ТДУ 517.95

ДОИР БА ҲАЛҲОИ СИСТЕМАИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ЯК БО КОЭФФИТСИЕНТҲОИ СИНГУЛЯРӢ ДАР ҲАМВОРӢ

Воситова Дилором Абдурасуловна, *н.и.физ-мат, дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Муҳсинови МДТ «ДДХ ба номи акад. Б.Ғафуров» (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ПЛОСКОСТИ

Воситова Дилором Абдурасуловна, *к.физ.-мат.наук, доцент кафедры математического анализа имени профессора А. Мухсинова ГОУ «ХГУ им. акад. Б.Гафурова» (Таджикистан, Худжанд)*

ON SOLUTIONS OF A FIRST-ORDER ELLIPTIC SYSTEM WITH SINGULAR COEFFICIENTS ON A PLANE

Vositova Dilorom Abdurasulovna, *Candidate Of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis named after professor A.Mukhsinov, SEI «KhSU named after acad. B.Gafurov» (Tajikistan, Khujand),*
E–mail: *vositova.dilorom@mail.ru*

Калидвожаҳо: *муодилаҳои диференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, системаи эллиптикӣ, коэффитсиентҳои сингулярӣ, ҳалҳои регулярӣ, муодилаи Бессел.*

Дар мақола системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бо коэффитсиентҳои сингулярии

$$LU \equiv U_x + AU_y + (x^2+y^2)^{-m}BU = 0 \qquad (1)$$

-ро, ки дар он $U = U(x,y) -$ *вектор-функсияи номаълум,* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *B-матритсаи доимии тартиби ду ва* $m > 0$ *аст, дида баромада шудааст. Барои ин система масъалаи ёфтани ҳалҳои регулярӣ, яъне ҳалҳо аз синфи* $M = C^1(R^2\backslash\{0\}) \cap C(R^2)$, $(R^2 - \text{ҳамворӣ})$ *таҳқиқ карда шудааст.*

Дар ҳолати $1-2m \neq 0$ *ва қиматҳои хоси* $\lambda_j, j = 1,2$ *матритсаи B нимсода ва ғайринулӣ будан маҷмуи ҳалҳои системаи (1) чунин тасвир карда шудааст*

$$U = r^{-m}S\left[\sum_n \begin{pmatrix} w_n(r)e^{in\varphi} \\ \omega_n(r)e^{in\varphi} \end{pmatrix}\right].$$

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения с частными производными, эллиптическая система, сингулярные коэффициенты, регулярные решения, уравнение Бесселя.*

В статье рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами

$$\mathrm{LU \equiv U_x + AU_y + (x^2+y^2)^{-m}BU = 0} \qquad (1)$$

где $\mathrm{U = U(x,y)}$*- неизвестная вектор- функция,* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, B *-постоянная матрица второго порядка и* $\mathrm{m} > 0$ *. Для этой системы исследована задача нахождения регулярных решений, то есть решений класса* $\mathrm{M = C^1(R^2\backslash\{0\}) \cap C(R^2)}$, $(\mathrm{R^2} - \text{плоскость})$*).*

В случае $1-2\mathrm{m} \neq 0$ *и собственных значений* $\lambda_{\mathrm{j}}, \mathrm{j} = 1,2$ *матрицы B является полупростой и ненулевой, множество решений системы (1) описывается как*

$$\mathrm{U} = \mathrm{r^{-m}S}\left[\Sigma_{\mathrm{n}} \begin{pmatrix} \mathrm{w_n(r)e^{in\varphi}} \\ \omega_{\mathrm{n}}\mathrm{(r)e^{in\varphi}} \end{pmatrix}\right].$$

Keywords: *partial differential equations, elliptic system, singular coefficients, regular solutions, Bessel equation.*

The article discusses a system of partial differential equations with singular coefficients

$$\mathrm{LU \equiv U_x + AU_y + (x^2+y^2)^{-m}BU = 0} \qquad (1)$$

where $\mathrm{U = U(x,y)}$ *is an unknown vector function,* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, B *-is a constant a matrix of the second order and* $\mathrm{m} > 0$ *. For this system, the problem of finding regular solutions is investigated, that is, solutions of the class* $\mathrm{M = C^1(R^2\backslash\{0\}) \cap C(R^2)}$, $(\mathrm{R^2} - \text{ a plane})$*).*

In the case of $1-2\mathrm{m}\neq 0$ *and eigenvalues* $\lambda_j, j=1,2$ *of matrix B is semi simple and nonzero, the set of solutions of system (1) is described as*

$$U = r^{-m}S\left[\sum_n \begin{pmatrix} w_n(r)e^{in\varphi} \\ \omega_n(r)e^{in\varphi} \end{pmatrix}\right].$$

Дар бисёр масъалаҳои амалӣ, масалан, дар масъалаҳои геометрияи сатҳҳо, гидродинамика, муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ вомехӯранд, ки коэффитсиентҳои сингулярӣ (дар ягон нуқта, хат ё сатҳ ба беохир мубаддалшаванда) доранд. Таҳқиқи чунин муодилаҳо чӣ аз ҷиҳати назариявӣ ва чӣ аз ҷиҳати амалӣ мубрам ва аҳамиятнок аст. Муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии мухталиф бо коэффитсиентҳои сингулярӣ дар асарҳои илмии И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлов, Н. Раҷабов, З.Ҷ. Усмонов, шогирдон ва пайравони онҳо мавриди омӯзишу таҳқиқ қарор гирифтаанд (нигар, масалан ба [1; 4]).

Системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бо коэффитсиентҳои сингулярии

$$LU \equiv U_x + AU_y + (x^2+y^2)^{-m}BU = 0 \qquad (1)$$

-ро, ки дар он $U=U(x,y)$ – вектор-функсияи номаълум, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, B-матритсаи доимии тартиби ду ва $m>0$ аст, дида мебароем. Барои ин система масъалаи ёфтани ҳалҳои регулярӣ, яъне ҳалҳо аз синфи $M=C^1(R^2\backslash\{0\})\cap C(R^2)$, $(R^2-\text{ҳамворӣ})$-ро таҳқиқ мекунем. Масъалаи мазкур пештар таҳқиқ нашудааст. Системаи (1) барои ҳолатҳои хусусӣ дар шакли комплексӣ асосан дар соҳаи маҳдуди нуқтаи (0, 0)-ро дар баргиранда омӯхта шудааст (нигар, масалан ба [2; 5]).

Системаи (1) дар координатаҳои қутбии (r,φ) чунин навишта мешавад:

$$(E\cos\varphi + A\sin\varphi)U_r - \frac{1}{r}(E\sin\varphi - A\cos\varphi)U_\varphi + \frac{B}{r^{2m}}U = 0, \qquad (2)$$

E – матритсаи воҳидии тартиби ду.

Ҳалҳои системаро дар намуди

$$U = \sum_n U_n(r)e^{in\varphi}, \qquad (3)$$

$U_n(r)$ – вектор-функсияҳои номаълум, $n\in Z$, ҷустуҷӯ менамоем. Аз (2) ва (3) ҳосил мекунем:

$$\sum_n \Big\{\left[\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)E - i\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)A\right]U_n'(r) +$$
$$+\frac{in}{r}\left[i\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)E + \left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)A\right]U_n(r) +$$
$$+\frac{2}{r^{2m}}BU_n(r)\Big\}e^{in\varphi} = 0.$$

Ифодаро сода менамоем

$$\sum_n \Big\{\left[e^{i\varphi}(E-iA) + e^{-i\varphi}(E+iA)\right]U_n'(r) -$$
$$-\frac{n}{r}\left[e^{i\varphi}(E-iA) - e^{-i\varphi}(E+iA)\right]U_n(r) + \frac{2B}{r^{2m}}U_n(r)\Big\}e^{in\varphi} = 0.$$

Пас аз гурӯҳбандӣ ва ивази индекси суммаронӣ ба хулоса меоем, ки бояд баробариҳои зерин иҷро шаванд:

$$(E-iA)\left[U_{n-1}'(r) - \frac{n-1}{r}U_{n-1}(r)\right] +$$
$$+(E+iA)\left[U_{n+1}'(r) + \frac{n+1}{r}U_{n+1}(r)\right] + \frac{2B}{r^{2m}}U_n(r) = 0, \qquad n\in Z. \qquad (4)$$

Азбаски $A^2=-E$ аст, бинобар ин ҳарду тарафи баробарии (4)-ро бо навбат ба A ва i зарб намуда, баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$(A+iE)\left[U'_{n-1}-\frac{n-1}{r}U_{n-1}\right]+$$
$$+(A-iE)\left[U'_{n+1}+\frac{n+1}{r}U_{n+1}\right]+\frac{2}{r^{2m}}ABU_n=0, n\in Z, \quad (5)$$
$$(A+iE)\left[U'_{n-1}-\frac{n-1}{r}U_{n-1}\right]-$$
$$-(A-iE)\left[U'_{n+1}+\frac{n+1}{r}U_{n+1}\right]+\frac{2i}{r^{2m}}BU_n=0, \qquad n\in Z. \quad (6)$$

Баробариҳои (5) ва (6)-ро ҷамъ намуда ба $\frac{1}{2}$ зарб мезанем, дар натиҷа

$$(A+iE)\left[U'_{n-1}-\frac{n-1}{r}U_{n-1}+\frac{1}{r^{2m}}BU_n\right]=0, n\in Z \quad (7)$$

мешавад.

Аз баробарии (5) баробарии (6)-ро тарҳ намуда, ба $\frac{1}{2}$ зарб мезанем, дар натиҷа

$$(A-iE)\left[U'_{n+1}+\frac{n-1}{r}U_{n+1}+\frac{1}{r^{2m}}BU_n\right]=0, n\in Z \quad (8)$$

Матритсаҳои $A\pm iE$ дорои қимати хоси $\lambda=0$ ва мувофиқан векторҳои хоси

$V_+=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$; $V_-=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$

мебошанд. Аз ин сабаб аз баробариҳои (7) ва (8) бармеояд, ки

$$U'_{n-1}-\frac{n-1}{r}U_{n-1}+\frac{1}{r^{2m}}BU_n=c_{n-1}V_+, n\in Z, \quad (9)$$
$$U'_{n+1}+\frac{n+1}{r}U_{n+1}+\frac{1}{r^{2m}}BU_n=d_{n+1}V_-, n\in Z, \quad (10)$$

дар ин ҷо $c_n=c_n(r)$ ва $d_n=d_n(r)-$ функсияҳои скалярии ихтиёрии ҳақиқӣ.

Дар муодилаи (9) n-ро бо $n+1$ иваз менамоем

$$U'_n-\frac{n}{r}U_n+\frac{1}{r^{2m}}BU_{n+1}=c_nV_+, n\in Z. \quad (11)$$

Ба муодилаи дифференсиалии тартиби ду мегузарем. Барои ин муодилаи (11)-ро дифференсиронида ҳосил менамоем:

$$U''_n+\frac{n}{r^2}U_n-\frac{n}{r}U'_n-\frac{2m}{r^{2m+1}}BU_{n+1}+\frac{1}{r^{2m}}BU'_{n+1}=c'_nV_+.$$

Ба ин баробарӣ аз (10) ва (11) ифодаҳо барои BU_{n+1} ва U'_{n+1} -ро мегузорем:

$$U''_n+\frac{n}{r^2}U_n-\frac{n}{r}U'_n+\frac{2m}{r}\left(-c_nV_++U'_n-\frac{n}{r}U_n\right)+$$
$$+\frac{1}{r^{2m}}B\left(d_{n+1}V_--\frac{n+1}{r}U_{n+1}-\frac{1}{r^{2m}}BU_n\right)=c'_nV_+.$$

Дар ин ҷо боз аз баробарии (11) ифода барои BU_{n+1}-ро гузошта, пас аз гурӯҳбандӣ ба баробарии зерин соҳиб мешавем:

$$U''_n+\frac{2m+1}{r}U'_n-\frac{1}{r^2}\left[n(n+2m)E+\frac{1}{r^{4m-2}}B^2\right]U_n=$$
$$=\left(c'_n-\frac{2mc_n}{r}\right)V_+-\frac{d_{n+1}}{r^{2m}}BV_- \quad (12)$$

Матритсаи B-ро ба шакли жорданӣ [6] менависем:

$$B=S\Lambda S^{-1},$$

дар ин ҷо $\Lambda-$ матритсаи намуди $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ ё $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, λ_1,λ_2- қиматҳои хоси матритсаи B, сутунҳои матритсаи S аз векторҳои хос ва ҳамроҳшудаи матритсаи B иборатанд. Он гоҳ $B^2=S\Lambda^2S^{-1}$ мешавад ва баробарии (12) чунин намуд мегирад:

$$U''_n+\frac{2m+1}{r}U'_n-\frac{1}{r^2}\left[n(n+2m)E+\frac{1}{r^{4m-2}}S\Lambda^2S^{-1}\right]U_n=$$
$$=\left(c'_n-\frac{2mc_n}{r}\right)V_+-\frac{d_{n+1}}{r^{2m}}S\Lambda S^{-1}V_-, \qquad n\in Z. \quad (13)$$

Ишораҳои $V_n=S^{-1}U_n$ ва

$$\begin{pmatrix} f_n(r) \\ g_n(r) \end{pmatrix} = S^{-1}\left[r(rc_n' - 2mc_n)V_+ - \frac{d_{n+1}}{r^{2m-2}}S\Lambda S^{-1}V_-\right]$$

-ро дохил намуда, баробарии (13)-ро ба таври зайл навиштан мумкин аст:

$$r^2V_n'' + (2m+1)rV_n' - \left[n(n+2m)E + \frac{1}{r^{4m-2}}\Lambda^2\right]V_n = \begin{pmatrix} f_n(r) \\ g_n(r) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Компонентҳои вектор-функсияи V_n-ро бо w_n, ω_n ишора намуда, дар ҳолати нимсода [6] будани қиматҳои хоси матритсаи B (дар ин ҳолат матритсаи Λ диагоналӣ мешавад) аз баробарии (14) ҳосил мекунем:

$$r^2w_n'' + (2m+1)rw_n' - [n(n+2m) + \lambda_1^2 r^{2-4m}]w_n = f_n. \quad (15)$$

$$r^2\omega_n'' + (2m+1)r\omega_n' - [n(n+2m) + \lambda_2^2 r^{2-4m}]\omega_n = g_n. \quad (16)$$

Ин муодилаҳо аз ҳамдигар фақат бо коэффитсиенти назди r^{2-4m} ва тарафи рост фарқ мекунанд. Аз ҳамин сабаб, муодилаи (15)-ро ҳал намудан кифоя аст.

Гузоришҳои зеринро дохил менамоем:

$a = 2m+1; b = -\lambda_1^2; c = -n(n+2m), \qquad m' = 2-4m.$

Он гоҳ муодилаи (15) намуди зеринро мегирад:

$$r^2w_n'' + arw_n' + (br^{m'} + c)w_n = f_n. \quad (17)$$

Аввал муодилаи якҷинсаи мувофиқ

$$r^2w_n'' + arw_n' + (br^{m'} + c)w_n = 0 \quad (18)$$

-ро, ки он ба муодилаи Бессел монанд аст, ҳал менамоем. Якчанд ҳолатҳо имконпазир аст.

1. Ҳолати $m' \neq 0$, яъне $m \neq \frac{1}{2}$. Дар навбати худ чунин зерҳолатҳо имконпазир аст:

1.1. $\lambda_1 \neq 0$, он гоҳ ҳалли умумии муодилаи (18) намуди зеринро дорад (нигар ба [7], с. 401):

$$w_n = r^{\frac{1-a}{2}} Z_\nu\left(\frac{2}{m'}\sqrt{b}r^{\frac{m'}{2}}\right) = r^{-m} Z_\nu\left(\frac{1}{1-2m} i\lambda_1 r^{1-2m}\right), \quad (19)$$

дар ин ҷо Z_ν функсияи силиндрӣ буда, чунин тасвир мешавад:

$$Z_\nu = C_1 J_\nu + C_2 Y_\nu, \nu = \frac{m+n}{1-2m},$$

C_1, C_2 –доимиҳои ихтиёрӣ, J_ν ва Y_ν функсияҳои бесселии ҷинси як ва ду бо аргументи $\frac{1}{1-2m} i\lambda_1 r^{1-2m}$.

1.2. $\lambda_1 = 0$, он гоҳ ҳалли умумии муодилаи (18) намуди зеринро дорад:

$$w_n = \begin{cases} C_1 r^{\frac{n-m}{2}} + C_2 r^{\frac{n+2m}{2}}, & \text{ҳангоми } n \neq -m, \\ r^{-m}(C_1 + C_2 \ln r), & \text{ҳангоми } n = -m. \end{cases} \quad (20)$$

2. Ҳолати $m' = 0$, яъне $m = \frac{1}{2}$. Ин ҷо низ ду зерҳолат вуҷуд дорад:

2.1. $\lambda_1 \neq 0$, он гоҳ ҳалли муодилаи якҷинсаи (18) намуди зеринро мегирад

$$w_n = \begin{cases} C_1 r^{\frac{\mu-1}{2}} + C_2 r^{\frac{\mu+1}{2}} & \text{ҳангоми } \mu \neq 0, \\ r^{-1/2}(C_1 + C_2 \ln r) & \text{ҳангоми } \mu = 0, \end{cases} \quad (21)$$

дар ин ҳолат $\mu = \sqrt{(2n+1)^2 + 4\lambda_1^2}$.

2.2. $\lambda_1 = 0$, дар ин ҳолат $\mu = 2n+1 \neq 0 \ \ \forall n \in Z$ аст ва ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (18) бо формулаи

$$w_n = C_1 r^n + C_2 r^{-n-1} \quad (22)$$

дода мешавад.

Ҳамин тавр, мо ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (18)-ро ба пуррагӣ ёфтем, ки он вобаста ба параметрҳои муодила бо яке аз формулаҳои (19) – (22) муайян карда мешавад.

Ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (15)-ро бо усули вариатсияҳои доимӣ ҷустуҷӯ намудан мумкин аст. Ин амалро барои ҳолати $m \neq \frac{1}{2}, \lambda_1 \neq 0$ баён мекунем.

Дар ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (15), дар ҳолати муоинашаванда формулаи (19) C_1 ва C_2-ро функсияҳои тағйирёбандаи r қабул намуда $C_1 = C_1(r), C_2 = C_2(r)$ ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (15)-ро дар намуди

$$w_n = r^{-m}[C_1(r)J_\nu + C_2(r)Y_\nu] \quad (23)$$

ҷустуҷӯ менамоем. Хотиррасон мекунем, ки аргументи функсияҳои J_ν ва Y_ν ифодаи $\frac{1}{1-2m} i\lambda_1 r^{1-2m}$ мебошад.

Ҳосилаи w_n-ро меёбем:

$$w_n'(r) = (r^{-m}J_\nu)'C_1(r) + r^{-m}J_\nu C_1'(r) + (r^{-m}Y_\nu)'C_2(r) + r^{-m}Y_\nu C_2'(r).$$

Фарз мекунем, ки

$$J_\nu C_1'(r) + Y_\nu C_2'(r) = 0. \tag{24}$$

Он гоҳ

$$w_n'(r) = (r^{-m}J_\nu)'C_1(r) + (r^{-m}Y_\nu)'C_2(r)$$

ва

$$w_n''(r) = (r^{-m}J_\nu)''C_1(r) + (r^{-m}J_\nu)'C_1'(r) +$$
$$+(r^{-m}Y_\nu)''C_2(r) + (r^{-m}Y_\nu)'C_2'(r)$$

мешавад. Ифодаҳо барои $w_n(r)$, $w_n'(r)$ ва $w_n''(r)$ ба муодилаи (15) мегузорем:

$$r^2[(r^{-m}J_\nu)''C_1(r) + (r^{-m}J_\nu)'C_1'(r) + (r^{-m}Y_\nu)''C_2(r) + (r^{-m}Y_\nu)'C_2'(r)] +$$
$$+(2m+1)r[(r^{-m}J_\nu)'C_1(r) + (r^{-m}Y_\nu)'C_2(r)] -$$
$$-[n(n+2m) + \lambda_1^2 r^{2-4m}]r^{-m}[C_1(r)J_\nu + C_2(r)Y_\nu] = f_n(r).$$

Пас аз гурӯҳбандӣ ҳосил мекунем:

$$\{r^2(r^{-m}J_\nu)'' + (2m+1)r(r^{-m}J_\nu)' -$$
$$-[n(n+2m) + \lambda_1^2 r^{2-4m}](r^{-m}J_\nu)\}C_1(r) +$$
$$+\{r^2(r^{-m}Y_\nu)'' + (2m+1)r(r^{-m}Y_\nu)' -$$
$$-[n(n+2m) + \lambda_1^2 r^{2-4m}](r^{-m}Y_\nu)\}C_2(r) +$$
$$+r^2[(r^{-m}J_\nu)'C_1'(r) + (r^{-m}Y_\nu)'C_2'(r)] = f_n(r).$$

Дар ин баробарӣ ифодаҳои дар қавсайни калон буда ба сифр баробаранд, чунки функсияҳои $w = r^{-m}J_\nu$ ва $w = r^{-m}Y_\nu$ ҳалли муодилаи якҷинсаи мувофиқ мебошанд. Бинобар ин,

$$r^2[(r^{-m}J_\nu)'C_1'(r) + (r^{-m}Y_\nu)'C_2'(r)] = f_n(r) \tag{25}$$

мешавад.

Аз муодилаи (24) $C_1'(r)$-ро ёфта ба муодилаи (25) гузошта, $C_2'(r)$-ро меёбем:

$$C_1'(r) = -\frac{Y_\nu}{J_\nu}C_2'(r),$$

$$C_2'(r) = \frac{J_\nu f_n(r)}{r^2[(r^{-m}Y_\nu)'J_\nu - (r^{-m}J_\nu)'Y_\nu]}.$$

Аз формулаҳои маълуми [8, с. 222]

$$Y_\nu'(r) = \frac{\nu}{r}Y_\nu(r) - Y_{\nu+1}(r); \quad J_\nu'(r) = \frac{\nu}{r}J_\nu(r) - J_{\nu+1}(r)$$

ва

$$J_{\nu+1}(r)Y_\nu(r) - Y_{\nu+1}(r)J_\nu(r) = \frac{1}{\pi r}$$

истифода бурда ҳосил менамоем:

$$(r^{-m}Y_\nu)'J_\nu - (r^{-m}J_\nu)'Y_\nu =$$
$$= (-mr^{-m-1}Y_\nu + r^{-m}Y_\nu')J_\nu - (-mr^{-m-1}J_\nu + r^{-m}J_\nu')Y_\nu =$$
$$= r^{-m}\left[\left(\frac{\nu}{r}Y_\nu - Y_{\nu+1}\right)J_\nu - \left(\frac{\nu}{r}J_\nu - J_{\nu+1}\right)Y_\nu\right] =$$
$$= r^{-m}(J_{\nu+1}Y_\nu - Y_{\nu+1}J_\nu) = r^{-m-1}\cdot\frac{1}{\pi},$$

дар натиҷа

$$C_2'(r) = \pi r^{m-1}J_\nu f_n(r); \; C_1'(r) = -\pi r^{m-1}Y_\nu f_n(r)$$

мешавад. Ифодаҳои охиронро интегронида, ҳосил менамоем

$$C_1(r) = -\pi\int r^{m-1}Y_\nu f_n(r)dr + d_1\,; \; C_2(r) = \pi\int r^{m-1}J_\nu f_n(r)dr + d_2,$$

ки d_1, d_2-доимиҳо. Он гоҳ

$$w_n = r^{-m}\left[-\pi J_\nu\int r^{m-1}Y_\nu f_n(r)dr + d_1J_\nu + \pi Y_\nu\int r^{m-1}J_\nu f_n(r)dr + d_2Y_\nu\right] =$$

$$= \pi r^{-m}\left[Y_\nu \int r^{m-1} J_\nu f_n(r)dr - J_\nu \int r^{m-1} Y_\nu f_n(r)dr\right] + r^{-m}\left(d_1 J_\nu + d_2 Y_\nu\right)$$

мешавад.

Ҳамин тавр, дар ҳолати $1 - 2m \neq 0, \lambda_1 \neq 0$ ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (15) чунин намуд доштааст:

$$w_n(r) = r^{-m}\left(C_{1_n} J_\nu + C_{2_n} Y_\nu\right) +$$
$$+\pi r^{-m}\left[Y_\nu \int r^{m-1} J_\nu f_n(r)dr - J_\nu \int r^{m-1} Y_\nu f_n(r)dr\right], \qquad (26)$$

дар ин ҷо C_{1_n}, C_{2_n} –доимиҳои ихтиёрӣ, $\nu = \frac{m+n}{1-2m}$, функсияҳои бесселии J_ν ва Y_ν аз аргументи $\frac{i\lambda_1}{1-2m} r^{1-2m}$ вобастаанд.

Ҳолати $(1 - 2m)\lambda_1 = 0$-ро низ ҳамин тавр муоина намудан мумкин аст.

Айнан мисли боло, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (16) ёфта мешавад.

Тасдиқоти зерин дуруст аст.

Теорема. *Бигзор $1 - 2m \neq 0$ ва қиматҳои хоси $\lambda_j, j = 1, 2$ матритсаи B нимсода ва ғайринулӣ бошад. Дар ин ҳолат маҷмуи ҳалҳои системаи* (1) *чунин тасвир мешавад:*

$$U = r^{-m} S\left[\sum_n \begin{pmatrix} w_n(r)e^{in\varphi} \\ \omega_n(r)e^{in\varphi} \end{pmatrix}\right], \qquad (27)$$

дар ин ҷо сутунҳои матритсаи S аз векторҳои хоси ба қиматҳои хоси λ_j мувофиқ иборат буда, функсияҳои $w_n(r)$ ва $\omega_n(r)$ бо формулаҳои намуди (26) *муайян карда мешавад.*

Эзоҳ. 1. Формулаи (27) ҳалли шаклии системаи (1)-ро муайян мекунад, чунки доир ба наздикшавии қатори (27) ҳеҷ чиз нагуфтем.

2. Наздикшавии қатори (27) ва қаторҳои аз ҳосилаҳои тартиби як иборатро дар ягон соҳа бо интихоби доимиҳои ихтиёрии дар тасвири функсияҳои $w_n(r)$ ва $\omega_n(r)$ иштироккунанда, бо дар назардошти хосиятҳои функсияҳои бесселӣ нишон додан мумкин аст.

3. Формулаи (27) ҳангоми наздикшавии қаторҳои дар боло зикршуда ҳалҳои махсусият (қутб) доштаро низ дар бар мегирад. Барои ҳалҳои регулярӣ, яъне ҳалҳо аз синфи $M = C^1(R^2\backslash\{0\}) \cap C(R^2)$, ($R^2$ – ҳамворӣ) бояд шартҳои

$$w_n(0) = \omega_n(0) = 0 \; \forall n \neq 0$$

иҷро шаванд.

АДАБИЁТ:

1. Vekua I.N. On one of the elliptic systems with singularities [Text] / I.N. Vekua // Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics. Tokyo. 1969. – P. 142 – 147.
2. Михайлов, Л.Г. Об интегральных уравнениях с сингулярно-однородными ядрами [Текст] / Л.Г. Михайлов. - Душанбе, 2015 – 52 с.
3. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов – Душанбе: 1992. – 236 с.
4. Усманов,З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усманов.-Душанбе,1993. - 244 с.
5. Ахмедов, Р. К теории модельного уравнения специального вида [Текст] / Р. Ахмедов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. №3(156). Отделение физ.-мат. и хим. наук. 2014, С.42-47.
6. Гантмахер,Ф. Теория матриц [Текст] / Ф. Гантмахер. М.: Наука, 1989. -576 с.
7. Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камкэ. М.: Наука, 1971. -576 с.
8. Handbook of Mathematical Functions [Text] / Editor-in-Chief and Mathematics Editor: Frank W. J. Olver. NIST. 2010. U.S. Department of Commerce and Cambridge University Press. 967 p.

REFERENCES:

1. Vekua I.N. On one of the elliptic systems with singularities [Text] / I.N. Vekua // Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics. Tokyo. 1969. – P. 142-147.
2. Mikhailov L.G. On integral equations with singularly homogeneous kernels [Text] / L.G. Mikhailov. - Dushanbe, 2015 – 52 p.

3. Radjabov N. Introduction to the theory of partial differential equations with supersingular coefficients [Text] / N. Radjabov – Dushanbe: 1992. – 236 p.
4. Usmanov Z.D. Generalized Cauchy-Riemann systems with a singular point [Text] / Z.D. Usmanov. Dushanbe, 1993. - 244 p.
5. Akhmedov R. Towards the theory of a model equation of a special kind [Text] / R. Akhmedov // Proceedings of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, No. 3(156). Department of Physical and Mathematical Sciences and chemical sciences. 2014, p.42-47.
6. Gantmacher F. The theory of matrices [Text] / F. Gantmacher. Moscow: Nauka, 1989. -576 p.
7. Kamke E. Handbook of ordinary differential equations [Text] / E. Kamke. M.: Nauka, 1971. -576 p.
8. Handbook of Mathematical Functions [Text] / Editor-in-Chief and Mathematics Editor: Frank W. J. Olver. NIST. 2010. U.S. Department of Commerce and Cambridge University Press. 967 p.