f(z) = 4z \pm z\left(\sqrt{z} \pm \sqrt{z-\sqrt{z}}\right)$$

Отметим, что уравнения приведённые в примерах 8 и 9 обычными методами интегрировать в квадратурах не предоставляется возможным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа – М.: Знание, 8/1989, 44 с.
2. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Знание, 7/1991, 47 с.

REFERENS

1. Ibragimov N.Kh. ABC of group analysis – M.: Knowledge, 8/1989, 44 p.
2. Ibragimov N. Kh. The experience of group analysis, ordinary differential equations – M.: Knowledge, 7/1991, 47 p.