*УДК 517.946*

**О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА**

***Байзаев Саттор,*** *д.ф.-м.н., профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,* ***Садиков Маъруфжон Обидович,*** *д.ф.(Phd), Международный институт Худжанда (Таджикистан, Худжанд)*

**ДОИР БА НОРМАЛӢ ҲАЛШАВАНДАГИИ СИСТЕМАҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ДУ ДАР ФАЗОҲОИ ГЁЛДЕР**

***Байзоев Саттор,*** *д.ф.м.н., проф., кафедраи фанҳои риёзӣ-табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон;* ***Содиқов Маъруфҷон Обидович,*** *д.ф.Phd, Донишкадаи байналмилали Хуҷанд. (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

**NORMAL SOLVABILITY OF ELLIPTIC SYSTEMS SECOND ORDER IN HÖLDER SPACES**

***Bayzaev Sattor,*** *Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science, Tajik State University of Law, Business and Politics;* ***Sadikov Marufzhon Obidovich,*** *Ph.D. of International Institute Khujand(Tajikistan, Khujand)* ***E-mail:*** sodikov-8686@list.ru

***Ключевые слова:*** *система уравнений с частными производными второго порядка, бианалитические функции, метааналитические функции, нормальная разрешимость, пространства Шварца, пространства Гёльдера.*

*В статье рассматривается система уравнений с частными производными второго порядка вида*

$$Lw \equiv A(z)w_{\bar{z}\bar{z}} + B(z)w_{\bar{z}z} + C(z)w_{zz} + a(z)w_{\bar{z}} +$$

$$b(z)w_z + c(z)w + d(z)\bar{w} = 0. \qquad (1)$$

*По аналогии с тем, что для системы уравнений Бицадзе задача Дирихле не является нётеровой, для систем вида (1) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости решениях может быть не нётеровой. Этот факт указывает на то, что исследование систем вида (1) в пространствах функций, определенных на всей комплексной плоскости является актуальной. Система (1) изучается в гёльдеровом пространстве* $C_\alpha^2$ *функций, определенных и ограниченных на всей комплексной плоскости и равномерно непрерывных по Гёльдеру вместе со всеми частными производными первого и второго порядков. Получены необходимые и достаточные условия n-нормальности, т.е. нормальной разрешимости с конечномерным ядром оператора* $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$*. Эти условия состоят в том что все так называемые предельные операторы, коэффициенты которых строятся как пределы сдвигов вида* $A(z+h_n)$*,…, (*$h_n \to \infty$*), имеют нулевое ядро. В случае, когда коэффициенты оператора* $L$ *являются слабо осциллирующими на бесконечности, достаточные условия n-нормальности оператора* $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *с конечномерным ядром выписаны непосредственно через его коэффициенты.*

***Калидвожаҳо:*** *системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии тартиби ду, функсияҳои бианалитикӣ, функсияҳои метааналитикӣ, нормалӣ ҳалшавандагӣ, фазои Швартс, фазои Гёлдер.*

*Дар мақола системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюми намуди зерин дида баромада шудааст:*

$$Lw \equiv A(z)w_{\bar{z}\bar{z}} + B(z)w_{\bar{z}z} + C(z)w_{zz} + a(z)w_{\bar{z}} +$$

$$b(z)w_z + c(z)w + d(z)\overline{w} = 0. \qquad (1)$$

*Ба монанди он, ки барои системаи муодилаҳои Битсадзе масъалаи Дирехле нётерӣ намебошад, барои системаҳои намуди (1) масъала доир ба ҳалҳои дар тамоми ҳамвории комплексӣ маҳдуд низ нётерӣ нашуданаш мумкин аст. Ин далели он аст, ки таҳқиқи системаи намуди (1) дар фазоҳои функсияҳои дар тамоми ҳамвории комплексӣ муайян мубарам мебошад. Системаи (1) дар фазоҳои гёлдерии* $C_\alpha^2$ *функсияҳои дар тамоми ҳамвории комплексӣ муайяну маҳдуд ва бо ҳамроҳии ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду мунтазам ба таври гёлдерӣ бефосила дида баромада шудааст. Барои оператори* $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *шартҳои зарурӣ ва кифоягии n-нормалӣ будан, яъне нормалӣ ҳалшавандагӣ будан ва ядрои охирченак доштан, ҳосил карда шудааст. Ин шартҳо аз он иборат аст, ки ядрои операторҳои бо ном ҳудудии коэффитсиентҳояшон ҳамчун ҳудуди пайдарпаиҳои функсионалии намуди* $A(z+h_n)$*,..., (*$h_n \to \infty$*) дошта нулӣ бошад. Дар ҳолати лаппиши коэффитсиентҳои оператори* $L$ *дар беохирӣ суст будан, шартҳои кифоягии n-нормалӣ будани ин оператор бевосита аз рӯи коэффитисиентҳояш ҳосил карда шудааст.*

***Keywords:*** *system of partial differential equations second order, bianalytic functions, metaanalytic functions, normal solvability, Schwartz and Hölder spaces.*

*The article considers a system of partial differential equations second order*

$$Lw \equiv A(z)w_{\bar{z}\bar{z}} + B(z)w_{\bar{z}z} + C(z)w_{zz} + a(z)w_{\bar{z}} +$$

$$b(z)w_z + c(z)w + d(z)\overline{w} = 0. \qquad (1)$$

*By analogy with the fact that for the Bitsadze system of equations the Dirichlet problem is not Noetherian, for systems of the form (1) the problem of solutions bounded on the entire complex plane may not be Noetherian.*

*System (1) is considered in Hölder spaces* $C_\alpha^2$ *of functions defined on the entire complex plane. Necessary and sufficient conditions for normal solvability with a finite-dimensional kernel of an operator* $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *are obtained. These conditions are that all so-called limit operators, the coefficients of which are constructed as limits of shifts of the form* $A(z+h_n)$*,..., (*$h_n \to \infty$*), have a zero kernel. In the case when the coefficients of the operator* $L$ *are weakly oscillating at infinity, sufficient conditions for the n-normality of an operator* $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *with a finite-dimensional kernel are written directly in terms of its coefficients*

Рассмотрим систему уравнений с частными производными второго порядка вида

$$Lw \equiv A(z)w_{\bar{z}\bar{z}} + B(z)w_{\bar{z}z} + C(z)w_{zz} + a(z)w_{\bar{z}} +$$

$$b(z)w_z + c(z)w + d(z)\overline{w} = 0, \qquad (1)$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, коэффициенты – комплекснозначные функции, заданные на комплексной плоскости $C$. Будем предполагать, что система (1) является равномерно эллиптической, т.е. найдется такое положительное число $\delta$, что выполняется условие

$|A(z)\zeta^2 + B(z)\zeta\bar{\zeta} + C(z)\bar{\zeta}^2| \geq \delta|\zeta|^2 \ \forall z \in C.$

Это условие равносильно следующему неравенству

$$\left|A(z)e^{2i\varphi} + B(z)e^{i\varphi} + C(z)\right| \geq \delta \ \ \forall \varphi \in [0, 2\pi], z \in C. \qquad (2)$$

При $A = 1, B = C = a = b = c = d = 0$ получаем уравнение бианалитических функций (систему уравнений Бицадзе) ([1 – 3]), для которой задача Дирихле не является нётеровой. Как показано в [4], для систем вида (1) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости решениях может быть не нётеровой. В случае постоянных коэффициентов система (1) превращается в уравнение метааналитических функций, теория которого имеется в [5].

Исследование вопросов разрешимости систем уравнений с частными производными в пространствах функций, определенных во всей плоскости, в том числе в пространствах периодических и двоякопериодических функций является актуальным. Такие вопросы изучены в ряде работ (см., напр. [6 – 9]).

В статье системы вида (1) изучены в различных функциональных пространствах.

## 1. Системы с постоянными коэффициентами

Предположим, что в системе (1) все коэффициенты являются постоянными. Как мы увидим в следующем пункте, условие отсутствия ненулевых решений так называемых предельных систем вида (1) с постоянными коэффициентами в гёльдеровом пространстве $C_\alpha^2$ (по поводу таких пространств см. [10]) является критерием $n$-нормальности (см. [11], стр. 107) оператора $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$. Нормы пространств $C_\alpha$ и $C_\alpha^2$ обозначаются через $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_{\alpha,2}$ соответственно.

Систему (1) будем изучать в более широком пространстве, чем $C_\alpha^2$, а именно, в пространстве умеренно растущих распределений $S'$ [12], стр. 90.

В системе (1) произведем преобразование Фурье и с учетом свойств этого преобразования получим функциональное уравнение

$$(-A\zeta^2 - B|\zeta|^2 - C\bar{\zeta}^2 + 2ia\zeta + 2ib\bar{\zeta} + 4c)\hat{w}(\zeta) + 4d\hat{\bar{w}}(\zeta) = 0, \quad (3)$$

где $\hat{w}(\zeta), \hat{\bar{w}}(\zeta)$ – образы Фурье распределений $\hat{w}(\zeta), \hat{\bar{w}}(\zeta) \in S'$. Используя равенство $\overline{\hat{w}(-\zeta)} = \hat{\bar{w}}(\zeta)$, из (3) получим

$$4\bar{d}\hat{w}(\zeta) + \left(-\bar{A}\bar{\zeta}^2 - \bar{B}|\zeta|^2 - \bar{C}\zeta^2 + 2i\bar{a}\bar{\zeta} + 2i\bar{b}\zeta + 4\bar{c}\right)\hat{\bar{w}}(\zeta) = 0. \quad (3')$$

Определитель системы уравнений (3), (3') равен:

$$\Delta(\zeta) = |p(\zeta)|^2 - 8\mathrm{Re}p(\zeta)\bar{c} - 4|q(\zeta)|^2 + p_0 - 4i\mathrm{Re}[p(\zeta) - 4c]\overline{q(\zeta)}, \quad (4)$$

где

$$p(\zeta) = A\zeta^2 + B|\zeta|^2 + C\bar{\zeta}^2, q(\zeta) = a\zeta + b\bar{\zeta}, p_0 = 16(|c|^2 - |d|^2). \quad (5)$$

Если $\Delta(\zeta) \neq 0\, \forall \zeta \in C$, то система (3), (3') будет иметь только нулевое решение $\hat{w}(\zeta) = 0$ и тогда $w(z) \equiv 0$. Если же $\Delta(\zeta) = 0$ на каком-нибудь множестве $K$, то носитель $\mathrm{supp}\, \hat{w}(\zeta)$ распределения $\hat{w}(\zeta)$ будет принадлежать множеству $K$, и зная $K$ можно определить $\hat{w}(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Пусть $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ – множество нулей функций $\Delta(\zeta)$, $\mathrm{Re}\,\Delta(\zeta)$, $\mathrm{Im}\,\Delta(\zeta)$ соответственно. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и множества $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ имеют такие свойства: $\Gamma_1$ – ограничено, симметрично относительно начало координат $O$, множество $\Gamma_2$ содержит точку $O$ и если $a = b = 0$, то $\Gamma_2 = C$.

В зависимости от коэффициентов системы множество $\Gamma$ может состоять из конечного числа или континиума точек, а возможно и будет пустым. Для определения решений системы (1) нужно будет использовать теоремы о структуре распределений с точечным носителем (см. [12], стр. 49) и с носителем на окружности (см. [7]). Заметим, что мы пока не использовали условие (2).

Справедлива следующая:

**Лемма 1.** *Пусть в уравнение* (1) *все коэффициенты постоянные,* $A = \bar{C}, a = b = d = 0$, $B = iB_0$, $B_0, c$ – *вещественные ненулевые числа. Тогда это уравнение в пространстве* $S'$ *имеет только нулевое решение.*

**Доказательство.** Покажем, что в условиях леммы

$$\Delta(\zeta) \neq 0\, \forall \zeta \in C. \quad (6)$$

В силу (4), (5) уравнение $\Gamma_1$ имеет вид

$$|p(\zeta)|^2 - 8\mathrm{Re}p(\zeta)\bar{c} + 16|c|^2 = 0.$$

С учетом условия леммы запишем это уравнение в полярных координатах $\zeta = \rho e^{i\varphi}$:

$$|\varepsilon(\varphi)|^2\rho^4 - 8c\mathrm{Re}\varepsilon(\varphi)\rho^2 + 16c^2 = 0, \quad (7)$$

здесь

$$\varepsilon(\varphi) = Ae^{2i\varphi} + iB_0 + \bar{A}e^{-2i\varphi} = 2\mathrm{Re}\left(Ae^{2i\varphi}\right) + iB_0 \neq 0.$$

Дискриминант биквадратного относительно $\rho$ уравнения (7) является отрицательным:

$$D = 64c^2\{[\mathrm{Re}\varepsilon(\varphi)]^2 - |\varepsilon(\varphi)|^2\} = -64c^2[\mathrm{Im}\varepsilon(\varphi)]^2 = -64c^2B_0^2 < 0.$$

Поэтому

$$|\varepsilon(\varphi)|^2\rho^4 - 8c\mathrm{Re}\varepsilon(\varphi)\rho^2 + 16c^2 > 0\, \forall \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi].$$

Следовательно, выполняется неравенство (6) и уравнение (1) в пространстве $S'$ имеет только нулевое решение. Лемма доказана.

**Следствие.** *В условиях леммы 1 уравнение* (1) *в гёльдеровом пространстве* $C_{\alpha}^{2}$, *а также в пространстве функций степенного роста имеет только нулевое решение.*

Лемма 1 играет важную роль при исследовании уравнений с переменными коэффициентами в гёльдеровых пространствах.

**2. Системы с переменными коэффициентами**

В этом пункте будем предполагать, что систему (1) является равномерно эллиптической, т.е. выполняется условие (2). Пусть коэффициенты этой системы принадлежат пространству $C_{\alpha}$. Тогда $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ будет линейным ограниченным оператором.

Предположим, что коэффициенты оператора $L$ являются слабо осциллирующими на бесконечности. Так же, как в работе [4], будем строить предельные операторы

$$\tilde{L}w \equiv \tilde{A}w_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{B}w_{\bar{z}z} + \tilde{C}w_{zz} + \tilde{a}w_{\bar{z}} + \tilde{b}w_{z} + \tilde{c}w + \tilde{d}\overline{w}, \tag{8}$$

коэффициенты которых будут постоянными. Множество таких операторов обозначим через $H(L)$. Отметим, что предельные операторы можно строить и без предположения условия слабо осцилляции коэффициентов. Только в этом случае коэффициенты предельных операторов будут переменными и из класса $C_{\alpha}$.

Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть коэффициенты оператора* $L$ *удовлетворяют выше указанным условиям. Тогда оператор* $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ *будет n-нормальным, в том и только в том случае, когда все предельные операторы* $\tilde{L}: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ *имеют нулевое ядро.*

Доказательство этой теоремы проводится по схеме, изложенной в нашей работе [4].

Используя лемму 1 можно получить условия того, что все предельные операторы имеют нулевое ядро и установить следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть коэффициенты оператора* $L$ *принадлежат пространству* $C_{\alpha}$ *и являются слабо осциллирующими на бесконечности. Пусть выполнены условия:*

1) $\tilde{A} = \bar{\tilde{C}}$;

2) $\lim\limits_{z\to\infty} [|a(z)| + |b(z)| + |d(z)| + |\mathrm{Re}B(z)| + |\mathrm{Im}c(z)|] = 0$;

3) $\underline{\lim}_{z\to\infty} |\mathrm{Re}\, c(z)| > 0$;

4) $\underline{\lim}_{z\to\infty} |\mathrm{Im}B(z)| > 0$.

*Тогда оператор* $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$ *будет n-нормальным.*

Доказательство проводится по схеме, изложенной в нашей работе [4]. Из условий теоремы выводится, что коэффициенты предельных операторов $\tilde{L} \in H(L)$ будут удовлетворят условиям леммы 1. Далее из теоремы 1 вытекает $n$-нормальность оператора $L: C_{\alpha}^{2} \to C_{\alpha}$.

**Замечание.** Условия 1) – 4) будут выполнены, если соответствующие частичные пределы функций $A(z)$ и $\overline{C(z)}$ при $z \to \infty$ совпадают, пределы функций $a(z), b(z), d(z), \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ при $z \to \infty$ равны нулю и существуют такие числа $R > 0$ и $c_0$, что $|\mathrm{Re}\, c(z)| \geq c_0$, $|\mathrm{Im}\, B(z)| \geq c_0$ при $|z| \geq c_0$.

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений / А.Д. Джураев. М.: Наука, 1987. – 415 с.
3. Балк,М.Б. Полианалитические функции и их обобщения / М.Б. Балк // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1991. Том 85.–С. 187–246.

4. Байзаев, С.О нормальной разрешимости систем с оператором Бицадзе в гёльдеровых пространствах/С.Байзаев,М.О.Содиков// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. №4. – С. 65 – 73.
5. Векуа, И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 296 с.
6. Байзаев,С. О необходимых и достаточных условиях существования ограниченных решений переопределенных систем уравнений с частными производными / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Издание Худжандского госуниверситета. 2017. №3. – С. 3 – 14.
7. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10, № 1. – С. 3 – 13.
8. О необходимых и достаточных условиях существования классического решения неоднородной системы Коши-Римана / С. Байзаев, Э. Мухамадиев, Г.Э. Гришанина //Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, №2. - С. 1 – 13.
9. Абдулвохиди,О. Двоякопериодическое решение одного класса нелинейных эллиптических систем второго порядка на плоскости / Абдулвохиди О. //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2019. № 1. – С. 73 – 78.
10. Байзаев,С. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости /С. Байзаев, Э. Мухамадиев //Дифференциальные уравнения, 1992. – Том 28. № 5. – С. 818 – 827.
11. Функциональный анализ. Серия «СМБ», под. ред. С.Г. Крейна, М.: Наука, 1972. – 544 с.
12. Владимиров, В.С. Обобщённые функции в математической физике / В.С. Владимиров.- М.: Наука, 1976. – 280 с.


**REFERENCES:**


1. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations / A.V. Bitsadze. Moscow: Nauka, 1981. – 448 p.
2. Juraev A.D. Method of singular integral equations / A.D. Juraev. Moscow: Nauka, 1987. – 415 p.
3. Balk M.B. Polyanalytic functions and their generalizations / M.B. Balk // Results of science and technology. Series: Modern problems of mathematics. Fundamental directions, 1991. Vol. 85. – P. 187–246.
4. Baizaev S. On normal solvability of systems with the Bitsadze operator in Holder spaces / S. Baizaev, M.O. Sodikov // Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences. – 2021. No. 4. – P. 65 – 73.
5. Vekua I. N. New methods for solving elliptic equations / I. N. Vekua. Moscow-Leningrad: GITTL, 1948. – 296 p.
6. Bayzaev,S. On necessary and sufficient conditions for the existence of bounded solutions of overdetermined systems of partial differential equations / S. Bayzaev, M. A. Rakhimova // Scientific notes. Series: natural and economic sciences. Publication of Khujand State University. 2017. No. 3. – P. 3 – 14.
7. On some functional equations in Schwartz spaces and their applications/S.Bayzaev,M.A. Rakhimova // Ufa Mathematical Journal. 2018. Vol. 10, No. 1. – P. 3 – 13.
8. On necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution to the inhomogeneous Cauchy-Riemann system / S. Bayzaev, E. Mukhamadiev, G.E. Grishanina // Differential Equations. 2018. Vol. 54, No. 2. - P. 1 – 13.
9. Abdulvohidi O. Doubly periodic solution of one class of second-order nonlinear elliptic systems on the plane / Abdulvohidi O. // Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. 2019. No. 1. – P. 73 – 78.
10. Bayzaev S. On the index of first-order elliptic operators on the plane /S. Bayzaev, E. Mukhamadiev // Differential Equations, 1992. - Vol. 28. No. 5. - P. 818 - 827.
11. Functional Analysis. Series «SMB», edited by S.G. Krein, Moscow: Nauka, 1972. - 544 p.
12. Vladimirov V.S. Generalized Functions in Mathematical Physics / V.S. Vladimirov. Moscow: Nauka, 1976. - 280 p.