УДК 541.123

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИССИПАТИВНЫХ СОЛИТОНОВ В СКАЛЯРНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЁДИНГЕРА

Мухамедова Шоира Файзуллоевна, *к.физ.-мат.наук, доцент кафедры информационно-коммуникационных технологий и программирования Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики (Таджикистан, Худжанд).*

УСТУВОРИИ СОЛИТОНҲОИ ДИССИПАТИВӢ ДАР МУОДИЛАИ ҒАЙРИХАТТИИ СКАЛЯРИИ ШРЁДИНГЕР

Муҳамедова Шоира Файзуллоевна, *н.и.физ.-мат., дотсенти кафедраи технологияҳои иттилоотӣ-коммуникатсионӣ ва барномарезии Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

STABILITY OF DISSIPATIVE SOLITONS IN THE SCALAR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Mukhamedova Shoira Faizulloevna, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Information and Communication Technologies and Programming of the Tajik State University of Law, Business and Politics (Tajikistan, Khujand),**E-mail:** shoira74@mail.ru.*

Ключевые слова: Ключевые слова: *диссипативные солитоны, скалярное нелинейное уравнение Шредингера, диссипация, подкачка, пульсирующие солитоны.*

В данной работе рассматриваются вопросы устойчивости диссипативных солитонов скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с конденсатными граничными условиями. Показано, что под воздействием затухания, подкачки и ненулевой скорости движения формируются солитоноподобные структуры. Результаты показывают, что диссипативные процессы в сочетании с внешними воздействиями создают условия для существования долгоживущих и устойчивых солитонов. Эти структуры сохраняют локализованность и проявляют пульсирующее поведение с удвоенным периодом, указывая на формирование устойчивых диссипативных солитонов.

Калидвожаҳо: *солитонҳои диссипативӣ, муодилаи ғайрихаттии скалярии Шрёдингер, диссипатсия, подкачка, солитонҳои набзӣ*

Дар ин мақола масъалаҳои устувории солитонҳои диссипативӣ дар муодилаи ғайрихаттии скалярии Шрёдингер бо шартҳои сарҳадии таназзулёбанда баррасӣ мешаванд. Нишон дода шудааст, ки таҳти таъсири хомӯшшавӣ, дамкунӣ ва суръати ғайринулии ҳаракат сохторҳои ба солитон монанд ташаккул меёбанд. Натиҷаҳо нишон медиҳанд, ки равандҳои диссипативӣ дар якҷоягӣ бо таъсирҳои беруна шароити мусоидро барои мавҷудияти солитонҳои дарозумр ва устувор фароҳам меоранд. Ин сохторҳо даврро нигоҳ дошта, рафтори набзӣ бо даври дучанд нишон дода, аз ташаккули солитонҳои устувори диссипативӣ шаҳодат медиҳад.

Keywords*: dissipative solitons, scalar nonlinear Schrödinger equation, dissipation, pumping, pulsating solitons.*

The article dwells on the stability of dissipative solitons in the scalar nonlinear Schrödinger equation with condensate boundary conditions. It is shown that under the influence of damping, pumping, and nonzero velocity, soliton-like structures are formed. The results demonstrate that dissipative processes, combined with external influences, create conditions for the existence of long-lived and stable solitons. These structures maintain localization and exhibit pulsating behavior with a doubled period, indicating the formation of stable dissipative solitons.

Множество нелинейных дифференциальных уравнений имеет решения в виде уединенных волн, известных как солитоны. Хотя впервые их заметили в гидродинамике более ста лет назад, особый интерес к этим решениям появился только в конце XX века. Это связано с тем, что уединенные волны считались редким явлением. Считалось, что нелинейность, способствующая их появлению, также приводит к их разрушению при взаимодействии. Солитон — это уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при распространении через различные среды, что делает его схожим с частицами, такими как электрон или фотон. Способность солитона сохранять свою форму при распространении объясняется взаимодействием двух противоположных процессов. Первый — это так называемое нелинейное укручивание: фронт волны с большой амплитудой стремится «опрокинуться» на участках с ростом амплитуды, так как задние частицы, имеющие большую амплитуду, движутся быстрее передних. Второй процесс — это дисперсия, при которой скорость волны зависит от её частоты, что обусловлено физическими и геометрическими характеристиками среды. В результате дисперсии разные участки волны движутся с разной скоростью, что вызывает её расплывание. Таким образом, нелинейное укручивание волны уравновешивается её расплыванием вследствие дисперсии, что позволяет волне сохранять свою форму при распространении. Отсутствие вторичных волн при движении солитона указывает на то, что энергия волны не рассеивается в пространстве, а остаётся сосредоточенной в ограниченной области (локализована). Локализация энергии является характерной чертой частицы [1].

Солитоны, первоначально описывающие волны на неглубокой воде, в настоящее время были обнаружены как решения множества уравнений в других областях механики и физики. Одним из наиболее известных примеров является скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера (СНУШ), которое широко применяется для описания нелинейных волн в таких областях, как оптика, физика плазмы и конденсированные среды.

$$i\,\psi_t + \psi_{xx} + u(\mathrm{x,t})\psi = 0. \quad (1)$$

В этом уравнении роль потенциала может выполнять низкочастотная волна, описываемая следующим уравнением

$$\Box u(x,t) = -|\psi|^2_{xx} \quad (2)$$

(Захаров Б.Е. [2]),

Уравнение (1) было получено в процессе изучения оптической самофокусировки и расщепления оптических пучков. Это же уравнение применялось при исследовании волн на глубокой воде. Со временем возникли обобщения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера (СНУШ) для описания волновых процессов в плазме. Интерес представляет также использование СНУШ в теории элементарных частиц. В настоящее время солитонная теория находит широкое применение в различных областях, таких как исследование линий передачи сигналов с нелинейными элементами (диоды, катушки сопротивления), пограничные слои, атмосферы планет (например, Большое Красное Пятно Юпитера [3]), цунами, волновые процессы в плазме, теория поля, физика твердого тела, теплофизика экстремальных состояний вещества. Она также используется при изучении новых материалов, таких как джозефсоновские контакты, состоящие из двух сверхпроводящих слоев, разделенных диэлектриком, а также при создании моделей кристаллических решеток, в оптике, биологии и других дисциплинах.

Солитоны в неконсервативных системах, известные как диссипативные солитоны, обладают рядом уникальных характеристик, отличающих их от солитонов в консервативных системах. За последние два десятилетия изучение их свойств значительно углубилось благодаря широкому применению методов математического моделирования и компьютерных экспериментов. Эти достижения стали возможны благодаря появлению мощных вычислительных систем, что открыло новые горизонты для исследования диссипативных солитонов и их поведения в сложных средах. В консервативных системах локализованная структура поддерживается за счет сохранения энергии, без необходимости дополнительного внешнего воздействия. В диссипативных системах локализованная структура требует постоянного поступления дополнительной энергии для поддержания своего существования и развития. Важным становится не только баланс между нелинейностью и дисперсией или дифракцией, но и равновесие между притоком и оттоком энергии. Такие системы открывают новые перспективы для формирования локализованных структур и объектов, которые активно исследуются в различных областях физики, химии и биологии. Развитие диссипативных структур может привести к усложнению форм и состояний материи. Это, в конечном итоге, может сыграть ключевую роль в понимании процессов зарождения и эволюции жизни, создавая связь между живыми и неживыми системами природы. Диссипативный солитон представляет собой локализованную структуру, способную существовать в неконсервативной системе длительное время, несмотря на усиление или потерю энергии и массы в некоторых её частях. Такая структура может проявляться в виде профиля интенсивности света, температуры, магнитного поля или намагниченности.

Диссипативные солитоны возникают в открытых системах или в системах, находящихся далеко от равновесия, где энергия или материя могут поступать через границы, и поддерживаются до тех пор, пока параметры системы остаются стабильными. В диссипативных солитонах происходит постоянное перераспределение энергии между их компонентами. Стационарные солитоны могут образовываться в системах, где усиление и потери находятся в равновесии. В простых системах, которые можно описать математической моделью, существование и эволюция солитонов зависят от баланса между усилением и потерями, дисперсией и нелинейностью. Одним из типов диссипативных солитонов являются пульсирующие солитоны, которые вызывают значительный интерес в системах с диссипациями и были выявлены как в экспериментальных, так и в численных исследованиях, например, при распространении световых импульсов в волоконной оптике. Эти пульсирующие солитоны можно рассматривать как предельные циклы бесконечномерных диссипативных динамических систем, хотя численные модели показывают, что они возникают в результате бифуркаций из стационарных солитонов [5].

Теперь определим, что мы понимаем под устойчивостью солитоноподобных решений, описывающих состояния некоторых нелинейных систем. Обычно различают два типа устойчивости системы: 1) устойчивость относительно возмущений начальных данных и 2) устойчивость относительно изменений эволюционного уравнения, описывающего динамику системы (структурная устойчивость).

В первом случае вопрос об устойчивости изучен достаточно глубоко: существуют различные методы и подходы, как линейные, так и нелинейные. В линейном приближении анализ устойчивости обычно сводится к исследованию спектра собственных значений линеаризованного уравнения, в то время как в нелинейном подходе применяется анализ неравенств Ляпунова (см. 6,с.7).

В последние годы появилось множество работ, посвящённых исследованию структурной устойчивости солитонов в рамках различных эволюционных уравнений и для различных типов возмущений. Были предприняты попытки разработки общей теории возмущения солитонов с использованием метода преобразования, который предполагает переход от конфигурационного пространства (x, t) в пространство данных рассеяния на основе хорошо известного двухвременного формализма [8]. Однако разработанная методика применима лишь к довольно ограниченному классу функционалов возмущений. Поэтому, несмотря на впечатляющие результаты, полученные в этом направлении, исследования нельзя считать завершёнными, особенно в отношении структурной устойчивости систем, близких к интегрируемым. Особенно сложным является вопрос устойчивости движения интегрируемой системы под воздействием негамильтонового возмущения. В этом случае численные эксперименты становятся более эффективным инструментом для исследования.

Под структурно устойчивыми решениями подразумеваются такие решения, которые достаточно долго сохраняют свою форму. Понятие «достаточно долго» определяется временной шкалой физических процессов, происходящих в рассматриваемой системе. Следует отметить, что некоторые из невозмущенных решений могут разрушаться довольно быстро, при этом возможен переход к совершенно новым типам решений, особенно в случае негамильтоновых возмущений.

Основной целью данного исследования является анализ устойчивости многосолитонных конфигураций (или когерентных структур) в условиях диссипации и внешней подкачки, а также их поведение при изменении внешних параметров в процессе движения. Мы детально исследуем результаты численного моделирования решений скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера (СНУШ), уделяя особое внимание влиянию диссипативных эффектов и подкачки на движущиеся солитоны. Акцент будет сделан на динамике и устойчивости этих структур. Исследования способствуют углублению понимания нелинейных волновых процессов и открывают новые перспективы в оптике, плазменной физике и квантовых технологиях.

Рассмотрим СНУШ, где в качестве потенциала играет роль низкочастотная волна, следующего вида

$$i\,\varphi_t - \varphi_{xx} - \lambda|\varphi|^2\varphi = 0. \quad (3)$$

С убывающими граничными условиями при $|x| \to \infty$, в качестве потенциала используется следующее выражение:

$u = -\lambda|\varphi|^2$ (4)

где λ — параметр нелинейности, $\varphi(x,t)$ — искомая функция.

Данное уравнение широко известно, как модель бозе-конденсата, для которого методом обратной задачи рассеяния были получены многосолитонные решения [9]. Многосолитонное решение уравнения (3), убывающее при $|x| \to \infty$, можно представить в следующем виде [10].

$\varphi = \gamma_1\psi_1 + \gamma_2\psi_2,$ (5)

где

$$\psi_1 = (A_1 e^{iW_1(x,t)-P_1(x,t)} + A_2 \sinh(P_2(x,t) + h_1) e^{iW_1(x,t)})/$$
$$/(A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + +h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) +$$
$$+A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4))$$
$$\psi_2 = (A_6 e^{iW_1(x,t)-P_1(x,t)} + A_7 \sinh(P_2(x,t) + h_5))/$$
$$/(A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) +$$
$$+A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4))$$

$$W_1(x,t) = \alpha_1 x + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t, \qquad P_1(x,t) = \beta_1(x + 2\alpha_1 t),$$
$$W_2(x,t) = \alpha_2 x + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t, \qquad P_2(x,t) = \beta_2(x + 2\alpha_2 t),$$
$$h_1 = (1/2)\ln|\kappa_{21}/\kappa_{11}\kappa_{22}C_{22}|,$$
$$h_2 = (1/2)\ln|C_{11}\kappa_{11}/\kappa_{22}C_{22}|,$$
$$h_3 = (1/2)\ln|(C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\kappa_{12}|^2\kappa_{21}\kappa_{22}/|\overline{\kappa_{12}}|^2|,$$
$$h_4 = (1/2)\ln|C_{12}\kappa_{12}/\kappa_{21}C_{21}|,$$
$$h_5 = (1/2)\ln|\overline{\kappa_{12}}/\kappa_{21}\kappa_{11}C_{11}|,$$
$$\kappa_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \qquad \kappa_2 = \alpha_2 + i\beta_2,$$
$$\kappa_{ij} = \kappa_i - \bar{\kappa}_j, \qquad \bar{\kappa}_{ij} = \bar{\kappa}_i - \kappa_j,$$
$$A_1 = C_{12}/2,$$
$$A_2 = (\overline{\kappa_{21}}C_{22}/\kappa_{12}\kappa_{21})^{1/2}, \qquad A_3 = (C_{11}C_{22}/\kappa_{11}\kappa_{22})^{1/2},$$
$$A_4 = \left((C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\kappa_{12}|^2/|\overline{\kappa_{12}}|^2\kappa_{11}\kappa_{22}\right)^{1/2},$$
$$A_5 = -(C_{12}C_{21}/\kappa_{21}\kappa_{21})^{1/2}, \qquad A_6 = C_{21}/2,$$
$$A_7 = (\overline{\kappa_{12}}C_{11}/\kappa_{12}\kappa_{21})^{1/2}.$$

При дальнейшем изложении, используем характеристику решения, т.е., интеграл энергии в следующем виде

$E = \int_{-\infty}^{\infty}(|\varphi_x|^2 + (\lambda|\varphi|^2)^2)dx$ (6)

Для анализа устойчивости эволюции решения (5) скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера (СНУШ) с убывающими граничными условиями, то есть при $|x| \to \infty$, нами разработан алгоритм и комплекс компьютерных программ численного моделирования на платформе Matlab, основанный на теории разностных схем [11]. В работе применяются условия устойчивости $\tau \le \frac{h^2}{4}$, где τ — шаг по времени, а h — шаг по координате, и используется явная трехслойная разностная схема, известная как схема «leap-frog». В тестовых вычислениях интеграл энергии сохранялся с относительной точностью $\Delta E/E \approx 10^{-3} - 10^{-4}$.

Численное моделирование многосолитонного решения (5) было проведено в широком диапазоне значений параметров $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \lambda,\ \gamma_1$ и γ_2. Результаты наиболее точных численных экспериментов при следующих значениях параметров: $b = 0.86, \alpha_1 = 0.037, \alpha_2 = 1.32,\ \beta_1 = 0.028, \beta_2 = 0.019, \gamma_1 = 1.64,\ \gamma_2 = 1.64,\ \lambda = 0.39,\ k1 = 0.79$

на интервале [0, 1000] до времени t = 200 представлены на рисунках 1-2.

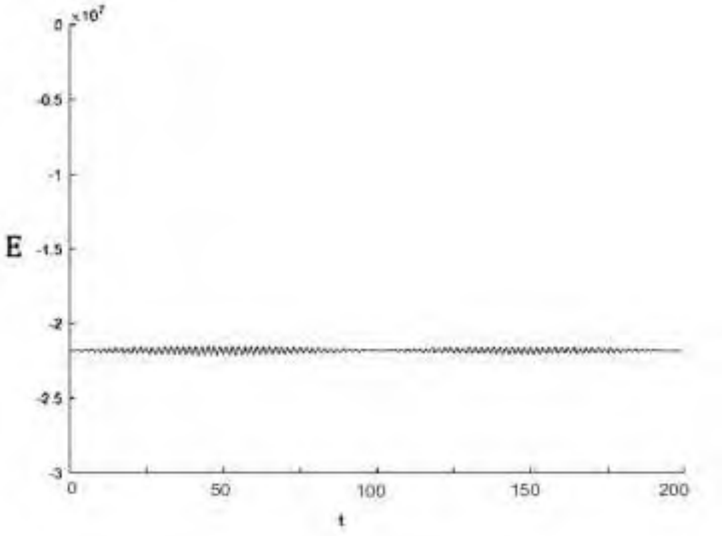

Рис. 1. График интеграла энергии солитона

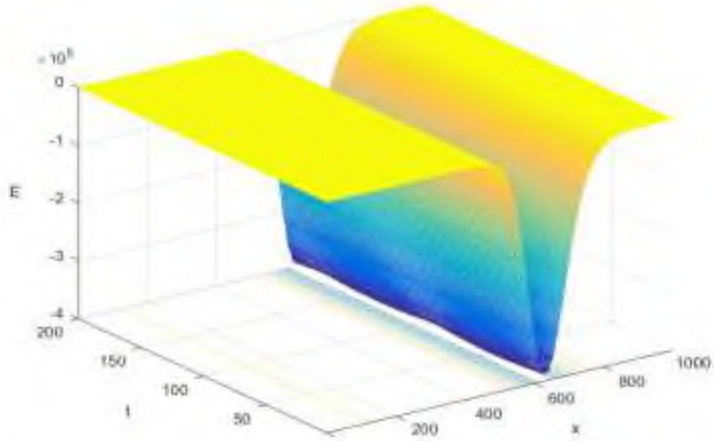

Рис. 2. График эволюции плотности энергии солитона

На графике (см. рис. 1), показывающем интегралы энергии солитона, представлена зависимость переменной E от времени t в диапазоне от 0 до 200. Визуально график остаётся практически горизонтальным в течение значительного времени, что указывает на слабые изменения переменной со временем и отсутствие значительной динамики. График эволюции плотности энергии системы во времени и пространстве изображает модулированную волну, которая на левых и правых границах достигает одинаковых вакуумных состояний (см. рис. 2) и сохраняет свою устойчивость в течение указанного интервала времени.

На следующем этапе нашего исследования рассматривается устойчивость солитонного решения в среде с диссипацией и подкачкой при ненулевой скорости движения [13]. Основная задача заключается в отслеживании преобразований периодических решений и пульсирующих солитонов, возникающих в результате бифуркации, то есть удвоения периода. Для анализа формирования устойчивого диссипативного солитона в правую часть уравнения (3) вводятся параметры затухания и подкачки. Скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера (СНУШ) с убывающими граничными условиями (3) при наличии переменных внешних магнитных полей и диссипации принимает следующий вид [12].

$$i\,\varphi_t - \varphi_{xx} - \lambda|\varphi|^2\varphi = h\bar{\varphi}e^{2i\omega_0} - i\gamma\varphi \quad (7)$$

где, γ- коэффициент диссипации и, h и ω_0 – амплитуда и частота накачки, а ω_0 совпадает с собственной частотой ω_0 из решения (5).

При заданной скорости движения (v = 0.13) в солитонном решении (5) скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера (СНУШ), учитывающем диссипацию и внешнюю подкачку магнитными полями, пульсирующие солитоны могут демонстрировать более сложное поведение. В частности, простые пульсации могут трансформироваться в пульсации с удвоенным периодом. Это явление связано с бифуркацией, происходящей на определённых границах в пространстве параметров уравнения. Пример такого солитона, подверженного указанной бифуркации, представлен на рисунках 3-4.

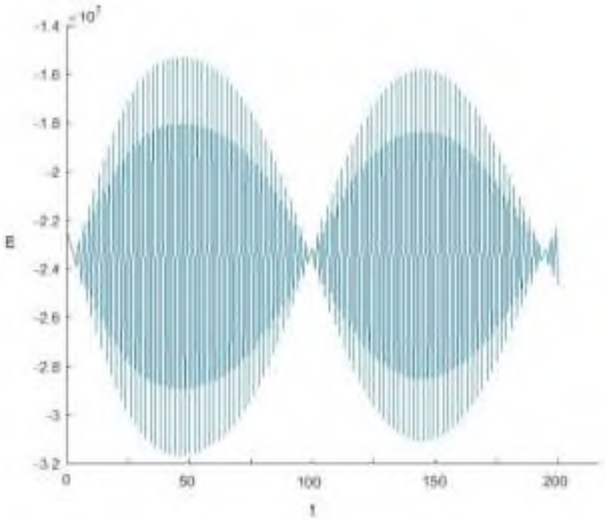

Рис. 3. График интеграла энергии солитона при учёте диссипации и подкачки и скорости v=0.13.

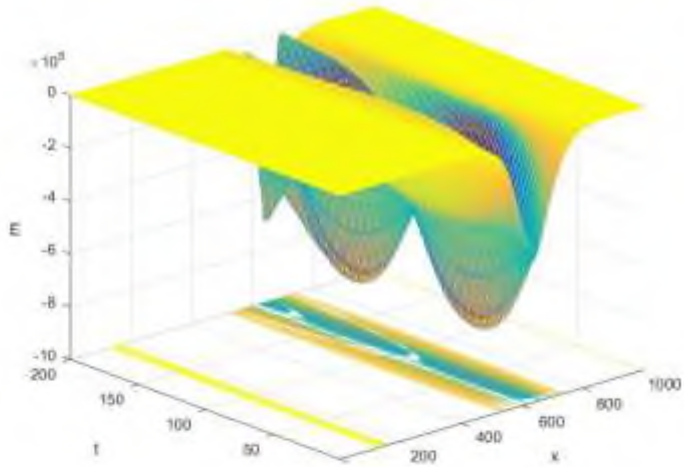

Рис. 4. График эволюции плотности энергии солитона при наличии диссипации и подкачки и скорости движения.

Исследование численных моделей, касающихся многосолитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера (СНУШ), с учетом затухающих граничных условий и воздействия внешних магнитных полей при ненулевой скорости, выявляет любопытные характеристики устойчивых локализованных структур. Эти структуры способны сохранять свою форму на протяжении продолжительного времени, а динамика их энергии демонстрирует стабильное развитие с элементами бризерной динамики (см. рис. 3).

Правильный выбор траектории в параметрическом пространстве позволяет наблюдать бесконечную последовательность бифуркаций с удвоением периода. Продолжительность этих бифуркаций определяется временной шкалой физических процессов в системе. В результате этих бифуркаций формируется устойчивый хаотический солитон, что показано на рисунке 4. Этот хаотический солитон сохраняет свою структуру и демонстрирует сложное динамическое поведение, оставаясь стабильным на протяжении длительного времени, что подчеркивает его устойчивость в данной системе.

Таким образом, результаты численных исследований указывают на формирование устойчивого диссипативного солитона в скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера (СНУШ) с убывающими граничными условиями, принимая во внимание затухание и внешнюю подкачку при ненулевой скорости движения. Влияние затухания и внешних полей, а также ненулевая скорость, способствует образованию солитоноподобных структур. Эти результаты демонстрируют, что диссипативные процессы в сочетании с внешними воздействиями создают условия, благоприятные для существования долгоживущих и устойчивых солитонов, которые сохраняют свою локализованность и проявляют интересное пульсирующее поведение с удвоением периода. Подобные наблюдения подчеркивают важность учета динамических взаимодействий при моделировании солитонных решений и их возможных приложений в различных областях физики.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Буссинеск, Ж. Теория распространения волн/Ж.Буссинеск// Журнал чистой и прикладной математики. — Сер. 2, 1844.-Т. 17.-С. 55.
2. Захаров, В.Е. Коллапс ленгмюровских волн/В.Е.Захаров// Журнал экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ).-1972.-Т. 62.-С. 1745–1759.
3. de Jongh L.J. Решения в магнитных цепях // Журнал прикладной физики. — 1982. — Т. 53, № 11. — С. 8018–8023.
4. Под ред. Ахмедиева Н., Анкевича А. Диссипативные солитоны. — М.: Физматлит, 2008. — 504 с
5. Нозаки К.Хаос в возмущённом нелинейном уравнении Шрёдингера/К.Нозаки, Н.Бекки// Physical Review Letters.-1983.-Т. 50, № 17.-С. 1226–1229.
6. Федянин, В.К. Препринт ОИЯИ, Е 17-12836, Дубна, 1979; Теоретическая и математическая физика (ТМФ). — 1981. — Т. 46, № 1. — С. 42–52.
7. Laedke E., Spatschek K. Нелинейная устойчивость огибающих солитонов // Physical Review Letters. — 1978. — Т. 41. — С. 1798.
8. Кариман, В. Исследование нелинейных эффектов/В.Кариман,Е.Маслов// Журнал экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ). — 1971. — № 73. — С. 537–545.
9. Захаров В.Е. Теория солитонов: Метод обратной задачи/В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков,Л.П.Питаевский.-М.: Наука, 1980.-320 с.
10. Рахимов, Ф.К. Двухсолитонные решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с конденсатными граничными условиями/Ф.К.Рахимов,Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов, В.Г.Маханьков// Журнал технической физики (ЖТФ).-1995.-Т. 65, № 6.-С. 191–196.
11. Маханьков, В.Г. Солитоны и численный эксперимент/В.Г.Маханьков// Элементарные частицы и атомные ядра (ЭЧАЯ).-1983.-Т. 14, Вып.1.-С.123-180.
12. Ахмедиев, Н.Диссипативные солитоны/Н.Ахмедиев,А.Анкевич.-Берлин-Гейдельберг: Springer-Verlag, 2005.- 470 с.
13. Земляная, Е.В. Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шрёдингера с параметрической накачкой и диссипацией/Е.В.Земляная, И.В.Барашенков// Математическое моделирование.-2005.-Т. 17, № 1.-С. 65-78.

REFERENCES:

1. Boussinesq J.Theory of Wave Propagation // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.- Ser. 2, 1844.-Vol.17.- P. 55.
2. Zakharov V.E. Collapse of Langmuir Waves // Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP).-1972.-Vol. 62.-P. 1745–1759.

3. de Jongh L.J.Solutions in Magnetic Chains // Journal of Applied Physics.-1982.-Vol. 53, No. 11.-P. 8018–8023.
4. Edited by Akhmediev N., Ankiewicz A.Dissipative Solitons.- Moscow: Fizmatlit, 2008.-504 p.
5. Nozaki K., Bekki N. Chaos in Perturbed Nonlinear Schrödinger Equation // Physical Review Letters.-1983.-Vol. 50, No. 17.-P. 1226–1229.
6. Fedyanin V.K.-Preprint JINR, E 17-12836, Dubna, 1979; Theoretical and Mathematical Physics (TMP).-1981.-Vol. 46, No. 1.-P. 42–52.
7. Laedke E., Spatschek K.- Nonlinear Stability of Envelope Solitons // Physical Review Letters. — 1978.- Vol. 41.-P. 1798.
8. Kariman V., Maslov E.Investigation of Nonlinear Effects // Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP). -1971. -No.73.-P. 537–545.
9. Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskii L.P. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method.-New York: Springer, 1984. — 276 p.
10. Rakhimov F.K., Abdulloev Kh.O., Maksudov A.T., Muminov Kh.Kh., Makhankov V.G. Dvukhsolitonnye resheniya skalyarnogo nelineinogo uravneniya Shredingera s kondensatnymi granichnymi usloviyami // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki (ZhTF).-1995.-Vol. 65, No. 6.- P. 191–196.
11. Makhankov V.G. Solitons and Numerical Experiments // Soviet Journal of Particles and Nuclei.-1983.-Vol. 14, No. 1.-P. 123–180.
12. Akhmediev N.,Ankiewicz A. Dissipative Solitons.-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.-470 p.
13. Zemlyanaya E.V., Barashenkov I.V. Chislennyi analiz dvizhushchikhsya solitonov v nelineinom uravnenii Shredingera s parametricheskoi nakachkoi i dissipatsiei // Matematicheskoe Modelirovanie.-2005.-Vol. 17, No.1.-P. 65–78.