УДК 004.934.2

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мухсинов Ёдгор Мирзоевич, *д.физ-мат.наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики;* ***Набиева Манзура Шокировна****, преподаватель кафедры высшей и прикладной математики ГОУ «ХГУ им. акад. Б.Гафурова» (Таджикистан, Худжанд)*

МАСЪАЛАИ ТАЪҚИБКУНӢ БАРОИ ЯК БОЗИИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ДАР ФАЗОИ БАНАХ

Муҳсинов Ёдгор Мирзоевич, *доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири ДДҲБСТ;* ***Набиева Манзура Шокировна,*** *омӯзгори кафедраи математикаи олӣ ва амалии МДТ «ДДХ ба номи акад. Б.Ғафуров» (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

PURSUIT PROBLEM FOR ONE DIFFERENTIAL GAME IN A BANACH SPACE

Mukhsinov Edgor Mirzoevich, *Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science, Tajik State University of Law, Business and Politics;* ***Nabieva Manzura Shokirovna,*** *Lecturer of the Department of Higher and Applied Mathematics, SEI «KhSU named after acad. B.Gafurov» (Tajikistan, Khujand),*

E-mail.ru: *manzura.nabieva.2014@mail.ru*

Ключевые слова: *задачи преследования, контрольный пример Понтрягина запаздывающего типа, банахово пространство.*

Различные задачи из военной сферы, физики, биологии и экономики, протекающие в условиях конфликта, сводятся к дифференциальным играм. В конечномерном пространстве в области теории дифференциальных игр фундаментальные работы выполнил академик Л.С. Понтрягин. В представленной работе в банаховом пространстве доказывается разрешимость задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина для контрольного примера запаздывающего типа.

Калидвожаҳо: *масъалаи таъқибкунӣ, мисоли контролии намуди дермонии Понтрягин, фазои Банах.*

Бисёре аз масъалаҳои гуногуни соҳаи ҳарбӣ, физика, биология ва иқтисодиёт, ки дар шароити мухолиф ба амал меоянд, ба бозиҳои дифференсиалӣ оварда мешаванд. Дар фазои охирченака дар соҳаи назарияи бозиҳои дифференсиалӣ корҳои фундаменталиро академик Л.С. Понтрягин иҷро намудааст. Дар кори мазкур дар фазои Банах ҳалшавандагии масъалаи таъқибкунӣ ба маънои Л.С. Понтрягин барои мисоли контролии намуди дермонӣ исбот карда шудааст.

Keywords*: pursuit Problem, Pontryagin test example of retarded type, Banach space.*

Many different problems from the military sphere, physics, biology and economics occurring in conflict conditions are reduced to differential games. In finite-dimensional space in the field of differential game theory, fundamental work was carried out by academician L.S. Pontryagin. In the presented work, the solvability of the pursuit problem in the sense of L.S. is proved in a Banach space. Pontryagin for a test example of retarded type.

В банаховом пространстве E рассматривается разрешимость задачи преследования $[1, \text{с}. 308]$ для управляемых объектов, когда динамика первого (преследующего) объекта описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} - k\dot{x}(t-h) = \bar{u}, \ \ \|\bar{u}\| \le c \qquad (1)$$

где $x = x(t) \epsilon E, \bar{u} = \bar{u}(t)$ -управления преследующего объекта, $k \ge 0, h \ge 0,$

$\alpha > 0$, а динамика второго (убегающего) объекта описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} - k\dot{y}(t-h) = \bar{v}, \quad \|\bar{v}\| \le d, \qquad (2)$$

где $y = y(t) \in E$, $\beta > 0$, $\bar{v} = \bar{v}(t)$-управления убегающего объекта. При этом игра считается законченной, если при некотором $T > 0$ имеет место равенство

$$x(T) = y(T) \qquad (3)$$

Положив $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = \dot{y}$ пару уравнений (1) и (2) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + k z_2(t-h) + \bar{u} \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 + k z_3(t-h) + \bar{v} \end{cases}$$

или в пространстве $E \times E \times E$

$$\dot{z} = Bz(t-h) + Az(t) - u + v \qquad (4)$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} I, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} I, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{u} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{v} \end{pmatrix}$, $I -$ единичный оператор, а терминальное множество, где заканчивается игра (3) имеет следующий вид: $M = \{z : z_1 = 0\}$.

Вначале докажем следующую лемму:

Лемма. Для дифференциального уравнения (4) фундаментальное решение $\Phi(t)$, для которого

$$\dot{\Phi}(t) = B\Phi(t-h) + A\Phi(t), \;\; \Phi(0) = I \;\;\; \Phi(t) = 0 \text{ при } t < 0 \quad (5)$$

имеет вид:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} & -\dfrac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \\ 0 & e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix} \cdot I$$

при $0 \le t \le h$,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} + \varphi_2(t,k,\alpha,n) & -\dfrac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} - \varphi_2(t,k,\beta,n) \\ 0 & e^{-\alpha t} + \varphi_1(t,k,\alpha,n) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} + \varphi_1(t,k,\beta,n) \end{pmatrix} \cdot I$$

при $nh \le t \le (n+1)h$, $n = 1,2,3, \ldots,$

где

$$\varphi_1(t,k,\alpha,n) = \sum_{m=1}^{n} k^m e^{-\alpha(t-mh)} \cdot \frac{(t-mh)^m}{m!},$$

$$\varphi_2(t,k,\alpha,n) = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^m \left(\frac{1 - e^{-\alpha(t-mh)}}{\alpha} - e^{-\alpha(t-mh)}(t-mh) \right)$$

Доказательство. 1) На отрезке $0 \le t \le h$ имеем (см (5)): $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$

Следовательно,

$$\Phi(t) = e^{tA}\Phi(0) = e^{tA} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots =$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}I+\begin{pmatrix}0&t&-t\\0&-\alpha t&0\\0&0&-\beta t\end{pmatrix}I+\begin{pmatrix}0&-\frac{\alpha t^2}{2!}&\frac{\beta t^2}{2!}\\0&\frac{\alpha^2t^2}{2!}&0\\0&0&\frac{\beta^2t^2}{2!}\end{pmatrix}I+\cdots=$$

$$=\begin{pmatrix}1&\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}&-\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\\0&e^{-\alpha t}&0\\0&0&e^{-\beta t}\end{pmatrix}$$

2) На отрезке $h \le t \le 2h$ имеем:

$\dot{\Phi}(t) = B\Phi(t-h) + A\Phi(t) = Be^{(t-h)A} + A\Phi(t).$

Следовательно [2, с.144],

$$\Phi(t) = e^{(t-h)A}\Phi(h) + \int_h^t e^{(t-s)A}Be^{(s-h)A}ds \qquad (6)$$

В силу того, что

$$e^{(t-s)A} = I + (t-s)A + \frac{[(t-s)A]^2}{2!} + \cdots = \begin{pmatrix}1&\frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha}&-\frac{1-e^{-\beta(t-s)}}{\beta}\\0&e^{-\alpha(t-s)}&0\\0&0&e^{-\beta(t-s)}\end{pmatrix}I,$$

$$e^{(t-s)A}Be^{(s-h)A} =$$

$$=\begin{pmatrix}1&\frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha}&-\frac{1-e^{-\beta(t-s)}}{\beta}\\0&e^{-\alpha(t-s)}&0\\0&0&e^{-\beta(t-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1&\frac{1-e^{-\alpha(s-h)}}{\alpha}&-\frac{1-e^{-\beta(s-h)}}{\beta}\\0&e^{-\alpha(s-h)}&0\\0&0&e^{-\beta(s-h)}\end{pmatrix}I=$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{k}{\alpha}\left(e^{-\alpha(s-h)}-e^{-\alpha(t-h)}\right)&-\frac{k}{\beta}\left(e^{-\beta(s-h)}-e^{-\beta(t-h)}\right)\\0&k\cdot e^{-\alpha(t-h)}&0\\0&0&k\cdot^{-\beta(t-h)}\end{pmatrix};$$

$$\int_h^t e^{(t-s)A}Be^{(s-h)A}ds =$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{k}{\alpha}\left(\frac{1-e^{-\alpha(t-h)}}{\alpha}-e^{-\alpha^{(t-h)}}(t-h)\right)&-\frac{k}{\beta}\left(\frac{1-e^{-\beta(t-h)}}{\beta}-e^{-\alpha^{(t-h)}}(t-h)\right)\\0&k\cdot e^{-\alpha(t-h)}(t-h)&0\\0&0&ke^{-\beta(t-h)}(t-h)\end{pmatrix}$$

и учитывая (6) имеем:

$\Phi(t) =$

$$=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}+\frac{k}{\alpha}\left(\frac{1-e^{-\alpha(t-h)}}{\alpha}-e^{-\alpha(t-h)}(t-h)\right) & -\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}-\frac{k}{\beta}\left(\frac{1-e^{-\beta(t-h)}}{\beta}-e^{-\beta(t-h)}(t-h)\right) \\ 0 & e^{-\alpha t}+ke^{-\alpha(t-h)}(t-h) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t}+ke^{-\beta(t-h)}(t-h) \end{pmatrix}$$

На отрезке $nh \le t \le (n+1)h, n = 1,2,3,\dots$ по индукции получим:

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}+\varphi_2(t,k,\alpha,n) & -\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}-\varphi_2(t,k,\beta,n) \\ 0 & e^{-\alpha t}+\varphi_1(t,k,\alpha,n) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t}+\varphi_1(t,k,\beta,n) \end{pmatrix}\cdot \mathrm{I}.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) Числа α,β,c,d и k такие, что при всех $t>0$

$$r(t)=\left[\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}+\varphi_2(t,k,\alpha,n)\right]c-\left[\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}+\varphi_2(t,k,\beta,n)\right]d>0.$$

2) При некотором $T>0$ имеет место включение

$$\pi\Phi(t)z_0+\int_{-h}^{0}\pi\Phi(T-s-h)Bz_0ds\epsilon\, S_{\rho(T)}, \qquad (7)$$

где $\pi: \mathrm{E}\times\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ −оператор ортогонального проектирования и $S_{\rho(T)}$ −шар радиуса $\rho(T)=\int_0^T r(T-s)ds$ с центром в точке 0.

Тогда в игре (4) из любого начального положения $z_0=\begin{pmatrix} z_{01}\\ z_{02}\\ z_{03}\end{pmatrix}$ возможно завершение преследования с оптимальным временем

$$T_0=min\left\{T:\left\|\pi\Phi(t)z_0+\int_{-h}^{0}\pi\Phi(T-s-h)Bz_0ds\right\|=\rho(T)\right\}.$$

Доказательство. В силу 1) при всех $t>0$ функция $r(t)>0$. Следовательно, функция $\rho(T)=\int_0^T r(T-s)ds$ по T возрастающая и $\rho(0)=0$.Поэтому для любого начального положения z_0 существует такое число $T\ge 0$, что имеет место включение (7). В силу того, что шар $S_{\rho(T)}$ замкнутое множество, то включение (7) имеет место и при $T=T_0$. Учитывая работу [1,с.313] шар $S_{\rho(T_0)}$ запишем в виде

$$S_{\rho(T_0)}=S_{\int_0^{T_0} r(T_0-s)ds}=\int_0^{T_0} S_{r(T_0-s)}ds \quad =$$

$$=\int_0^{T_0} S_{\left[\frac{1-e^{-\alpha(T_0-s)}}{\alpha}+\varphi_2(T_0-s,k,\alpha,n)\right]c-\left[\frac{1-e^{-\beta(T_0-s)}}{\beta}+\varphi_2(T_0-s,k,\beta,n)\right]d}ds=$$

$$=\int_0^{T_0}\left(S_{\left[\frac{1-e^{-\alpha(T_0-s)}}{\alpha}+\varphi_2(T_0-s,k,\propto,n)\right]c}\overset{*}{-}S_{\left[\frac{1-e^{-\beta(T_0-s)}}{\beta}+\varphi_2(T_0-s,k,\beta,n)\right]d}\right)ds=$$

$$=\int_0^{T_0}\left(\pi\Phi(T_0-s)Y\overset{*}{-}\pi\Phi(T_0-s)Z\right)ds, \qquad (8)$$

где $\pi\Phi(T_0-s)Y\overset{*}{-}\pi\Phi(T_0-s)Z=\left\{w: w+\pi\Phi(T_0-s)Z\subset\pi\Phi(T_0-s)Y\right\}-$

- геометрическая разность множества

$\pi\Phi(T_0-s)Y=S_{\left[\frac{1-e^{-\alpha(T_0-s)}}{\alpha}+\varphi_2(T_0-s,k,\propto,n)\right]c}$

и

$$\pi\Phi(T_0-s)Z=S_{\left[\frac{1-e^{-\beta(T_0-s)}}{\beta}+\varphi_2(T_0-s,k,\beta,n)\right]d},$$

$$Y=\left\{u=\begin{pmatrix}0\\-\bar{u}\\0\end{pmatrix}:\left|\left|\bar{u}\right|\right|\le c\right\} \text{ и } Z=\left\{v=\begin{pmatrix}0\\0\\\bar{v}\end{pmatrix}:\left|\left|\bar{v}\right|\right|\le d\right\}.$$

В силу (7) и (8) существует такое отображение

$$w(s)\epsilon\pi\Phi(T_0-s)Y\overset{*}{-}\pi\Phi(T_0-s)Z, \qquad (9)$$

что имеет место равенство

$$\pi\Phi(T_0)z_0+\int_{-h}^{0}\pi\Phi(T_0-s-h)Bz_0ds=\int_0^{T_0}w(s)ds \qquad (10)$$

Допустим, что $v=v(s)$- произвольное допустимое измеримое управления убегания. Тогда в силу (9) имеем следующее включение

$$w(s)+\pi\Phi(T_0-s)v(s)\epsilon\pi\Phi(T_0-s)Y \qquad (11)$$

В силу леммы 2 [3,с.67] из включения (11) следует существовании измеримого управления преследования $u=u(s)$ такое, что имеет место равенство

$$w(s)+\pi\Phi(T_0-s)v(s)=\pi\Phi(T_0-s)u(s) \qquad (12)$$

Учитывая равенства (10) и (12) для решения задачи (4) с начальным положением $z(t)=z_0,\ -h\le t\le 0$ получим [4, с.268]

$$\pi z(T_0)=\pi\Phi(T_0)z_0+$$

$$+\int_{-h}^{0}\pi\Phi(T_0-s-h)Bz_0ds+\int_0^{T_0}\pi\Phi(T_0-s)(-u(s)+v(s))ds==\int_0^{T_0}w(s)ds-\int_0^{T_0}w(s)ds=0.$$

Это равенство означает, что $z(T_0)\epsilon M$.

Значит, в игре (4) из любого начального положения z_0 возможно завершение преследования за время T_0. Оптимальность времени преследования T_0 следует из работы [5,с.143].Теорема доказана.

Замечание. Легко видно, что когда $E=R^n$ и $k=0$ из доказанной теоремы следует конечномерный результат Понтрягина [1, с.328].

ЛИТЕРАТУРА:

1.Понтрягин,Л.С.Линейные дифференциальные игры преследования/Л.С.Потрягин.-Математический сборник.-1980.- т.112 (154), №3, с. 307-331.

2.Картан,А.Дифференциальные исчисление. Дифференциальные формы/А.Картан.-М.:Мир,1971, с. 392

3.Мухсинов, Е.М. О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа. - Дифференциальные уравнения и процессы управления.2022,№2,с.66-82.

4.Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations in a Banach Space. - Journol of differential equations.1977, №25. P. 258-274.

5.Мухсинов, Е.М.Разрешимость задач преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве/Е.М.Мухсинов//Дифференциальные уравнения. 2023, т.59, №1, с142-146.

REFERENCES:

1. Pontryagin L.S. Linear differential pursuit games. - Mathematical collection. 1980. v. 112 (154), no. 3, p.307-331.
2. Cartan, A. Differential calculus. Differential forms.-M.: Mir, 1971, p.-392
3. Mukhsinov, E.M. On the pursuit problem for a quasilinear differential game of neutral type. - Differential equations and control processes. 2022, No. 2, p. 66-82.
4. Datko, R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations in a Banach Space. - Journol of differential equations.1977, №25. P. 258-274.
5. Mukhsinov, E.M. Solvability of pursuit problems for one differential game in a Banach space. - Differential equations. 2023, v. 59, no. 1, pp. 142-146.