ТДУ 004.934

ОИД БА ПУРРАГИИ ФАЗОИ ҚАТОРҲОИ МУНТАЗАМ НАЗДИКШАВАНДАИ ФУРЙЕ

Очилова Муҳайёхон Акбаровна, *муаллими калони кафедраи математикаи олӣ ва амалии МДТ «ДДХ ба номи акад. Б. Ғафуров» (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

О ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

Очилова Мухайёхон Акбаровна, *старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики ГОУ «ХГУ им. акад. Б.Гафурова» (Таджикистан, Худжанд)*

ON THE COMPLETENESS OF THE SPACE OF UNIFORMLY CONVERGENT FOURIER SERIES

Ochilova Mukhayyokhon Akbarovna, *Senior Lecturer of the Department of Higher and Applied Mathematics, SEI «KhSU named after acad. B.Gafurov» (Tajikistan, Khujand),E-**mail:** muhaiohon@mail.ru*

Калидвожаҳо: *қаторҳои мунтазам наздикшавандаи Фурйе, суммаҳои хусусии қатор, буридаҳои қаторҳои функсионалӣ, фазои нормиронидашудаи пурра.*

Дар ин мақола фазои қаторҳои мунтазам наздикшавандаи Фурйе бо суммаҳои хусусии ғайрисимметрӣ омӯхта мешавад. Бо нормаи дар ин фазо дохилнамуда, пуррагии он исбот шудааст. Ба ин фазо мутааллиқ будани буридаҳои қаторҳои Фурйе тасдиқ шудааст.

Ключевые слова: *равномерно сходящиеся ряды Фурье, частичные суммы ряда, срезки функциональных рядов, полное нормированное пространство.*

В статье изучаются равномерно сходящиеся ряды Фурье по несимметрическим частичным суммам. Относительно введенной нормы доказана полнота пространства. Утверждается принадлежность срезок рядов Фурье этому пространству.

Keywords: *uniformly convergent Fourier series, partial sums of a series, truncations of functional series, complete normed space.*

The article studies uniformly convergent Fourier series with respect to asymmetric partial sums. With respect to the introduced norm, the completeness of the space is proved. It is asserted that truncations of Fourier series belong to this space.

Дар ин мақола фазои қаторҳои мунтазам наздикшавандаи Фурйе бо суммаҳои хусусии ғайрисимметрӣ омӯхта мешавад. Бо нормаи дар ин фазо дохилнамуда пуррагии он исбот шудааст. Ба ин фазо мутааллиқ будани буридаҳои қаторҳои Фурйе тасдиқ шудааст.

Бигузор $f(x)$ функсияи бефосилаи комплексиқимати 2π-даврии аргументаш ҳақиқии x бошад. Қатори Фурйеи ин функсияро тавассути рамзи $(Sf)(x)$ ишора менамоем:

$$(Sf)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}, \qquad (1)$$

дар ин ҷо $c_k(f)\ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ коэффитсиентҳои Фурйеи функсияи $f(x)$ номида шуда, тавассути формулаи зерин ҳисоб мешаванд:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Дар баробари суммаҳои хусусии маъмулӣ, яъне суммаҳои хусусии симметрӣ [1, с. 17]:

$$\left(S_{-n,n}f\right)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx},$$

инчунин суммаҳои хусусии ғайрисимметрии

$$\left(S_{-m,n}f\right)(x) = \sum_{k=-m}^{n} c_k(f)e^{ikx} \qquad (m, n > 0).$$

муоина мешавад.

Қатори Фурйе (1) дар порчаи $[0,\,2\pi]$ ба функсияи $f(x)$ мунтазам наздик мешавад [2, с. 45] мегӯем, агар

$$\lim_{m,\,n\to+\infty}\left\| f-S_{-m,n}f\right\|_C=0 \qquad (2)$$

бошад, ки дар ин ҷо

$$\| f\|_C=\max_{0\le x\le 2\pi}\left|f(x)\right|$$

ишораи нормаи функсияи $f(x)$ дар фазои $C[0,\,2\pi]$ мебошад. Агар $m=n$ бошад, он гоҳ нормаи тавассути баробарии (2) муайяншуда, ба наздикшавии мунтазам аз рӯи суммаҳои хусусии симметрӣ [3, с. 17] мубаддал мегардад.

Дар поён, ҳангоми истифодаи истиллоҳи мунтазам наздикшавии қатори Фурйе, наздикшавии мунтазами он аз рӯи суммаҳои хусусии ғайрисимметрӣ дар назар дошта мешавад.

Критерияи Коши оид ба мунтазам наздикшавии пайдарпай [4, с. 424] имконият медиҳад, ки мунтазам наздикшавии қатори Фурйе бидуни истифодаи функсияи $f(x)$ тасдиқ карда шавад: қатори (1) дар порчаи $[0,\,2\pi]$ фақат ва фақат дар он ҳолат мунтазам наздикшаванда мешавад, агар барои ададҳои ихтиёрии $p\ge 0$, $q\ge 0$ шарти зерин иҷро шавад:

$$\lim_{m,\,n\to+\infty}\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\left(S_{-m-q,n+p}f\right)(x)-\left(S_{-m,n}f\right)(x)\right|=0, \qquad (3)$$

Азбаски

$$\left(S_{-m-q,n+p}f\right)(x)-\left(S_{-m,n}f\right)(x)=\sum_{k=-m-q}^{n+p}c_k(f)e^{ikx}-\sum_{k=-m}^{n}c_k(f)e^{ikx}=$$

$$=\sum_{k=-m-q}^{-m-1}c_k(f)e^{ikx}+\sum_{k=-m}^{n}c_k(f)e^{ikx}+\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k(f)e^{ikx}-\sum_{k=-m}^{n}c_k(f)e^{ikx}=$$

$$=\sum_{k=-m-q}^{-m-1}c_k(f)e^{ikx}+\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k(f)e^{ikx}$$

мебошад, пас шарти (3)-ро бо шарти баробарқувваи

$$\lim_{m,\,n\to+\infty}\max_{0\le xt\le 2\pi}\left|\sum_{k=-m-q}^{-m-1}c_k(f)e^{ikx}+\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k(f)e^{ikx}\right|=0, \qquad (4)$$

иваз намудан мумкин мешавад.

Тасвияи пурраи математикии шарти (3), ё ин ки шарти (4), чунин мебошад: барои дилхоҳ $\varepsilon>0$ чунин ададҳои $M=M(\varepsilon)>0$ ва $N=N(\varepsilon)>0$ ёфт шаванд, ки барои номерҳои ихтиёрии $m\ge M$ ва $n\ge N$ барои ҳамаи $x\in[0,\,2\pi]$, $p\ge 0$, $q\ge 0$ нобаробарии зерин ҷой дошта бошад:

$$\left|\left(S_{-m-q,n+p}f\right)(x)-\left(S_{-m,n}f\right)(x)\right|<\varepsilon.$$

Ифодаҳои зеринро муоина мекунем:

$$\left(S_{1,+\infty}f\right)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}, \qquad (5)$$

$$\left(S_{-\infty,-1}f\right)(x)=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(f)e^{ikx}. \qquad (6)$$

Қатори яктарафаи (5) буридаи рости қатори Фурйе (1) ва қатори яктарафаи (6) буридаи чапи [5, с. 243] ҳамин қатор номида мешаванд.

Аз наздикшавии мунтазами пайдарпаии суммаҳои хусусии $\left(S_{-m,n}f\right)(x)$ наздикшавии мунтазами ҳар яке аз буридаҳои $\left(S_{1,+\infty}f\right)(x)$ ва $\left(S_{-\infty,-1}f\right)(x)$ бармеояд. Оид ба ин гуфтор тасдиқоти зерин ҷой дорад:

Теоремаи 1. *Бигузор* $f(x)$ *функсияи комплексиқимати* 2π *-даврии аргументаш ҳақиқии* x *ва қатори Фурйе* (1)*-и ин функсия дар порчаи* $[0,2\pi]$ *мунтазам наздикшаванда бошад. Он гоҳ чунин функсияҳои дар ин порча бефосилаи* $f^{(+)}$ *ва* $f^{(-)}$ *мавҷуданд, ки онҳо мувофиқан ҳудуди мунтазами буридаи рост* (5) *ва чапи* (6) *мешаванд:*

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{0\le x\le 2\pi}\left|f^{(+)}(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)e^{ikx}\right|=0, \qquad (7)$$

$$\lim_{m\to+\infty}\max_{0\le x\le 2\pi}\left|f^{(-)}(x)-\sum_{k=-m}^{-1}c_k(f)e^{ikx}\right|=0. \qquad (8)$$

Исбот. Бигузор қатори (1) мунтазам наздик шавад. Мунтазам наздик шудани буридаи рости (5)-ро исбот мекунем. Барои ин мавҷуд будани чунин функсияи $f^{(+)}(x)\in C[0,2\pi]$-ро нишон додан лозим, ки барои дилхоҳ $\varepsilon>0$ чунин адади $N(\varepsilon)>0$ ёфт мешавад, ки барои ҳамаи $n\ge N(\varepsilon)$ нобаробарии зайл ҷой дорад

$$\left\|f^{(+)}-S_{1,n}f\right\|_C\le\varepsilon.$$

Мувофиқи критерияи Коши нишон додани он кифоя аст, ки барои дилхоҳ $\varepsilon>0$ чунин адади $N(\varepsilon)>0$ ёфт мешавад, ки барои ҳамаи $n\ge N(\varepsilon)$ ва $p=1,2,\dots$ шарти

$$\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k(f)e^{ikx}\right|\le\varepsilon, \qquad (9)$$

иҷро мешавад. Дар ҳақиқат, аз наздикшавии мунтазами қатори (1) барои $\varepsilon>0$ додашуда, чунин ададҳои $M_1(\varepsilon)>0$ ва $N_1(\varepsilon)>0$ ёфт мешаванд, ки барои дилхоҳ номерҳои $m\ge M_1(\varepsilon)$ ва $n\ge N_1(\varepsilon)$ иҷрошавии нобаробарии

$$\left\|f-S_{-m,n}f\right\|_C\le\frac{\varepsilon}{2},$$

ҳосил мешавад. Аз ин ҷо барои ҳамаи ададҳои $p=1,2,\dots$ ба нобаробарии

$$\left\|f-S_{-m,n+p}f\right\|_C\le\frac{\varepsilon}{2}$$

доро мешавем. Азбаски

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(f)e^{ikx} = \sum_{k=-m}^{n+p} c_k(f)e^{ikx} - \sum_{k=-m}^{n} c_k(f)e^{ikx},$$

мебошад, пас

$$\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(f)e^{ikx}\right| = \max_{0\le x\le 2\pi}\left|\sum_{k=-m}^{n+p} c_k(f)e^{ikx} - \sum_{k=-m}^{n} c_k(f)e^{ikx}\right| =$$

$$= \max_{0\le x\le 2\pi}\left|\sum_{k=-m}^{n+p} c_k(f)e^{ikx} - f(x) - \sum_{k=-m}^{n} c_k(f)e^{ikx} + f(x)\right| \le$$

$$\le \max_{0\le xt\le 2\pi}\left|\sum_{k=-m}^{n+p} c_k(f)e^{ikx} - f(x)\right| + \max_{0\le xt\le 2\pi}\left|\sum_{k=-m}^{n} c_k(f)e^{ikt} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

мешавад. Нобаробарии (9) исбот шуд. Аз мунтазам наздикшавии буридаи рости (5) бефосилагии ҳудуди онро ҳосил мекунем. Ин ҳудудро бо $f^{(+)}(x)$ ишора карда, ба мутааллиқии $f^{(+)} \in C[0, 2\pi]$ соҳиб мешавем. Баробарии (7) исбот шуд.

Азбаски қатори (1) ва буридаи рости (5) мунтазам наздикшаванда мебошанд, пас фарқи онҳо $(Sf)(x) - \left(S_{1,+\infty} f\right)(x)$ низ қатори мунтазам наздикшаванда мешавад. Аз тарафи дигар, ин фарқро чунин навиштан мумкин аст:

$$(Sf)(x) - \left(S_{1,+\infty} f\right)(x) = \left(S_{-\infty,-1} f\right)(x) + c_0(f).$$

Ин баробарӣ нишон медиҳад, ки ин фарқ ва буридаи чап бо ҷамъшавандаи доимӣ аз якдигар фарқ дорад. Пас буридаи чап (6) низ қатори мунтазам наздикшаванда буда, ҳудуди он функсияи бефосила мебошад. Ин ҳудудро бо $f^{(-)}(x)$ ишора мекунем. Баробарии (8) исбот шуд.

Теоремаи 1 исбот шуд.

Қайд менамоем, ки дурустии тасдиқоти чаппаи теоремаи 1 аён аст: агар буридаҳои $\left(S_{1,+\infty} f\right)(x)$ ва $\left(S_{-\infty,-1} f\right)(x)$ қаторҳои мунтазам наздикшаванда бошанд, он гоҳ қатори (1) низ мунтазам наздикшаванда мешавад.

Маҷмуи ҳамаи функсияҳои бефосилаи комплексиқимати 2π-даврии аргументаш ҳақиқии $f(x)$, ки қатори Фурйеи онҳо дар порчаи $[0, 2\pi]$ ба худи ҳамин функсия мунтазам наздик мешаванд, бо рамзи $E[0, 2\pi]$, ё кӯтоҳтар бо E ишора менамоем.

Теоремаи 2. *Маҷмуи* E *бо амалҳои маъмулии ҷамъи функсияҳо ва зарби функсияҳо ба адад фазои хаттӣ ва бо нормаи*

$$\|f\|_E = \sup_{m,\,n>0}\left\|S_{-m,\,n} f\right\|_C \qquad (10)$$

фазои пурраи нормиронидашударо ташкил медиҳад.

Исбот. Бигузор $f(x)$ ва $g(x)$ функсияҳои ихтиёрӣ аз маҷмуи E бошанд. Он гоҳ қатори Фурйеи ин функсияҳо дар порчаи $[0, 2\pi]$ ба худи ҳамин функсияҳо мунтазам наздик мешаванд. Ҳангоми қатори мунтазам наздикшавандаро ба адади доимӣ зарб намудан боз қатори мунтазам наздикшаванда ҳосил мешавад. Бинобар ин барои ададҳои ихтиёрии α ва β функсияҳои $\alpha f(x)$ ва $\beta g(x)$ ба маҷмуи E тааллуқ доранд. Инчунин, суммаи ду қатори мунтазам наздикшаванда боз қатори мунтазам наздикшаванда мешавад. Бинобар ин суммаи функсияҳои $\alpha f(x)$ ва $\beta g(x)$ ба маҷмуи E тааллуқ дорад, яъне $\alpha f(x)+\beta g(x)\in E$. Дурустии ҳамаи ҳашт аксиомаҳои фазои хаттӣ ба осонӣ санҷида мешаванд. Хаттӣ будани маҷмуи E исбот шуд.

Барои нормаи дохилнамудаи (10) иҷрошавии аксиомаҳои норма бевосита санҷида мешаванд.

Нишон медиҳем, ки нормаи тавассути баробарии (10) муайяншуда дар фазои E, нисбат ба нормаи фазои $C[0, 2\pi]$ зӯртар мебошад, яъне барои дилхоҳ функсияи $f\in E$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\|f\|_C\le\|f\|_E. \tag{11}$$

Дар ҳақиқат, бигузор $f\in E$ функсияи ихтиёрӣ бошад. Азбаски қатори Фурйе (1)-и функсияи $f(x)$ дар порчаи $[0, 2\pi]$ ба худи ҳамин функсия мунтазам наздик мешавад, пас барои бақияи он

$$f(x)-\left(S_{-m,n}f\right)(x)=\sum_{k=-\infty}^{-m-1}c_k(f)e^{ikx}+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}$$

баробарии (2) ҷой дорад.

Барои номерҳои ихтиёрии $m, n\ge 0$ нобаробарии

$$\left|\left(S_{-m,n}\right)f(x)\right|\ge|f(x)|-\left|f(x)-\left(S_{-m,n}f\right)(x)\right| \tag{12}$$

дуруст мебошад. Дар порчаи $[0, 2\pi]$ қимати калонтарини тарафҳои чапу рости нобаробарии (12)-ро ҳисоб мекунем:

$$\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\left(S_{-m,n}\right)f(x)\right|\ge\max_{0\le x\le 2\pi}\left(|f(x)|-\left|f(x)-\left(S_{-m,n}\right)(x)\right|\right)\ge$$

$$\ge\max_{0\le x\le 2\pi}|f(x)|-\max_{0\le x\le 2\pi}\left|f(x)-\left(S_{-m,n}\right)(x)\right|. \tag{13}$$

Азбаски

$$\max_{0\le x\le 2\pi}|f(x)|=\|f\|_C, \tag{14}$$

$$\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\left(S_{-m,n}\right)f(x)\right|\le\sup_{m,n>0}\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\left(S_{-m,n}\right)f(x)\right|=\|f\|_E \tag{15}$$

мебошанд, он гоҳ дар нобаробарии (13) бо дарназардошти навиштаҳои (14) ва (15), ҳосил мекунем

$$\|f\|_E\ge\|f\|_C-\max_{0\le x\le 2\pi}\left|f(x)-\left(S_{-m,n}\right)(x)\right|. \tag{16}$$

Нобаробарии (16) барои ҳамаи қиматҳои $m, n\ge 0$ дуруст мебошад. Дар ин нобаробари ҳангоми $m\to\infty$ ва $n\to\infty$ ба ҳудуд мегузарем ва ба дурустии нобаробарии (11) соҳиб мешавем.

Пурра будани фазои E-ро нишон медиҳем. Барои ин исбот кардан лозим аст, ки дилхоҳ пайдарпаии фундаменталии $\{f_l\}$ аз E дар ин фазо ҳудуд дорад.

Аз фундаменталӣ будани пайдарпаии $\{f_l\}$ бармеояд, ки барои ҳамаи ададҳои $p\ge 1$ шарти зерин иҷро мешавад

$$\lim_{l\to\infty}\left\| f_{l+p} - f_l \right\|_E = 0 \qquad (17)$$

Аз ин ҷо ва аз нобаробарии (11), баробарии

$$\lim_{l\to\infty}\left\| f_{l+p} - f_l \right\|_C = 0 \qquad (18)$$

ҳосил мешавад. Баробарии (18) аз он шаҳодат медихад, ки пайдарпаии $\{f_l\}$ дар фазои $C[0,\,2\pi]$ низ фундаменталӣ мебошад. Аз пурра будани фазои $C[0,\,2\pi]$ мавҷуд будани чунин функсия $f_0 \in C[0,\,2\pi]$ ҳосил мешавад, ки барои вай баробарии зайл ҷой дорад

$$\lim_{l\to\infty}\left\| f_0 - f_l \right\|_C = 0, \qquad (19)$$

яъне функсияи f_0 дар фазои $C[0,\,2\pi]$ ҳудуди пайдарпаии $\{f_l\}$ аст.

Нишон медиҳем, ки функсияи $f_0(x)$ мутааллиқи фазои E аст, яъне дурустии баробарии

$$\lim_{m,n\to+\infty}\left\| S_{-m,n} f_0 - f_0 \right\|_C = 0 \qquad (20)$$

-ро исбот мекунем.

Аз баробариҳои (17) ва (10) бармеояд, ки барои дилхоҳ бузургии $\varepsilon > 0$ чунин номери $l_0(\varepsilon) > 0$ ёфт мешавад, ки барои ҳамаи қиматҳои $l \ge l_0(\varepsilon)$ ва $p \ge 0$ нобаробарии зерин дуруст мебошад

$$\left\| f_{l+p} - f_l \right\|_E \equiv \sup_{m,n>0}\left\| S_{-m,n} f_{l+p} - S_{-m,n} f_l \right\|_C < \varepsilon.$$

Ҳамин тариқ барои ҳамаи $m \ge 1,\ n \ge 1$, $l \ge l_0(\varepsilon)$ ва $p \ge 0$ нобаробариҳои

$$\left\| f_{l+p} - f_l \right\|_C < \varepsilon \quad \text{ва} \quad \left\| S_{-m,n} f_{l+p} - S_{-m,n} f_l \right\|_C < \varepsilon$$

ҳосил мешаванд. Аз ин ҷо дар асоси баробарии (19) ва вобастагии бефосилаи $c_k(f)$ – коэффитсиентҳои Фурйеи функсияи f дар фазои $C[0,2\pi]$, барои дилхоҳ $m \ge 1,\ n \ge 1$, $l \ge l_0(\varepsilon)$, ҳангоми $p \to \infty$ ба ҳудуд мегузарем ва ба нобаробариҳои

$$\left\| f_0 - f_l \right\|_C \le \varepsilon, \qquad (21)$$

$$\left\| S_{-m,n} f_0 - S_{-m,n} f_l \right\|_C \le \varepsilon \qquad (22)$$

доро мешавем.

Таҳти аломати норма ҷамъшавандаҳои мувофиқро ҷамъ ва тарҳ намуда, дар асоси аксиомаи секунҷа нобаробарии

$$\left\| f_0 - S_{-m,n} f_0 \right\|_C \le \left\| f_0 - f_l \right\|_C + \left\| f_l - S_{-m,n} f_l \right\|_C + \left\| S_{-m,n} f_l - S_{-m,n} f_0 \right\|_C,$$

ҳосил мешавад. Бо дарназардошти нобаробариҳои (21) ва (22) барои ҳамаи $m \ge 1,\ n \ge 1$, $l \ge l_0(\varepsilon)$ ба нобаробарии

$$\left\| f_0 - S_{-m,n} f_0 \right\|_C \le 2\varepsilon + \left\| f_l - S_{-m,n} f_l \right\|_C$$

соҳиб мешавем. Дар ин нобаробарӣ барои қамати қайдкардашудаи $l \geq l_0(\varepsilon)$ ҳангоми $m \to \infty,\ n \to \infty$ ба ҳудуд мегузарем:

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| f_0 - S_{-m,n} f_0 \right\|_C \leq 2\varepsilon \quad (23)$$

Дар асоси ихтиёрӣ будани бузургии $\varepsilon > 0$ аз нобаробарии (23) дурустии баробарии (20) ҳосил мешавад.

Нишон дода шуд, ки функсияи f_0 ба фазои E тааллуқ дорад.

Аз (22) барои ҳамаи $l \geq l_0(\varepsilon)$ ба нобаробарии

$$\left\| f_0 - f_l \right\|_E \leq \varepsilon$$

доро мешавем. Ҳамин тариқ дурустии баробарии матлуб

$$\lim_{l\to\infty} \left\| f_l - f_0 \right\|_E = 0.$$

нишон дода шуд.

Теоремаи 2 исбот шуд.

АДАБИЁТ:

1. Кахан,Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье / Ж.-П. Кахан. – М.: Мир. 1976. -206 с.
2. Мухамадиев Э.М. Полнота пространства равномерно сходящихся рядов Фурье по несимметрическим частичным суммам / Э.М. Мухамадиев, С. Байзаев, М.А. Очилова // Вестник Вологодского государственного университета. – Вологда: ВоГТУ, 2019. С 45-49.
3. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х т. Т. 1 / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1985. -264 с.
4. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.Т.2/Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1970.-800 с.
5. Назимов, А.Б. Метод регуляризации сдвигом: Теория и приложения. Монография / А.Б. Назимов, Э.М.Мухамадиев, В.А. Морозов, М. Муллоджанов. – Вологда: ВоГТУ, 2012. -368 с.

REFERENCES:

1. Kahan J.-P. Absolutely convergent Fourier series / J.-P. Kahan. - M.: Mir. 1976. -206 p.
2. Mukhamadiev E.M. Completeness of the space of uniformly convergent Fourier series with respect to asymmetric partial sums / E.M. Mukhamadiev, S. Baizaev, M.A. Ochilova // Bulletin of the Vologda State University. - Vologda: VoGTU, 2019. P. 45-49.
3. Edwards, R. Fourier series in a modern presentation. In 2 volumes. Vol. 1 / R. Edwards. - M.: Mir, 1985. -264 p.
4. Fichtenholz, G.M. Course of differential and integral calculus. Vol. 2 / G.M. Fichtenholz. – M.: Nauka, 1970. 800 p.
5. Nazimov, A.B. Shift regularization method: Theory and applications. Monograph / A.B. Nazimov, E.M. Mukhamadiev, V.A. Morozov, M. Mullojanov. – Vologda: VoGTU, 2012. -368 p.