УДК 517,837.2
ББК 22

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Мухсинов Едгор Мирзоевич *- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП, e-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com*

ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАИ ТАЪҚИБКУНӢ БАРОИ БОЗИИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ХАТТИИ НАВЪИ ДЕРМОНӢ БО МАҲДУДИЯТҲОИ ИНТЕГРАЛӢ

Мухсинов Едгор Мирзоевич *- номзади илмҳои физика ва математика, дотсенти кафедраи фанҳои риёзи-табиатшиносии муосири ДДҲБСТ, e-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com*

SOLVABILITY OF THE PURSUIT PROBLEM FOR A LINEAR DIFFERENTIAL GAME OF A LAGGING TYPE WITH INTEGRAL CONSTRAINTS

Mukhsinov Edgor Mirzoevich *- Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science, TSUPB, e-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com*

Ключевые слова: *задача преследования, линейная дифференциальная игра с запаздывающим аргументом, управление преследования, управление убегания, гильбертово пространство.*

В гильбертовом пространстве рассматривается задача преследования в смысле определения Л. С. Понтрягина для линейной дифференциальной игры запаздывающего типа с интегральными ограничениями на управления игроков. Доказаны достаточные условия о разрешимости задачи преследования.

Вожаҳои калидӣ: *масъалаи таъқибкунӣ, бозии дифференсиалии хаттӣ бо аргументи дермонӣ, идоракунии таъқибкунӣ, идоракунии гурезанда, фазои Гилберт.*

Дар фазои Гилберт, масъалаи таъқибкунӣ ба маънои Л.С.Понтрягин барои бозии дифференсиалии хаттии навӣ дермонӣ бо маҳдудиятҳои интегралӣ ба идоракуниҳои бозигарҳо, дида шудааст. Шартҳои кифоягии ҳалшавандагии масъалаи таъқибкунӣ исбот карда шудааст.

Key words*: pursuit problem, linear differential game with lagging argument, pursuit control, evasion control, Hilbert space.*

In a Hilbert space, we consider the pursuit problem in the sense of Pontryagin's definition for a linear differential game of lagging type with integral constraints on the players' controls. Sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem are proved.

В гильбертовом пространстве X рассмотрим линейную дифференциальную игру, описываемую дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, x(t-h_i) - Bu(t) + Cv(t), \tag{1}$$

где $t \geq 0, 0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h, x(t) \in X$, управление преследования $u(\cdot)$ из класса измеримых отображений, действующих из $[0,\infty)$ в гильбертовом пространстве Y, управления убегания $v(\cdot)$ из класса измеримых отображений, действующих из $[0,\infty)$ в гильбертовом пространстве Z, операторы $A_i: X \to X$, $B: Y \to X, C: Z \to X$ линейны и ограничены, а оператор $A: D \to X -$ линейный замкнутый оператор, имеющий плотную в X область определения порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)([1], \text{с}.\,316)$. На основании этой полугруппы можно строить фундаментальное решение $\Phi(t)([2], \text{с}.\,267)$ для которого справедливо равенство

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, \Phi(t-h_i) \tag{2}$$

и $\Phi(0) = I$ − единичный оператор, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

Терминальное множество M, где заканчивается игра, является замкнутым линейным подпространством пространства X. При этом, на уравнения преследования $u(\cdot)$ и на управления убегания $v(\cdot)$ наложены интегральные ограничения:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\, ds \le \rho^2, \int_0^\infty \|v(s)\|^2\, ds \le \sigma^2, \text{где } \rho, \sigma > 0. \tag{3}$$

В дальнейшем, полагаем, что операторы B и C такие, что для любых управлений преследования $u(\cdot)$, управления убегания $v(\cdot)$ и начального положения $\varphi(\cdot)$- из класса непрерывных отображений, действующих из $[-h, 0]$ в X, задача Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, x(t - h_i) - Bu(t) + Cv(t), \tag{4}$$

$x(s) = \varphi(s), \qquad -h \le s \le 0$ имеет единственное абсолютно непрерывное решение ($[2]$, с. 268).

Справедлива следующая

Лемма. Если $\varphi(\cdot)$ − абсолютно непрерывна, то задача Коши (4) имеет следующее абсолютно непрерывное решение

$$x(t) = \Phi(t)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - s - h_i)\, A_i \varphi(s) ds -$$

$$- \int_0^t \Phi(t - s)\big(Bu(s) - Cv(s)\big)\, ds \tag{5}$$

Доказательство. В работе ($[2]$, с. 268) доказано, что однородная задача (4) имеет следующее абсолютное непрерывное решение

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - s - h_i)\, A_i \varphi(s) ds \tag{6}$$

Используя равенство (6) докажем, что неоднородная задача (4) имеет решение вида (5). Действительно, учитывая (2), имеем

$$\dot{x}(t) = \left(\Phi(t)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - s - h_i)\, A_i \varphi(s) ds - \int_0^t \Phi(t - s)\big(Bu(s) - Cv(s)\big)\, ds\right)'$$

$$= \left(\tilde{x}(t) - \int_0^t \Phi(t - s)\big(Bu(s) - Cv(s)\big)\, ds\right)' =$$

$$= \dot{\tilde{x}}(t) - Bu(t) + Cv(t) - \int_0^t \dot{\Phi}(t - s)\big(Bu(s) - Cv(s)\big)\, ds$$

$$= A\tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, \tilde{x}(t - h_i) - Bu(t) + Cv(t) -$$

$$- \int_0^t \left[A\Phi(t - s) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, \Phi(t - s - h_i)\right] \cdot \big(Bu(s) - Cv(s)\big) ds =$$

$$= A\tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i \tilde{x}\,(t - h_i) - Bu(t) + Cv(t) -$$

$$-A \int_0^t \Phi(t - s)\big(Bu(s) - Cv(s)\big) ds - \sum_{i=1}^{n} A_i \int_0^t \Phi(t - s - h_i)\, \big(Bu(s) - Cv(s)\big) ds =$$

$$= A\left(\tilde{x}(t) - \int_0^t \Phi(t - s)(Bu(s) - Cv(s) ds)\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\tilde{x}(t - h_i) - \int_0^t \Phi(t - s - h_i)\big(Bu(s) - Cv(s)\big) ds\right) - Bu(t) + Cv(t) =$$

$$= Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t - h_i) - Bu(t) + Cv(t)$$

Лемма доказана.

Для дифференциальной игры (1) рассмотрим следующее определение и задачу преследования ([3], c. 308; [4], c. 130; [5], c. 233) .

Определение. В игре (1) из начального положения $\varphi(s), -h \le s \le 0$, $\varphi(0) \in X \backslash M$ возможно завершение преследования, если существует число $T = T(\varphi) \ge 0$ такое, что для любого измеримого управления убегания $\vartheta(\cdot): [0, T] \to Z$ в каждый момент $t \in [0, T]$, зная уравнение (1) и значения $\vartheta(t)$ и $x(s), 0 \le s \le t$, можно выбрать значение $u(t)$ таким образом, что управление преследования $u(\cdot): [0, T] \to Y$ допустимо, измеримо и $x(T_1) \in M$ при некотором $T_1 \in [0, T]$, где $x(\cdot)$- решение задачи (3), соответствующее управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. При этом число $T = T(\varphi)$ называется гарантированным временем преследования, а точная нижняя грань гарантированных времен, оптимальным временем преследования.

Задача преследования. Найти множество начальных положений, из которых в игре (1) возможно завершение преследования.

Далее $M^{\perp}$ —ортогональное дополнение к M в X, $\pi -$ оператор ортогонального проектирования из X на $M^{\perp}$. Ясно, что $x \in$ M тогда и только тогда, когда $\pi x = 0$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть:

1) существует линейный оператор $L(t): Z \to Y$, непрерывно зависящий от $t \in [0, \infty)$ и $\pi\, \Phi(t) C = \pi \Phi(t) B L(t)$;

2) если $\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)\vartheta(t-s)\|^2\, ds \colon \int_0^{\infty} \|\vartheta(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\}$,

то при всех $t \ge 0$ имеет место неравенство $\rho \ge \lambda(t)$;

3) начальное положение φ и $T = T\big(\varphi(0)\big)$ такие, что имеет место включение

$$\pi \Phi(T)\varphi(0) + \pi \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T - s - h_i)\, A_i \varphi(s) ds \in$$
$$\in \left\{ \int_0^T \pi \Phi(T-s) B p(s) ds \colon \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 \right\}.$$

Тогда в игре (1) из начального положения $\varphi(s)$, $-h \le s \le 0$, возможно преследование за время $T = T(\varphi(0))$.

<u>Доказательство</u>. Суть доказательства состоит в том, что для любого допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ можно выбирать такое допустимое измеримое управление преследования $u(\cdot)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (4) соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеет место равенство $\pi x(T) = 0$.

Заметим, что в силу 3) существует такое отображение $p(\cdot)$, что имеет место равенство

$$\pi \Phi(T)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi \Phi(T - s - h_i)\, A_i \varphi(s) ds = \int_0^T \pi \Phi(T-s) B p(s) ds \qquad (7)$$

Пусть $\vartheta(\cdot)$-произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования зададим по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)\vartheta(t), & 0 \le t \le T, \\ 0, & t > T \end{cases} \qquad (8)$$

Вначале, докажем, что управление преследования $u(\cdot)$ выбранное по формуле (8) удовлетворяет ограничению (3). Действительно, учитывая 2), 3) и (8) имеем:

$$\int_0^{\infty} \|u(s)\|^2\, ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\, ds + \int_T^{\infty} \|u(s)\|^2\, ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\, ds =$$
$$= \int_0^T \|p(T-s) + L(s)\vartheta(T-s)\|^2\, ds = \int_0^T < p(T-s) + L(s)\vartheta(T-s), p(T-s) +$$
$$+ L(s)\vartheta(T-s) > ds = \int_0^T \|p(T-s)\|^2\, ds + 2\int_0^T < p(T-s), L(s)\vartheta(T-s) > ds +$$
$$+ \int_0^T \|L(s)\vartheta(T-s)\|^2\, ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 + 2\sqrt{\int_0^T \|p(T-s)\|^2 ds} \times$$
$$\times \sqrt{\int_0^T \|L(s)\vartheta(T-s)\|^2 ds} + \lambda^2(T) = \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 + 2\big(p - \lambda(T)\big) \cdot \lambda(T) + \lambda^2(T) =$$
$$= \rho^2 - 2p\lambda(T) + \lambda^2(T) + 2p\lambda(T) - 2\lambda^2(T) + \lambda^2(T) = p^2,$$

т. е. управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет ограничению (3).

Теперь докажем, что $\pi x(T) = 0$. Действительно, в силу 1), (7), (8) для решения $x(\cdot)$ задачи (4) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $[0, T]$ имеем:

$$\pi x(T) = \pi\left[\Phi(T)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi(T - s - h_i)\,A_i\varphi(s)ds - \int_0^T\Phi(T - s)(Bu(s) - Cv(s)ds)\right] =$$

$$= \pi\Phi(t)\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\pi\Phi(T - s - h_i)\,A_i\varphi(s)ds - \int_0^T\pi\Phi(T - s)(Bu(s) - Cv(s)ds) =$$

$$= \int_0^T\pi\Phi(T - s)Bp(s)ds - \int_0^T\pi\Phi(T - s)Bu(s)ds + \int_0^T\pi\Phi(T - s)C\vartheta(s)ds =$$

$$= \int_0^T\pi\Phi(t)Bp(T - t)dt - \int_0^T\pi\Phi(t)Bu(T - t)dt + \int_0^T\pi\Phi(t)BL(t)\vartheta(T - t)dt =$$

$$= \int_0^T\pi\Phi(t)B[p(T - t) - u(T - t) + L(t)\vartheta(T - t)]dt =$$

$$= \int_0^T\pi\Phi(t)B[p(T - t) - p(T - t) - L(t)\vartheta(T - t) + L(t)\vartheta(T - t)]dt = 0,$$

т. е. $\pi x(T) = 0$. А это, означает, что $x(T) \in M$. Следовательно, в игре (1) из начального положения $\varphi(s), -h \le s \le 0$, возможно преследование за время $T = T\big(\varphi(0)\big)$. При этом, выбор управления преследования $u(\cdot)$ осуществляется по формуле (8).

Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичные результаты можно получить, когда на управление игроков наложены смешанные ограничения типа

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\,ds \le \rho^2,\ \ \vartheta(t) \in K,$$

где $\rho > 0$ и K −некоторое выпуклое замкнутое ограниченное множество из Z.

Замечание 2. Доказанная теорема обобщает соответствующий результат из работ $([5], \text{с.}\,234; [6], \text{с.}\,433)$, когда закон движения игры описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа с интегральными ограничениями на управление игроков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.:ИИЛ.1962. 832 с.
2. Datko R/ Linear Autonomous Neutral Differential Equations is a Banach Space // of Differential elations. 1977. №25.p.258-274.
3. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980.т.112 (154). №3. С.307-331.
4. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сибирский математический журнал. 2015.Т.56. №1.С. 129–148.
5. Мухсинов Е.М., Муродова М.Н. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний в гильбертовом пространстве // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2016. №1/1(192). С.233 – 236.
6. Мухсинов Е.М. О дифференциальных играх преследования с интегральными ограничениями // Дан. Тадж. ССР. Т.28. №8. 1985. С.431–434.

REFERENCES

1. Hille E., Phillips R. Functional analysis and semigroups. M.: IIL. 1962. 832p.
2. Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations is a Banach Space //J. of Differential equations. 1977. V.25.P.258-274.
3. Pontryagin L.S. Linear differential pursuit games // Mathematical collection. 1980.V.112 (154) No. 3.P.307-331.
4. Mamadaliev N. On one problem of pursuit with integral constraints on the controls of the players // Siberian Mathematical Journal. 2015. V.56. No1. P.129–148.
5. Mukhsinov E.M., Murodova M.N. Linear differential pursuit games in the presence of delays in the Hilbert space // Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences. 2016. No. 1/1 (192). P. 233 - 236.
6. Mukhsinov E.M. On differential pursuit games with integral constraints // Dan. Taj. SSR. Vol.28. No. 8. 1985. P. 431-434.