

1.1.[01 01 00] МАТЕМАТИКА

1.1.[01 01 00] МАТЕМАТИКА

1.1.[01 01 00] MATHEMATICS

1.1.2.[01.01.02] МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНЦИАЛӢ, СИСТЕМАҲОИ ДИНАМИКӢ, ИДОРАКУНИИ ОПТИМАЛӢ

1.1.2.[01.01.02] ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

1.1.2.[01.01.02] DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS, OPTIMAL MANAGEMENT

УДК 517.946

**О НАХОЖДЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ
ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ
ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ КОШИ-РИМАНА С
СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

**ДОИР БА ЁҒТАНИ ҲАЛЛИ УМУМИИ
ЯК СИНФИ СИСТЕМАҲОИ ДУЧЕНАКАИ
УМУМИКАРДАШУДАИ КОШИ-РИМАН БО
КОЭФФИЦИЕНТҲОИ СИНГУЛЯРӢ**

**ON FINDING GENERAL SOLUTION OF
CLASS OF TWO-DIMENSIONAL GENERALIZED
CAUCHY-RIEMANN SYSTEM WITH SINGULAR
COEFFICIENTS**

Байзаев Саттор, д.ф.м.н., профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания; **Шокирова Мухбира Мухторхоновна**, старший преподаватель кафедры информационно-коммуникационных технологий и программирования, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, (Таджикистан, Худжанд)

Байзоев Саттор, д.ф.м.н., проф., кафедраи фанҳои риёзӣ-табиатиносии муосир; **Шокирова Мухбира Мухторхоновна**, сармуаллими кафедраи технологияҳои иттилоотию коммуникатсионӣ ва барномарезии Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон (Тоҷикистон, Хучанд)

Bayzaev Sattor, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science; **Shokirova Mukhbira Mukhtorkhonovna**, Senior Lecturer of the Department of Information and Communication Technologies and Programming, Tajik State University of Law, Business and Politics, (Tajikistan, Khujand) **E-mail:** mukhbira.shokirova@mail.ru

Ключевые слова: двумерная обобщенная система Коши-Римана, сингулярные коэффициенты, общее решение, регулярное решение.

Статья посвящена исследованию одного класса двумерных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными при сопряжении искомой вектор-функции коэффициентами вида $z^{-\alpha}\bar{z}^{-\beta}A$, здесь α, β – вещественные числа, такие как: $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta$ – целое, A – комплексная верхнетреугольная матрица второго порядка. Переходом в полярные координаты решения системы ищутся в виде тригонометрического ряда по $\varphi = \arg z$ с неизвестными коэффициентами $w_n(r) = \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix}$, зависящими от $r = |z|$. Для неизвестных $u_n(r), v_n(r)$ получаются родственные уравнения Бесселя, в которых коэффициент при искомой функции имеет вид: $n(\gamma + 1) - 4|\alpha|^2 r^{2(1-\gamma)}$ – для $u_n(r)$, $n(2\alpha + n) + 4|b|^2 r^{2(1-\gamma)}$ – для $v_n(r)$, $\gamma = \alpha + \beta$, причем для $v_n(r)$ получается однородное уравнение, а для $u_n(r)$ – неоднородное. В зависимости от α, β и элементов матрицы A найдены общие решения последних уравнений, затем выписано общее решение исходной системы. Из найденного общего решения системы можно выделить регулярные, т.е. не имеющие в конечной части плоскости особенностей, а также решения граничных задач.

Отметим, что изложенным в статье методом можно получить также общие решения систем с произвольным матричным коэффициентом.

Калидвожаҳо: системаҳои дученакаи умумикардашудаи Коши-Риман, коэффитсиентҳои сингулярӣ, ҳалли умумӣ, ҳалли регулярӣ.

Мақола ба таҳқиқи як синфи системаҳои дученакаи умумикардашудаи Коши-Риман, ки коэффитсиенти назди вектор-функсияи ҳамроҳшудаи номаълуми сингулярии намуди $z^{-\alpha}\bar{z}^{-\beta}A$, дар ин ҷо α, β – ададҳои ҳақиқӣ, $\alpha + \beta > 0$ ва $\alpha - \beta$ – бутун, A – матрицаи комплекси секунҷавии тартиби ду мебошад, бахшида шудааст. Ба координатаҳои қутбӣ гузашта ҳалҳои система дар намуди қатори тригонометрӣ аз r ӯи $\varphi = \arg z$ бо коэффитсиентҳои номаълуми $w_n(r) = \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix}$

аз $r = |z|$ вобаста ҷустуҷӯ карда мешавад. Барои компонентаҳои $u_n(r), v_n(r)$ муодилаҳои навъи Бессел ҳосил мешаванд, ки дар онҳо коэффитсиенти назди функсияи номаълум чунин намуд дорад: $n(\gamma + 1) - 4|a|^2 r^{2(1-\gamma)}$ барои $u_n(r)$, $n(2\alpha + n) + 4|b|^2 r^{2(1-\gamma)}$ барои $v_n(r)$, $\gamma = \alpha + \beta$; барои $v_n(r)$ муодилаи якҷинсаи хаттӣ ва барои $u_n(r)$ муодилаи ғайриякҷинса ҳосил мешавад. Вобаста аз қимати нишондиҳандаҳои α, β ва элементҳои матрицаи A ҳалҳои умумии муодилаҳои мазкур ёфта шуда, сипас ҳалли умумии система ёфта мешавад. Аз ҳалли умумии ёфташудаи система ҳалҳои регулярӣ, яъне ҳалҳои дар қисми охириҳои ҳамворӣ махсусият надошта ва инчунин ҳалли масъалаҳои канориро ҷудо карда гирифта метавонем. Методи дар мақола корбастишударо барои ёфтани ҳалли умумии системаи матрицаи коэффитсиентҳои дилхоҳ истифода бурдан мумкин аст.

Keywords: two-dimensional generalized Cauchy-Riemann system, singular coefficients, general solution, regular solution.

The article is devoted to the study of one class of two-dimensional generalized Cauchy-Riemann systems with singular coefficients of the form $z^{-\alpha}\bar{z}^{-\beta}A$, when conjugating the desired vector function, here α, β – are real numbers such that $\alpha + \beta > 0$ and $\alpha - \beta$ – is an integer, A – is a complex an upper-triangular matrix of the second order. By switching to polar coordinates, the solutions of the system are searched for in the form of a trigonometric series in $\varphi = \arg z$ with unknown coefficients $w_n(r) = \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix}$ depending on $r = |z|$. For the unknowns $u_n(r), v_n(r)$, related Bessel equations are obtained, in which the coefficient for the desired function has the form: $n(\gamma + 1) - 4|a|^2 r^{2(1-\gamma)}$ – for $u_n(r)$, $n(2\alpha + n) + 4|b|^2 r^{2(1-\gamma)}$ – for $v_n(r)$, $\gamma = \alpha + \beta$, and for $v_n(r)$ a homogeneous equation is obtained, and for $u_n(r)$ – an inhomogeneous one. Depending on α, β and the elements of the matrix A , general solutions of the last equations are found, then a general solution of the original system is written out. From the found general solution of the system, it is possible to distinguish regular ones, i.e. those that do not have singularities in the finite part of the plane, as well as solutions to boundary problems. Note that the method described in the article can also be used to obtain general solutions of systems with an arbitrary matrix coefficient.

Обобщенные системы Коши-Римана

$$w_{\bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} = 0, \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, и граничные задачи для них изучены в трудах И.Н. Векуа, его учеников и последователей (см., например, [1] – [3]). Теория систем вида (1) с сингулярными коэффициентами разработана в работах Л.Г. Михайлова, Н. Раджабова, З.Д. Усманова и их учеников (см., например, [4] – [7]). В случае, когда коэффициенты системы (1) определены и ограничены на всей плоскости $\mathbb{C}$ в ряде работ С. Байзаева и Э. Мухамадиева (см., например, [8] – [11]) исследованы граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта, сопряжения и задача об ограниченных решениях.

В настоящей работе для двумерной обобщенной системы Коши-Римана вида

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}}A\bar{w} = 0, \quad (2)$$

где $w \in \mathbb{C}^2$ – комплексное двумерное пространство, α, β – вещественные числа, такие что $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta$ – целое, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ – комплексная ненулевая матрица, рассматривается задача нахождения общего решения.

Пусть $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $u = u(z)$, $v = v(z)$ – искомые функции. Тогда в полярных координатах система (2) примет вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_r + \frac{i}{r} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\varphi + \frac{2}{r^{\alpha+\beta}} e^{i(\beta-\alpha-1)\varphi} A \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Систему (3) запишем в развернутом виде

$$u_r + \frac{i}{r} u_\varphi + \frac{2}{r^\gamma} e^{is\varphi} (a\bar{u} + c\bar{v}) = 0, \quad (4)$$

$$v_r + \frac{i}{r} v_\varphi + \frac{2b}{r^\gamma} e^{is\varphi} \bar{v} = 0, \quad (5)$$

где $\gamma = \alpha + \beta$, $s = \beta - \alpha - 1$.

Решения уравнения (5) будем искать в виде ряда

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(r) e^{in\varphi}, \quad (6)$$

где $v_n(r)$ – неизвестные функции. Подставляя в (5) имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(v'_n - \frac{n}{r} v_n \right) e^{in\varphi} + \frac{2b}{r^\gamma} e^{i(s-n)\varphi} \bar{v}_n \right] = 0.$$

Заменяя в ряде $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{v}_n e^{i(s-n)\varphi}$ индекс n на $s-n$, для коэффициентов $v_n(r)$ получим следующее уравнение

$$v'_n - \frac{n}{r} v_n + \frac{2b}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n} = 0, n \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

При $b = 0$ получаем $v'_n - \frac{n}{r} v_n = 0$. Отсюда $v_n = C_n r^n$, C_n – произвольная комплексная постоянная и поэтому

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n r^n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n,$$

т.е. функция v является произвольной аналитической функцией.

Далее будем считать, что $b \neq 0$. Заменяя в (7) n на $s-n$ и переходя к комплексно-сопряженным величинам, получаем еще одно уравнение

$$\bar{v}'_{s-n} + \frac{2\bar{b}}{r^\gamma} v_n - \frac{s-n}{r} \bar{v}_{s-n} = 0, n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Рассмотрим два возможных случая: 1) s – нечетное; 2) s – четное.

Случай 1): s – нечетное. В этом случае $n \neq s-n \forall n \in \mathbb{Z}$ и соотношения (7) и (8) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $v_n(r)$ и $\omega_n(r) = \bar{v}_{s-n}(r)$. Когда n меняется от $p = \frac{s+1}{2}$ до $+\infty$ выражение $s-n$ меняется от $p-1$ до $-\infty$. Поэтому достаточно считать, что $n \geq p$. Следовательно, из (7) и (8) получим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} v'_n - \frac{n}{r} v_n + \frac{2b}{r^\gamma} \omega_n = 0, \\ \omega'_n + \frac{2\bar{b}}{r^\gamma} v_n - \frac{s-n}{r} \omega_n = 0, \end{cases} \quad n \geq p. \quad (9)$$

Из этой системы легко получить дифференциальное уравнение второго порядка:

$$v''_n + \frac{\gamma-s}{r} v'_n - \left(\frac{n(n-s+\gamma-1)}{r^2} + \frac{4|b|^2}{r^{2\gamma}} \right) v_n = 0$$

или

$$r^2 v''_n + (2\alpha+1) r v'_n - (n(2\alpha+n) + 4|b|^2 r^{2(1-\gamma)}) v_n = 0. \quad (10)$$

Из уравнения (10) определим $v_n(r)$ для индексов $n \geq p$, а остальные $v_{s-n}(r)$ находим по формуле

$$v_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2\bar{b}} \left[-\bar{v}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{v}_n(r) \right], \quad (11)$$

которая следует из уравнения (7).

Уравнение (10) является родственным к уравнению Бесселя и является частным случаем уравнения

$$r^2 v'' + a_1 r v' + (b_1 r^m + c_1) v = 0, m \neq 0 \quad (12)$$

из [12, с. 401]. Общее решение уравнения (12) определяется так:

$$\text{при } b_1 \neq 0: v(r) = r^{\frac{1-a_1}{2}} Z_v \left(\frac{2}{m} \sqrt{b_1 r^{\frac{m}{2}}} \right), \quad v = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a_1)^2 - 4c_1},$$

при $b_1 = 0$:

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{\frac{1-a_1+\mu}{2}} + C_2 r^{\frac{1-a_1-\mu}{2}}, & \text{если } \mu = \sqrt{(1-a_1)^2 - 4c_1} \neq 0, \\ r^{\frac{1-a_1}{2}} (C_1 + C_2 \ln r), & \text{если } (1-a_1)^2 - 4c_1 = 0, \end{cases}$$

Z_v – цилиндрические функции, C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

В случае уравнения (10) имеем:

$$a_1 = 2\alpha + 1, b_1 = -4|b|^2, c_1 = -n(2\alpha + n), m = 2(1 - \gamma).$$

При $\gamma \neq 1$ находим $v = \frac{|\alpha+n|}{1-\gamma}$ и общее решение уравнения (10) имеет вид

$$v_n(r) = r^{-\alpha} Z_v \left(\frac{4i|b|}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right). \quad (13)$$

При $\gamma = 1$ в уравнении (10) коэффициент при v_n будет постоянным и нужно взять $b_1 = 0, c_1 = -[n(2\alpha + n) + 4|b|^2]$ и найти μ :

$$\mu = \sqrt{4\alpha^2 + 4[n(2\alpha + n) + 4|b|^2]} = 2\sqrt{(\alpha + n)^2 + 4|b|^2} > 0.$$

Тогда общее решение уравнения (10) записывается в виде

$$v_n(r) = C_1 r^{-\alpha+\frac{\mu}{2}} + C_2 r^{-\alpha-\frac{\mu}{2}}, \quad (14)$$

C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Итак, в случае когда $s = \beta - \alpha - 1$ нечетное и $b \neq 0$ мы определили компоненту v решения системы (2) в виде ряда (6), в котором коэффициенты $v_n(r)$ в зависимости от значения $\gamma = \alpha + \beta$ находятся по формуле (13) или (14); при $b = 0$ функция v является произвольной аналитической функцией.

Если подставить v в уравнение (4), то для компоненты u получим неоднородное уравнение вида

$$u_r + \frac{i}{r} u_\varphi + \frac{2a}{r^\gamma} e^{is\varphi} \bar{u} = -\frac{2c}{r^\gamma} e^{is\varphi} \bar{v}. \quad (15)$$

Решения уравнения (15) будем искать в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r) e^{in\varphi},$$

где $u_n(r)$ – неизвестные функции. Подставляя в (15) имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(u'_n - \frac{n}{r} u_n \right) e^{in\varphi} + \frac{2a}{r^\gamma} e^{i(s-n)\varphi} \bar{u}_n \right] = -\frac{2c}{r^\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{v}_n e^{i(s-n)\varphi},$$

где $v_n(r)$ – известные функции, которых мы определили выше. В суммах, содержащих комплексные сопряжения функций заменим n на $s - n$ и в результате приходим к следующему неоднородному уравнению для $u_n(r)$:

$$u'_n - \frac{n}{r} u_n + \frac{2a}{r^\gamma} \bar{u}_{s-n} = -\frac{2c}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n}, n \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Отсюда по аналогии с уравнением (8) получим еще одно уравнение

$$\bar{u}'_{s-n} + \frac{2\bar{a}}{r^\gamma} u_n - \frac{s-n}{r} \bar{u}_{s-n} = -\frac{2\bar{c}}{r^\gamma} v_n, n \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Из уравнений (16) и (17) можно получить дифференциальное уравнение второго порядка. Не вдаваясь в подробности, приведем окончательный результат:

$$r^2 u''_n - (n + \gamma) r u'_n + (n(\gamma + 1) - 4|a|^2 r^{2(1-\gamma)}) u_n = f_n(r), \quad (18)$$

где $f_n = 4(a\bar{c} + \bar{b}c) r^{2(1-\gamma)} v_n + 4c\gamma r^{1-\gamma} \bar{v}_{s-n}$.

Как и в случае уравнения (10), при $a \neq 0$ из уравнения (18) определим $u_n(r)$ для индексов $n \geq p = \frac{s+1}{2}$, а остальные $u_{s-n}(r)$ находим по формуле

$$u_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2a} \left[-\bar{u}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{u}_n(r) - \frac{2c}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n} \right], \quad (19)$$

которая следует из уравнения (16).

Неоднородное уравнение (18) можно решить методом вариации произвольных постоянных (см. лемму).

При $a = 0$ из уравнения (16) получим

$$u'_n - \frac{n}{r} u_n = -\frac{2c}{r^\gamma} \bar{v}_{s-n}, n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда находим

$$u_n(r) = r^n \left(c_n - 2c \int \frac{\bar{v}_{s-n}}{r^{n+\gamma}} dr \right), \quad (20)$$

где c_n – произвольная комплексная постоянная.

Пусть $a \neq 0$. В начале найдем общее решение однородного уравнения

$$r^2 u''_n - (n + \gamma) r u'_n + (n(\gamma + 1) - 4|a|^2 r^{2(1-\gamma)}) u_n = 0, \quad (21)$$

которое относится к уравнениям вида (12) с

$$a_1 = -(n + \gamma), b_1 = -4|a|^2, c_1 = n(\gamma + 1), m = 2(1 - \gamma).$$

При $\gamma \neq 1$ находим:

$$v = \frac{1}{m} \sqrt{(1 - a_1)^2 - 4c_1} = \frac{1}{2(1 - \gamma)} \sqrt{(1 + n + \gamma)^2 - 4n(\gamma + 1)} = \frac{|n - 1 - \gamma|}{2(1 - \gamma)}.$$

Поэтому общее решение однородного уравнения (21) имеет вид

$$u_{n0}(r) = r^{\frac{1+n+\gamma}{2}} Z_v \left(\frac{i|a|}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right), \quad (22)$$

Z_v – цилиндрические функции.

Цилиндрическую функцию Z_v представим в виде

$$Z_v = C_1 J_v + C_2 Y_v,$$

J_v, Y_v – бесселевы функции первого и второго рода, C_1, C_2 – комплексные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения (18) будем искать в виде

$$u(r) = r^\delta [C_1(r) J_v + C_2(r) Y_v], \quad (23)$$

где

$$\delta = \frac{1+n+\gamma}{2}, C_1(r), C_2(r) \text{ – неизвестные функции, бесселевы функции зависят от аргумента}$$

$\frac{i|a|}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$. Имеем

$$u'(r) = (r^\delta J_v)' C_1(r) + r^\delta J_v C_1'(r) + (r^\delta Y_v)' C_2(r) + r^\delta Y_v C_2'(r).$$

Предположим, что

$$J_v C_1'(r) + Y_v C_2'(r) = 0. \quad (24)$$

Тогда

$$u''(r) = (r^\delta J_v)'' C_1(r) + (r^\delta J_v)' C_1'(r) + (r^\delta Y_v)'' C_2(r) + (r^\delta Y_v)' C_2'(r).$$

Подставляя выражения для $u(r), u'(r), u''(r)$ в уравнение (18), с учетом того что функции $r^\delta J_v$ и $r^\delta Y_v$ являются решениями однородного уравнения (21), получим

$$r^2 \left[(r^\delta J_v)' C_1'(r) + (r^\delta Y_v)' C_2'(r) \right] = f_n(r). \quad (25)$$

Из системы уравнений (24), (25) находим $C_1'(r), C_2'(r)$ и далее интегрируя, имеем

$$C_1(r) = \frac{1}{2i|a|} \int \frac{r^{2+\gamma-\delta} Y_v}{J_v' Y_v - J_v Y_v'} f_n(r) dr + C_{10},$$

$$C_2(r) = -\frac{1}{2i|a|} \int \frac{r^{2+\gamma-\delta} J_v}{J_v' Y_v - J_v Y_v'} f_n(r) dr + C_{20},$$

где C_{10}, C_{20} – произвольные комплексные постоянные.

Согласно свойствам функций Бесселя (см. [12, с. 402]), имеет место соотношение

$$J'_v(r)Y_v(r) - J_v(r)Y'_v(r) = \frac{2}{\pi r}.$$

Поэтому формулы для $C_1(r)$ и $C_2(r)$ примут вид

$$C_1(r) = \frac{\pi}{4(1-\gamma)} \int r^{3-\delta} Y_v f_n(r) dr + C_{10},$$

$$C_2(r) = -\frac{\pi}{4(1-\gamma)} \int r^{3-\delta} J_v f_n(r) dr + C_{20}.$$

Подставляя эти выражения в (23) получим формулу общего решения неоднородного уравнения (18).

Лемма. Пусть $\gamma \neq 1$ и $a \neq 0$. Тогда общее решение неоднородного уравнения (18) имеет вид

$$u_n(r) = \frac{\pi r^\delta}{4(1-\gamma)} \left\{ J_v \left[C_1 + \int r^{3-\delta} Y_v f_n(r) dr \right] - Y_v \left[C_2 + \int r^{3-\delta} J_v f_n(r) dr \right] \right\}, \quad (26)$$

здесь $\delta = \frac{1+n+\gamma}{2}$, всюду бесселевы функции зависят от аргумента $\frac{|a|}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$, C_1, C_2 — произвольные комплексные постоянные, $f_n(r) = 4(a\bar{c} + \bar{b}c)r^{2(1-\gamma)}v_n + 4c\gamma r^{1-\gamma}\bar{v}_{s-n}$.

Привлекая формулы (14) и (15) можно получить формулу общего решения неоднородного уравнения (18) и при других значениях γ и a .

Таким образом, мы получили схему построения общего решения системы (2), когда число $s = \beta - \alpha - 1$ является нечетным.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть число $s = \beta - \alpha - 1$ нечетное и $(1-\gamma)ab \neq 0$. Тогда общее решение системы (2) имеет вид

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} e^{in\varphi} + \begin{pmatrix} u_{s-n}(r) \\ v_{s-n}(r) \end{pmatrix} e^{i(s-n)\varphi} \right\}, \quad (27)$$

здесь $p = \frac{s+1}{2}$, функции $u_n(r), v_n(r), u_{s-n}(r), v_{s-n}(r)$ определяются по формулам (26), (13), (19), (10) соответственно.

Замечание. Аналогичное утверждение можно сформулировать и для случая $(1-\gamma)ab = 0$.

Теперь рассмотрим случай s — четное. Тогда $n = s - n$ при $n = \frac{s}{2}$, при этом значении n в уравнение (7) входит одна неизвестная функция $v_{s/2}$:

$$v'_{s/2} - \frac{s}{2r} v_{s/2} + \frac{2b}{r^\gamma} \bar{v}_{s/2} = 0.$$

Отсюда для $v_{s/2}$ получаем уравнение вида (10) с $n = \frac{s}{2}$, из которого определяем $v_{s/2}$.

Неизвестная функция $u_{s/2}$ находится из неоднородного уравнения вида (18) с $n = \frac{s}{2}$.

Далее будем считать, что $n > \frac{s}{2}$ и повторяя схему, изложенную для случая нечетного s , можно определить функции $u_n(r), v_n(r), u_{s-n}(r), v_{s-n}(r)$ и получить формулу общего решения системы (2) и в случае четного s .

ЛИТЕРАТУРА:

1. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции/И.Н.Векуа.-М.: Наука, 1986.-509 с.
2. Берс, Л. Уравнения с частными производными/Л.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер.-М:Мир, 1966–351 с.
3. Векуа, И.Н. Неподвижные особые точки обобщенных аналитических функций /И.Н.Векуа//ДАН СССР.-1962.-Т.145, №1. – С. 24 – 26.
4. Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами/Л.Г.Михайлов.-Душанбе, 1963.-183 с.
5. Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями/Н.Раджабов.-Душанбе: Изд-во ТГУ им. В.И. Ленина, 1980, часть 1. –126 с.
6. Усманов, З.Д. Об одном классе обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой/З.Д.Усманова//Сиб. матем. журн. 1973.- Т.- 14. №5.-С.1076-1087.

7. Усманов, З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой/З.Д.Усманова.- Душанбе, 1983.-245с.
8. Мухамадиев, Э.К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши – Римана/ Э.Мухамадиев, С.Байзаев//ДАН СССР, 1986. – Т. 287, № 2. – С. 280 – 283.
9. Байзаев, С. О задаче линейного сопряжения для обобщенных аналитических функций на полуплоскости/С.О.Байзаев//Доклады АН Республики Таджикистан.1999.–Т.42,№3.–С.74 – 79.
- 10.Байзаев,С.Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости/С. Байзаев, Э.Мухамадиев//Дифференциальные уравнения, 1992. –Т. 28, № 5. – С. 818 – 827.
11. Байзаев С., Мухамадиев Э. О нормальной разрешимости эллиптических уравнений на плоскости в пространстве Гёльдера/С.Байзаев, Э.Мухамадиев// Вестник Новосибирского госуниверситета, 2006. – Т. 6. – Вып. 1. – С. 3 – 13.
12. Камкэ, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям/Э.Камкэ.-М.: Наука, 1971. – 576 с.

REFERENCES:

1. Vekua, I.N. Generalized Analytic Functions. Moscow: Nauka, 1988. 509 p (In Russian).
2. Bers L., John F., Schechter M. Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1966.-351 p (In Russian).
3. Vekua, I.N. A singular fixed points of generalized analytic functions // 1962. Soviet Math. Dokl. Vol. 145, № 1. P. 24 – 26.
4. Mikhailov, L.G. A new class of singular integral equations and its application to the differential equations with singular coefficients. Academia – Verlag. Berlin. 1970. – 183 p.
5. Rajabov, N.R. Integral representations and boundary value problems for some differential equations with a singular line or singular surfaces. Dushanbe: Publishing House of V.I. Lenin TSU, 1980, part 1. – 126 p (In Russian).
6. Usmanov, Z.J. On the class of generalized Cauchy-Riemann system with singular coefficients // Siberian Mathem. Journal. 1973. Vol. 17, № 5. pp. 1076 – 1087.
7. Usmanov Z.J. Generalized Cauchy-Riemann system with singular coefficients. Dushanbe. 1993. 245 p (In Russian).
8. Muhamadiev, E., Baizaev S. On the theory of bounded solutions of the generalized Cauchy-Riemann system // 1986. Soviet Math. Dokl. Vol. 33. № 2. P. 381 – 384.
9. Baizaev, S. About conjugate problem for generalized analytic functions on the half-plane // Dokl. Academy Science of Tajikistan. 1999. Vol. 428, № 3, p.74–79 (In Russian).
10. Baizaev, S., Muhamadiev E. On the index of first-order elliptic operators on the plane // Differ. Equations, 1992. Vol. 28, № 5, p.818 – 827.
11. Baizaev, S., Muhamadiev E. On normal solvability elliptic equations on the plane in Holder space // Vestnik Novosibir. Gosuniver. 2006. Vol. 6, № 1, p.3 – 13 (In Russian).
12. Kamke, E. Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1971.-576 p (In Russian).