УДК 517.968.2

О НЁТЕРОВОСТИ И ИНДЕКСЕ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Олимджонов Сухроб Вахобджонович, *докторант Ph.D кафедры функционального анализа и дифференциального уравнения Национального университета Таджикистана. (Тоҷикистон, Душанбе)*

ДАР БОРАИ НЁТЕРӢ ВА ИНДЕКСИ БАЪЗЕ ОПЕРАТОРҲОИ ИНТЕГРАЛИИ ДУЧЕНАКАИ СИНГУЛЯРӢ

Олимҷонов Суҳроб Ваҳобҷонович, *докторанти Ph.D кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон (Тоҷикистон, Душанбе)*

ON THE NOETERNESS AND INDEX OF SOME TWO-DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

Olimjonov Suhrob Vahobjonovich, *Ph.D doctoral student of the Department of Functional Analysis and Differential Equations of the Tajik National University (Tajikistan, Dushanbe),*
E-mail: *nftka-2012@mail.ru*

Ключевые слова: *сингулярные интегральные операторы, символ оператора, нётеровость оператора, индекс оператора.*

В работе исследуется вопросы нётеровости и индекса одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с конформным сдвигом Карлемана. Пользуясь локальным принципом, уравнение с такими операторами сводятся к системе уравнений без сдвига.

Калидвожаҳо: *операторҳои интегралии сингулярӣ, символи оператор, оператори нётерӣ, индекси оператор.*

Дар мақола масъалаи нётерӣ ва индекси як синфи операторҳои интегралии сингулярии дученака бо тағирёбии конформии Карлеман тадқиқ карда мешавад. Бо истифода аз принсипи локалӣ, муодила бо чунин операторҳо ба системаи муодилаҳои бидуни гузариш оварда мешавад.

Keywords: *singular integral operators, symbol operator, Noetherian operator, operator index.*

The article dwells the issue of Noetherianity and the index of one class two-dimensional singular integral operators with conformal Carleman shift. Using the local principle, the equation with such operators are reduced to a system of equations without shift.

Как известно [1], простейшие двумерные сингулярные интегральные операторы играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций и построении гомеоморфизма системы Бельтрами, а более общие сингулярные интегральные операторы по ограниченной области (см. [2]) связаны с краевой задачей сопряжения для эллиптических систем уравнений первого порядка на плоскости. Однако теория разрешимости таких операторов до сих пор не построена. В настоящей заметке устанавливаются эффективные необходимые и достаточные условия нётеровость некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов указанного типа в лебеговом пространстве L^p с весом, и получены формулы для вычисления их индекса. При этом допускается, что коэффициенты при сингулярных интегралах имеют в точке $z=0$ существенный разрыв вида $(\frac{z}{|z|})^n$, где n - целое число.

Пусть D - конечная односвязанная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова и содержащая внутри точку $z=0$; $B(z,\zeta)$ - керн-функция Бергмана области D. В банаховом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$,

$$L^p_{\beta-2/p}(D)=\{f(z): |z|^{\beta-2/p}f(z)=F(z)\in L^p(D), \| f \|_{L^p_{\beta-2/p}}=\| F \|_{L^p}\},$$

где $1<p<\infty,\ 0<\beta<2$, рассмотрим операторы $K, S, B, \overline{S}, \overline{B}$ действующие по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (\bar{S}f)(z) = (KSKf)(z),$$

$$(Bf)(z) = \iint_D B(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta \quad \text{и} \quad (\overline{B}f)(z) = (KBKf)(z).$$

1°. В этом пункте методом факторизации **матрицы символа** изучается вопрос нётеровость и индекса оператора

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)S + d(z)\bar{S}K, \qquad (1)$$

в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$, где I - тождественный оператор; $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z),$ - непрерывные в $\overline{D} = DU\Gamma$ комплекснозначные функции, черта обозначает операцию комплексного сопряжения, $ds_\zeta -$ элемент плоской меры Лебега.

Символическая матрица имеет вид

$$\mathcal{G}(z,\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\bar{\sigma}/\sigma & b(z) + d(z)\sigma/\bar{\sigma} \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\bar{\sigma}/\sigma & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\sigma/\bar{\sigma}, \end{pmatrix}, \qquad z \in \overline{D},$$

где $\bar{\sigma}/\sigma$ - символ сингулярного интегрального оператора S, $(0 < |\sigma| < \infty,$ $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2)$.

Лемма 1. *Матрица - символ* $\mathcal{G}(z,\sigma)$ *невырожденна для всех* $z \in \overline{D}$ *и* $\forall\sigma\colon |\sigma| = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \qquad \forall z \in \overline{D}, \qquad (2)$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \qquad \forall z \in \overline{D}, \qquad (3)$$

причем (2) и (3) не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D},$ где

$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \ \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z)$$

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \ \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2.$$

Замечание. Имеет место тождество $|\mu(z)|^2 - |\lambda(z)|^2 = \Delta_1(z)\Delta_2(z).$

Рассмотрим следующие ограниченные в $L^p(D),\ 1 < p < \infty,$ операторы

$$T_1 = \overline{a(z)}I - b(z)K,\ T_2 = \overline{d(z)}I - c(z)K.$$

Из леммы следует, что при выполнении условий (2) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причем

$$A = T_1^{-1}A_1, \quad A_1 = \Delta_1(z)I + \lambda(z)S + \overline{\mu(z)}KS. \qquad (4)$$

В случае (5) оператор T_2 имеет непрерывный обратный

$$A = T_2^{-1}A_2, \quad A_2 = \mu(z)I + \lambda(z)K + \Delta_2(z)KS. \qquad (5)$$

Таким образом, исследование нётеровость и индекса оператора A сводится к соответствующему исследованию операторов A_1 и A_2. Из результатов Р. Дудучавы [6, стр. 199-214] следует, что для нётеровость операторов A_1 и A_2 необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие матрицы-символы $\mathcal{G}^{(1)}(\tau,t)$ и $\mathcal{G}^{(2)}(\tau,t)$ для $\forall\tau\in\Gamma, |t|=1$ факторизовались с нулевыми частными индексами.

В работе [8, стр. 171-172] доказано, что имеет место.

Теорема 1. *Для нётеровость оператора* A *(то есть оператор (1)) в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty,\ 0<\beta<2$ *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий*

$$|\Delta_1(z)|>|\lambda(z)|+|\mu(z)| \qquad \forall z\in\overline{D}, \tag{6}$$

$$|\Delta_2(z)|>|\lambda(z)|+|\mu(z)| \qquad \forall z\in\overline{D} \ \text{ и } \ \mu(\tau)\neq 0 \quad \forall\tau\in\Gamma. \tag{7}$$

При этом, если выполнено (6), то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении (7) его индекс $æ$ равен

$$æ=2Ind_{\Gamma}\mu(\tau).$$

Ниже предлагается новый подход к изучению оператора A из (1), а именно вместо факторизации символа матрицы $\mathcal{G}(z,\sigma)$ факторизуется сам оператор A из (1).

2°. **Метод факторизации сингулярного оператора.**

Рассматривая оператор A_2 из (5), введем оператор T_3A_2:

$$T_3A_2=(\mu-\beta q\overline{\lambda})I+(\lambda-\beta q\overline{\mu})K-\beta q\Delta_2S+\Delta_2\overline{S}K, \tag{8}$$

где $T_3=I-\beta(z)q(z)K,\ \beta(z)$ и $q(z)$ пока неизвестные функции такие, что $|\beta(z)|<1,\ |q(z)|<1$ для всех $z\in\overline{D}$. Функции β и q найдем из равенства

$$\begin{cases}\mu-\beta q\overline{\lambda}=\beta\Delta_2,\\ \lambda-\beta q\overline{\mu}=-q\Delta_2.\end{cases} \tag{9}$$

Равенства (9) можно переписать так

$$\begin{cases}\mu-\beta(\Delta_2+\overline{\lambda}q)=0,\\ \lambda+q\Delta_2-\beta q\overline{\mu}=0,\end{cases} \tag{10}$$

то есть вектор $\begin{pmatrix}1\\ \beta\end{pmatrix}$ является решением уравнения

$$\begin{pmatrix}\mu & \Delta_2+\overline{\lambda}t\\ \Delta_2+\lambda\overline{t} & \overline{\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \beta\end{pmatrix}=0, \text{ где } |t|=1, \tag{11}$$

для этого необходимо, чтобы детерминант матрицы равнялся нулю, то есть $t=q$ являлось решением тригонометрического уравнения

$$\overline{\lambda}t-(\Delta_1+\Delta_2)+\lambda\overline{t}=0,$$

а это есть корень уравнения матрица символа $\det\mathcal{G}(z,t)=0$ который лежит внутри единичного круга, т.е $|q(z)|<1$ для любых $z\in\overline{D}$. Поскольку однородная система (11) имеет бесконечное число решений, функцию $\beta(z)$ найдем из первого равенства (10): $\beta(z)=\frac{\mu(z)}{\Delta_2(z)+\overline{\lambda(z)}q(z)}$, где $|\beta(z)|<1$ для любых $z\in\overline{D}$.

Таким образом, оператор T_3A_2 эквивалентен оператору

$$\mathcal{A}_2=\beta\Delta_2I-q\Delta_2K-\beta q\Delta_2S+\Delta_2\overline{S}K\equiv\Delta_2\{\beta(1-qS)-qK+\overline{S}K\},$$

Теперь нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}_2$ факторизуется с точностью вполне непрерывного оператора в виде

$$\mathcal{A}_2 = (I - qS - \frac{q}{\beta}BK)(\beta I + \overline{S}K),$$

где первый оператор нётеров с индексом равным нулю, а второй оператор нётеров с индексом

$$æ = 2Ind_\Gamma \mu(\tau).$$

Рассмотрим теперь оператор A_1 из (4). Введя оператор $T_2 A_1$, где

$$T_2 = I - \beta_1 q_1 K, \quad |\beta_1| < 1, \quad |q_1| < 1,$$

имеем

$$T_2 A_1 = \Delta_1 I - \beta_1 q_1 K + (\lambda I - \mu \beta_1 q_1)S + (\overline{\mu} - \beta_1 q_1 \overline{\lambda})\overline{S}K.$$

Функции β_1 и q_1 найдем из равенства

$$\begin{cases} \overline{\mu} - \beta_1 q_1 \overline{\lambda} = \beta_1 \Delta_2, \\ \lambda - \beta_1 q_1 \overline{\mu} = -q_1 \Delta_2. \end{cases}$$

Из первого равенства находим, что

$$\beta_1 = \frac{\overline{\mu}}{\Delta_2 + q_1 \overline{\lambda}}.$$

Таким образом, оператор $T_2 A_1$ эквивалентен оператору

$$\mathcal{A}_1 = \Delta_1 (I - q\lambda_1 \beta_1 K + \beta_1 \overline{S}K - q_1 S \equiv \Delta_1 \{(1 - qS) - \beta_1 (q - \overline{S})K\}.$$

Теперь нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}_1$ факторизуется с точностью вполне непрерывного оператора в виде

$$\mathcal{A}_1 = (I - q_1 S - \frac{q_1}{\beta_1}BK)(I + \beta_1 \overline{S}K).$$

3°. Теперь рассмотрим шестикомпонентный интегральный оператор с методом факторизации **матрицы символа** изучается вопрос нётеровость и индекса оператора

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)S + d(z)\overline{S}K + e(z)\overline{S} + h(z)SK \qquad (12)$$

в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$, где I - тождественный оператор; $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z),\ e(z),\ h(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = DU\Gamma$ комплекснозначные функции.

Символическая матрица имеет вид

$$\mathcal{G}(z,t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_2(z,t) & \mathcal{Q}_2(z,t) \\ \overline{\mathcal{Q}_2(z,t)} & \overline{\mathcal{P}_2(z,t)} \end{pmatrix},$$

где $P_2(z,t) = a(z) + c(z)\overline{t} + e(z)t$, $Q_2(z,t) = b(z) + d(z)t + h(z)\overline{t}$, $|t| = 1$.

Запишем $\mathcal{P}_2(z,t)$ и $\mathcal{Q}_2(z,t)$ в виде

$$\mathcal{P}_2(z,t) = \frac{1}{t}P_2(z,t) \equiv \frac{1}{t}(c(z) + a(z)t + e(z)t^2),$$

$$\mathcal{Q}_2(z,t) = \frac{1}{t}Q_2(z,t) \equiv \frac{1}{t}(h(z) + b(z)t + d(z)t^2).$$

Будем считать, что квадратичный трехчлен $P_2(z,t)$ имеет внутри единичного круга два корня q_1, q_2. Эллиптичность системы (1) означает, что $\det\mathcal{G}(z,t) \neq 0$ для $\forall z \in \overline{D}$ и

$\forall t: |t| = 1.$ Без ограничения общности можно считать, что $\det\mathcal{G}(z,t) < 0.$ Пусть $|c(z)| > |d(z)|, \forall z \in \overline{D}.$ Тогда матрица

$$T = \begin{pmatrix} \overline{d(z)} & c(z) \\ \overline{c(z)} & d(z) \end{pmatrix}$$

обратим, причем $\det T > 0 \quad \forall z \in \overline{D}.$ Поэтому

$$detT\mathcal{G}(z,t) < 0$$

где

$$T\mathcal{G}(z,t) = \begin{pmatrix} \mu_0(z) + \lambda_2(z)t & \lambda_0(z) + \mu_2(z)\bar{t} + \Delta_2(z)t \\ \overline{\lambda_0(z)} + \overline{\mu_2(z)}t + \Delta_2(z)\bar{t} & \overline{\mu_0(z)} + \overline{\lambda_2(z)}t \end{pmatrix}$$

где введено обозначения

$$\Delta_0 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_1 = |d|^2 - |c|^2,\ \Delta_2 = |e|^2 - |h|^2,$$

$$\lambda_0 = \overline{d}b - \overline{a}c,\ \mu_0 = \overline{d}a - \overline{b}c,$$

$$\lambda_2 = \overline{d}e - \overline{h}c,\ \mu_2 = \overline{d}h - \overline{e}c$$

В соответствии с символической матрицей $T\mathcal{G}(z,t)$ оператор A можно переписать в виде

$$A_2 = T\mathcal{G}(z,t) = \mu_0 I + \lambda_2\overline{S} + \lambda_0 K + \mu_2 SK + \Delta_1\overline{S}K.$$

Отметим, что квадратный трехчлен $\mu_2(z) + \lambda_0(z)t + \Delta_1(z)t^2$ также имеет внутри круга $|t| = 1$ два корня. Введем обратимый оператор $T_{21} = I + \beta q_1 K,$ где q_1 – корень $\det\mathcal{G}(z,t) = 0,$ а β пока неизвестный параметр, такой, что $|\beta| < 1.$

Теорема 2. *Для нётеровость оператора* A *(то есть оператор (12)) в* $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий*

$$\Delta_1(z) > \chi(z) + (\chi^2(z) + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 + |\mu_3(z)|^2 - -|\lambda_3(z)|^2)^{1/2} \text{для} \quad \forall z \in \overline{D}; \tag{13}$$

$$\Delta_2(z) > \chi(z) + (\chi^2(z) + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 - |\mu_2(z)|^2 + +|\lambda_2(z)|^2)^{1/2} \text{для} \quad \forall z \in \overline{D}; \tag{14}$$

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t) + \Delta_2(t)\mu_1(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall t \in \Gamma;$$

$$\Delta_3(z) > \chi(z) + (\chi^2(z) + |\mu_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2 - |\mu_2(z)|^2 + +|\lambda_2(z)|^2)^{1/2} \text{для} \quad \forall z \in \overline{D}; \tag{15}$$

$$\lambda_2(t)\lambda_3(t) - \Delta_3(t)\mu_3(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall t \in \Gamma,$$

где соответственно

$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), & \text{если} \Delta_j(z) > 0, \\ m(z), & \text{если} \Delta_j < 0, j = 1,2,3. \end{cases}$$

При этом, если выполнено (13), то индекс оператора A равен нулю; если выполнено (14), то

$$æ = 2Ind_{\Gamma}(\lambda_1(t)\lambda_2(t) + \Delta_2(t)\mu_1(t)),$$

а если выполнено (15), то

$$æ = -2Ind_{\Gamma}(\lambda_2(t)\lambda_3(t) - \Delta_3(t)\mu_3(t)).$$

4°. **Метод факторизации шестикомпонентного сингулярного оператора.**

Рассмотрим оператор

$$T_{21}A_1 = (\mu_0 + \overline{\lambda}_0\beta q_1)I + (\lambda_0 + \overline{\mu}_0\beta q_1)K + (\lambda_2 + \beta q_1\overline{\mu}_2)\overline{S}) +$$

$$+(\mu_2 + \overline{\lambda}_2\beta q_1)SK + \beta q_1\Delta_1 S + \Delta_1\overline{S}K$$

По теореме Виетта находим

$$I: \quad -\beta\Delta_1(1 + q_1\overline{q}_2) = \mu_0 + \overline{\lambda}_0\beta q_1, \qquad (16)$$

$$K: \quad -\Delta_1(\overline{q}_1 + \overline{q}_2) = \overline{\lambda}_0 + \mu_0\overline{\beta}\overline{q}_1, \qquad (17)$$

$$\overline{S}: \quad \beta\Delta_1\overline{q}_2 = \lambda_2 + \overline{\mu}_2\beta q_1, \qquad (18)$$

$$SK: \quad \Delta_1 q_1 q_2 = \mu_2 + \overline{\lambda}_2\beta q_1. \qquad (19)$$

Умножая равенство (14) на $-\beta q_1$ и сложив с (13) получим

$$\beta = -\frac{\mu_0(1-|\beta|^2|q_1|^2)}{\Delta_1(1-|q_1|^2}, \qquad (20)$$

т.е. функция $\beta(z)$ пропорционален функцию μ_0. Умножая равенство (15) на q_1 и сложив с (13) получим

$$\beta = -\frac{\mu_0+\lambda_2 q_1}{\Delta_1+\overline{\lambda}_0 q_1+\overline{\mu}_2 q_1^2}. \qquad (21)$$

Переходя в (14) к комплексно-сопряженным значениям умножив ее на q_1 и сложив с равенством (16), получим

$$\beta(\overline{\lambda}_2 q_1 + \overline{\mu}_0 q_1^2) = -(\Delta_1 q_1^2 + \lambda_0 q_1 + \mu_2),$$

Поставив сюда значение β из (6), имеем

$$\frac{\mu_0+\lambda_2 q_1}{\Delta_1+\overline{\lambda}_0 q_1+\overline{\mu}_2 q_1^2}(\overline{\lambda}_2 q_1 + \overline{\mu}_0 q_1^2) - (\Delta_1 q_1^2 + \lambda_0 q_1 + \mu_2) = 0.$$

Поставив вместо q_1 значение t и поделив обе части на t^2 получим

$$(\mu_0 + \lambda_2 t)(\overline{\mu}_0 + \overline{\lambda}_2\overline{t}) = (\Delta_1 + \lambda_0\overline{t} + \mu_2\overline{t}^2)(\Delta_1 + \overline{\lambda}_0 t + \overline{\mu}_2 t^2)$$

Выполнив перемножение и поставив обратно вместо t значение q, получим

$$|\mu_0 + \lambda_2 q_1|^2 - |\Delta_1 + \overline{\lambda}_0 q_1 + \overline{\mu}_2 q_1^2|^2 = 0.$$

Это означает, что функция $q_1(z)$ удовлетворяет уравнению $\det\mathcal{G}(z,t) = 0.$ Таким образом оператор A_1T_{11} представляется в виде

$$A_1T_{11} = \beta[(1 + q_1\overline{q}_2)I - q_1 S - \overline{q}_2\overline{S}] - [(q_1 + q_2)K - q_1 q_2 SK - \overline{S}K]. \qquad (22)$$

Последнюю можно представить в виде

$$A_1T_{11} = (I - q_1S + \alpha BK)(\beta I + \overline{S}K)(I - \overline{q}_2\overline{S} + \gamma\overline{B}K), \quad (23)$$

где q_1, q_2 корни уравнение $\det\mathcal{G}(z,t) = 0$, такие, что $|q_1| < 1$, $|q_2| < 1$, β пропорционален функцию $\mu_0(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z)$, а функции $\alpha(z)$, $\gamma(z)$ конкретно определяются.

Таким образом, оператор A_1T_{11} эквивалентен оператору

$$A_3 = (I - q_1S + \alpha BK)(\beta I + \overline{S}K)(I - \overline{q}_2\overline{S} + \gamma\overline{B}K).$$

Теперь можно проверить, что оператор A_3 факторизуется с точностью вполне непрерывного оператора в виде

$$A_3 = (I - q_1S + \alpha BK)(\beta I + \overline{S}K)(I - \overline{q}_2\overline{S} + \gamma\overline{B}K),$$

где первый оператор нётеровость с индексом равным нулю, а второй оператор нётеровость с индексом

$$æ = 2Ind_\Gamma(\lambda_1(t)\lambda_2(t) + \Delta_2(t)\mu_1(t)),$$

а третий оператор нётеровость с индексом

$$æ = -2Ind_\Gamma(\lambda_2(t)\lambda_3(t) - \Delta_3(t)\mu_3(t)).$$

В дальнейшем будем применять такую методику, эффективную для многокомпонентных операторов, определим нётеровость и посчитаем индекс оператора через факторизации самого оператора.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Михлин,С.Г.Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения/С.Г. Михлин// –М.: Физматгиз, 1962.-254с.
2. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции /И.Н.Векуа//М.: Физматгиз, 1959.-672с.
3. Calderon, A. On the existense of certain singular integrals /A. Calderon, A. Zygmunda// Acta math. - 1952. - v.88. -number 1. - p.85-139.
4. Джангибеков,Г.Об одном двумерном сингулярном интегральном операторе с характеристикой разной четности /Г. Джангибеков.,М.Ч.Чоршанбиева// Вестник, ТНУ, Серия естественных наук. 2019. номер 2. - С40-43.
5. Duduchava,P. On multidimensional singular integral operators. I. The half-space case; II. The case of compact manifolds. J. of operator theory / P. Duduchava //
 - 1984. - T. II. - P. 44-76; 199-214.
6. Боярский, Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций /Б.В. Боярский// Дис.д-ра физ.мат.наук. М.1960.
7. Бойматов, К.Х. Об одном сингулярном интегральном операторе /К.Х. Бойматов, Г. Джангибеков// Успехи математических наук. - 1988. - Т.43. -вып. 8. -С.171-172.
8. Джангибеков, Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов / Г. Джангибеков // ДАН СССР. 1990, Т.314,5, С.1055–1059.
9. Calderon, A. On singular integrals/Calderon A., Zygmunda A.//American j. math. - 1956. - v.78. - p.289-309.
10. Джангибеков, Г. Об условиях нётеровость и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов /Г. Джангибеков // ДАН СССР. 1991, Т.319, 4, С.811–815.

REFERENCES:

1. Mikhlin S.G. Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations / S.G. Mikhlin // – Moscow: Fizmatgiz, 1962. 254 p.
2. Vekua I.N. Generalized Analytical Functions / I.N. Vekua // – Moscow: Fizmatgiz, 1959. 672 p.
3. Calderon A. On the Existence of Certain Singular Integrals / A. Calderon, A. Zygmund // Acta Math. - 1952. - v.88. - no. 1. - P. 85-139.
4. Dzhangibekov G. On a Two-Dimensional Singular Integral Operator with Different Parity Characteristics / G. Dzhangibekov, M.Ch. Chorshanbieva // Bulletin, TNU, Series of Natural Sciences. 2019. Issue 2. - P. 40-43.

5. Duduchava, P. On Multidimensional Singular Integral Operators. I. The Half-Space Case; II. The Case of Compact Manifolds. J. of Operator Theory / P. Duduchava // - 1984. - Vol. II. - P. 44-76; 199-214.
6. Boyarsky B.V. Studies on Elliptic Type Equations in the Plane and Boundary Value Problems in Function Theory / B.V. Boyarsky // PhD Thesis in Physics and Mathematics. Moscow, 1960.
7. Boymatov K.Kh. On a Singular Integral Operator / K.Kh. Boymatov, G. Dzhangibekov // Uspakhi Matematicheskikh Nauk. - 1988. - Vol. 43. - Issue 8. - P. 171-172.
8. Dzhangibekov G. On a Class of Two-Dimensional Singular Integral Operators / G. Dzhangibekov // Doklady AN SSSR. 1990, Vol. 314, Issue 5, P. 1055-1059.
9. Calderon,A.On Singular Integrals/A.Calderon,A.Zygmund//American J.-Math. - 1956. - v.78. - P. 289-309.
10. Dzhangibekov, G. On the Conditions of Nötherian Property and Index of Some Two-Dimensional Singular Integral Operators / G. Dzhangibekov // Doklady AN SSSR. 1991, Vol. 319, Issue 4, P. 811-815.