ТДУ 510.8
DOI:10.24412-2077-4990-2024-380-137-142

УСУЛҲОИ ТАЪЛИМИ ИНТЕГРАЛИ МУАЙЯН

Мухсинов Едгор Мирзоевич, *д.и.физ.-мат., дотсенти кафедраи фанҳои риёзи- табиатшиносии муосири ДДҲБСТ;* ***Мухсинова Сабоат Маруфбоевна,*** *н.и. физ.-мат., дотсенти кафедраи математикаи олӣ ва амалии МДТ «ДДХ ба номи акад. Б.Гафуров» (Тоҷикистон, Худжанд)*

МЕТОДЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Мухсинов Едгор Мирзоевич, *д.физ.-мат. наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП;* ***Мухсинова Сабоат Маруфбоевна,*** *к.физ.-мат.наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики ГОУ «ХГУ имени акад.Б.Гафурова (Таджикистан, Худжанд)*

METHODS OF TEACHING THE DEFINITE INTEGRAL

Mukhsinov Edgor Mirzoevich, *Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Sciences, TSUBP, E- mail:yodgor.mukhsinov@gmail.com;*
Mukhsinova Saboat Marufboevna*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, SEI "KhSU named after acad.B. Gafurov",* ***E-mail:*** *saboatmukhsinova@gmail.com*

Калидвожаҳо*:интеграли муайян, хосиятҳои интеграли муайян, афзоиши функсияи ибтидоӣ, ихтисосҳои ғайри тахассусӣ.*

Мақолаи мазкур ба усулҳои таълими интеграли муайян бахшида шудааст. Дар китобҳои дарсӣ аз математика мафҳуми интеграли муайян ҳамчун ҳудуди суммаҳои интегралӣ дохил карда мешавад. Ин усули дохилкунии интеграли муайян аз ҷиҳати илмӣ дуруст буда, бештар ба донишҷӯёни ихтисосҳои тахассусӣ мувофиқ меояд. Вале ин усули дохилкунӣ барои донишҷӯёни ихтисосҳои ғайритахассусӣ ва хонандагони мактабҳои миёна аз нуқтаи назари қабул ва дарки мавзуъ хеле душвор мебошад. Бинобар ҳамин, мо пешниҳод менамоем, ки барои ихтисосҳои ғайри тахассусии донишгоҳҳои олӣ ва мактабҳои миёна интеграли муайян ҳамчун афзоиши функсияи ибтидоӣ муайян карда шавад. Дар мақола ду теорема ва даҳ хосиятҳои интеграли муайян исбот карда шудааст.

Ключевые слова*: определенный интеграл, свойства определенного интеграла, приращения первообразной функции, непрофильные специальности.*

Данная статья посвящена методике преподования определенного интеграла. В учебниках по математике понятие определенного интеграла дается в виде предела интегральных сумм. Этот способ ввода определенного интеграла является научно правильным и больше подходит студентам профильных специальностей. Однако этот способ весьма сложен для студентов непрофильных специальностей и старшеклассников с точки зрения понимания. Поэтому мы предлагаем изложить определенный интеграл как приращения первообразной функции для непрофильных специальностей вузов и средних школ. В статье доказываются две теоремы и десять свойств определенного интеграла.

Keywords: *definite integral, properties of a definite integral, increments of an antiderivative function, non-core specialties.*

This article is devoted to the methodology of teaching the definite integral. In mathematics textbooks, the concept of a definite integral is given as a limit of integral sums. This method of introducing a definite integral is scientifically correct and is more suitable for students of specialized specialties. However, this method is very difficult for students of non-specialized specialties and high school students in terms of understanding. Therefore, we propose to present the definite integral as an increment of the primitive function for non-specialized specialties of universities and secondary schools. The article proves two theorems and ten properties of the definite integral.

Дар математикаи олӣ таълими интеграли муайян мақоми муҳим ва асосиро ишғол менамояд. Истифодаи интеграли муайян ба мо имконият медиҳад, ки масъалаҳои гуногуни математика, физика, химия, биология, иқтисодиёт ва ҳарбию амалиро ҳаллу фасл карда бошем. Дар китобҳои дарсӣ аз математика [1, с. 362., 2, с. 177., 3, с. 209., 4. с. 214., 5, с. 69., 6, с. 32., 7, с. 213] мафҳуми интеграли муайян ҳамчун ҳудуди суммаҳои интегралӣ дохил карда мешавад. Дар ин ҳолат интегралҳои болои ва поёнии Дарбуро дохил намуда, исбот карда мешавад, ки ҳар як функсияи дар порчаи $[a,b]$ бефосила интегронидашаванда аст. Ин усули дохилкунии интеграли муайян аз ҷиҳати илмӣ дуруст буда, бештар ба донишҷӯёни ихтисосҳои тахассусӣ (масалан, математика, математика- физика ва физика- математика) мувофиқ меояд. Вале ин усули дохилкунии интеграли муайян барои донишҷӯёни ихтисосҳои ғайритахассусӣ ва хонандагони мактабҳои миёна аз нуқтаи назари қабул ва дарки мавзӯъ хеле душвор мебошад. Бинобар ҳамин, мо пешниҳод менамоем, ки барои ихтисосҳои ғайри тахассусии донишгоҳҳои олӣ ва мактабҳои миёна интеграли муайян ҳамчун афзоиши яке аз функсияҳои ибтидоӣ муайян карда шавад. Дар ин ҳолат, таърифи интеграли муайян барои донишҷӯён ва хонандагон дастрасу фаҳмотар буда, хосиятҳои интеграли муайян бо осонӣ исбот карда мешаванд.

Бигзор функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a,b]$ муайян бошад. Яке аз функсҳои ибтидоии $f(x)$ – ро бо $F(x)$ ишорат менамоем. Он гох,

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a,b].$$

Таърифи 1. *Интеграли муайян аз* a *то* b *аз функсияи* $f(x)$ *гуфта, фарқи* $F(b) - F(a)$ *–ро меномем, яъне*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Дар баробарии (1) a ва b – ҳудудҳои интегронӣ, $[a,b]$ - фосилаи интегронӣ ва $f(x)$- функсияи таҳти интегралӣ номида мешавад. Дар китобҳои дарсӣ аз математикаи олӣ баробарии (1) ҳамчун формулаи Нютон-Лейбнитс маълум аст.

Теоремаи 1. *Интеграли муайян аз интихоби функсияи ибтидоӣ вобаста нест.*

Исбот. Бигзор $F_1(x)$ боз ягон функсияи ибтидоии функсияи $f(x)$ бошад. Он гоҳ маълум аст, ки функсияи $F_1(x)$ аз функсияи $F(x)$ бо ягон адади доимии C фарқ мекунад:

$$F_1(x) = F(x) + C.$$

Пас,

$$F_1(b) - F_1(a) = F(b) + C - (F(a) - C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

аст. Теоремаи 1 исбот шуд.

Ишораи $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ дохил намуда, баробарии (1)-ро дар намуди зерин менависем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b \qquad (1^*)$$

Аз таърифи интеграли номуайян ба мо маълум аст, ки

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Пас,

$$\int F(x)dx|_{x=a} = F(a) + C, \qquad \int F(x)dx|_{x=b} = F(b) + C$$

Яъне,

$$F(b) - F(a) = \int f(x)dx|_{x=b} - \int f(x)dx|_{x=a} = \int f(x)dx|_a^b$$

Бинобар ҳамин,

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx|_a^b \qquad (2)$$

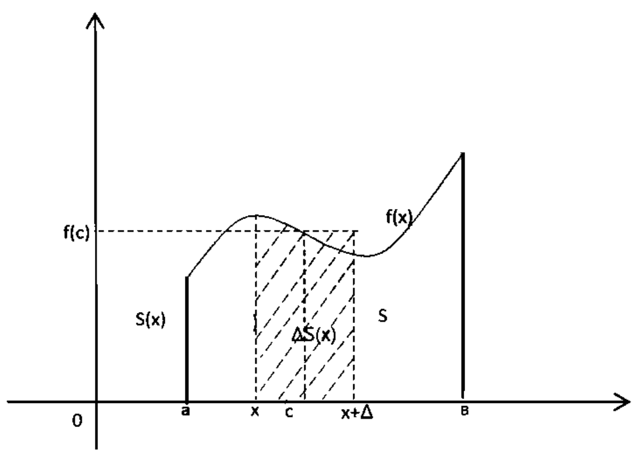
Формулаи (2) вобастагии байни интегралҳои муайян ва номуайянро нишон медиҳад.

Таърифи 2. *Фигураи бо графики функсияи* $f(x)$, *фосилаи* $[a,b]$, *хатҳои рости* $x = a$ ва $x = b$ *маҳдудшуда(расми1)-ро трапетсияи каҷхатта меноманд.*

Теоремаи 2. *Ҳар гуна функсияи дар фосилаи* $[a,b]$ *бефосилаи* $f(x)$ *соҳиби функсияи ибтидоии* $S(x)$ *аст, яъне*

$$S'(x) = f(x).$$

Исбот. Бигзор $f(x)$ функсияи дар фосилаи $[a,b]$ бефосила ва ғайриманфӣ бошад. Расми 1



Функсияи дар $[a,b]$ муайянӣ $S(x)$ – ро мегирем, ки масоҳати қисми трапетсияи каҷхаттаро ифода менамояд, ки бо хатҳои рости вертикалии аз нуқтаҳои $A(a,0)$ ва $M(x,0)$ гузаранда маҳдуд шудааст. Пас, $S(a)=0$ ва $S(b)=S-$ масоҳати трапетсияи каҷхатта аст. Маълум аст, ки $S(x+\Delta x)-S(x)=\Delta S(x)$ – масоҳати фигураи дар расм қайдшуда мебошад. Росткунҷаи дорои масоҳати $\Delta S(x)-$ ро дида мебароем, ки ба порчаи $[x,x+\Delta x]$ такя менамояд. Аз сабаби бефосила будани функсияи $f(x)$ росткунҷаи гирифташуда графики функсияи $f(x)-$ ро дар ягон нуқтаи абсиссааш $c\in[x,x+\Delta x]$ мебурад. Пас, баландии росткунҷа ба $f(c)$ баробар буда, баробарии зерин ҷой дорад:

$$\Delta S(x)=f(c)\Delta x$$

Аз бефосилогии $f(x)$ ва таърифи ҳосила бармеояд, ки ҳангоми $\Delta x\to 0$ нуқтаи $c\to x$ ва $f(c)\to f(x)$ майл намуда,

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=\lim_{c\to x}f(c)=f(x)$$

мешавад. Пас, $S'(x)=f(x)$. Теорема исбот шуд.

Дар асоси теоремаи 2 ва хосияти функсияҳои ибтидоӣ чунин адади доимии C ёфт мешавад, ки $S(x)=F(x)+C.$

Пас,

$$S(a)=F(a)+C, 0=F(a)+C, C=-F(a).$$

яъне,

$$S(x)=F(x)-F(a) \text{ ва } S=S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

Натиҷа. *Интеграли муайян аз функсияи дар фосилаи $[a,b]$ бефосила ва ғайриманфии $f(x)$ ба масоҳати трапетсияи каҷхаттаи бо хатҳои вертикалии $x=a$, $x=b$, хати горизонталии $y=0$ ва бо графики функсияи $f(x)$ маҳдуд буда баробар аст.*

Бо осони дидан мумкин аст, ки тасдиқотҳои болоиро барои функсияҳои бефосилаи ихтиёрии $f(x)$ ҳам паҳн намудан мумкин аст.

Дар асоси таърифи додашуда, хосиятҳои асосии интеграли муайянро исбот менамоем.

Хосияти 1. *Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[а, в]$ интегронидашаванда бошад, он гоҳ*

$$\int_а^в f(x)dx=-\int_в^а f(x)dx. \qquad (3)$$

Исбот. Фаҳмост, ки

$$\int_а^в f(x)\mathrm{dx}=\mathrm{F}(в)-\mathrm{F}(а)=-F(а)+F(в)=-(\mathrm{F}(а)-\mathrm{F}(в))=-\int_в^а f(x)\mathrm{dx}.$$

Яъне, баробарии (3) ҷой дорад.

Хосияти 2. *Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[а, в]$ интегронидашаванда бошад, он гоҳ барои дилхоҳ* $с\in[а,в]$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\int_а^в f(x)dx=\int_а^c f(x)dx+\int_c^в f(x)dx. \qquad (4)$$

Исбот. Аз таърифи интеграли муайян ҳосил менамоем:

$$\int_а^в f(x)\mathrm{dx}=F(в)-F(а)=F(в)+F(с)-F(с)-F(а)=F(с)-F(а)+F(в)-F(с)=$$

$$=\int_а^c f(x)\mathrm{dx}+\int_c^в f(x)\mathrm{dx}.$$

Бинобар ҳамин, баробарии (4) ҷой дорад.

Хосияти 3. *Адади доимии с-ро аз таҳти интеграли муайян баровардан мумкин аст:*

$$\int_{а}^{в} cf(x)dx = \text{c}\int_{а}^{в} f(x)dx. \qquad (5)$$

Исбот. Агар $F'(x) = f(x)$ бошад, он гоҳ $[cF(x)]' = c\,F'(x) = cf(x)$ мешавад. Пас,

$$\int_{а}^{в} cf(x)\text{dx} = cF(\text{в}) - cF(\text{а}) = c(F(\text{в}) - F(\text{а})) = c\int_{а}^{в} f(x)\text{d}x.$$

Яъне, баробарии (5) ҷой дорад.

Хосияти 4. *Агар функсияҳои* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *дар порчаи* $[\text{а}, \text{в}]$ *интегронидашаванда бошанд, он гоҳ*

$$\int_{а}^{в}\big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_{а}^{в} f(x)dx + \int_{а}^{в} g(x)dx. \qquad (6)$$

Исбот. Агар функсияҳои $f(x)$ ва $\text{g}(x)$ дар порчаи $[\text{а}, \text{в}]$ интегронидашаванда бошанд, он гоҳ онҳо дорои чунин функсияҳои ибтидоии $\text{F}(x)$ ва $\text{G}(x)$ мебошанд, ки

$$\int_{а}^{в} f(x)\text{dx} = \text{F}(\text{в}) - \text{F}(\text{а}), \qquad \int_{а}^{в} g(x)\text{dx} = \text{G}(\text{в}) - \text{G}(\text{а}).$$

Пас, функсияи $f(x) + \text{g}(x)$ дорои функсияи ибтидоии $\text{F}(x)+\text{G}(x)$ буда, баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\int_{а}^{в} f(x)\text{dx} + \int_{а}^{в} g(x)\text{dx} = \text{F}(\text{в}) - \text{F}(\text{а}) + \text{G}(\text{в}) - \text{G}(\text{а}) = \text{F}(\text{в}) + \text{G}(\text{в}) - \big(\text{F}(\text{а}) + \text{G}(\text{а})\big) =$$

$$= \int_{а}^{в}\big(f(x) + \text{g}(x)\big)\text{d}x.$$

Яъне, баробарии (6) ҷой дорад.

Хосияти 5. *Агар функсияи* $f(x)$ *дар порчаи* $[\text{а}, \text{в}]$ *интегронидашаванда буда, барои ҳамаи* $x \in [\text{а}, \text{в}]$ $f(x) \geq 0$ *бошад, он гоҳ*

$$\int_{а}^{в} f(x)dx \geq 0 \qquad (7)$$

Исбот. Аз шарти хосияти 5 ҳосил менамоем:

$$\int_{а}^{в} f(x)dx = \text{F}(\text{в}) - \text{F}(\text{а}) \qquad \text{ва} \qquad F'(x) = f(x) \geq 0$$

Пас, функсияи F(x) афзуншаванда буда, $\text{F}(\text{в}) \geq \text{F}(\text{а})$ аст. Бинобар ҳамин, $\text{F}(\text{в}) - \text{F}(\text{а}) \geq 0$. Яъне, нобаробарии (7) ҷой дорад.

Хосияти 6. *Агар функсияҳои* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *дар порчаи* $[\text{а}, \text{в}]$ *интегронидашаванда буда, барои ҳамаи* $x \in [\text{а}, \text{в}]$ $f(x) \geq g(x)$ бошад, он гох

$$\int_{а}^{в} f(x)dx \geq \int_{а}^{в} g(x)dx \qquad (8)$$

Исбот. Аз шарти хосияти 6 $f(x) \geq g(x)$. Пас, $f(x) - g(x) \geq 0$. Аз хосияти 5 бармеояд, ки

$$\int_{а}^{в}\big(f(x) - g(x)\big)dx \geq 0.$$

Бинобар ҳамин, аз хосиятҳои 3 ва 4 ҳосил менамоем:

$$\int_{а}^{в}\big(f(x) - g(x)\big)dx =$$

$$= \int_{а}^{в}[f(x) + (-1)g(x)]dx == \int_{а}^{в} f(x)dx + \int_{а}^{в}(-1)g(x)dx = \int_{а}^{в} f(x)dx - \int_{а}^{в} g(x)dx \geq 0.$$

Пас, нобаробарии (8) ҷой дорад.

***Хосияти** 7. Бигузор функсияи* $f(x)$ *дар порчаи* $[\text{а}, \text{в}]$ *бефосила ва ғайри манфӣ бошад. Агар барои ягон қимати* $x_0 \in [\text{а}, \text{в}]$ $f(x_0) > 0$ *бошад, он гоҳ чунин адади мусбати* α *ёфт мешавад, ки*

$$\int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx \geq \alpha > 0. \qquad (9)$$

Исбот. Бигузор $f(x_0) = \beta > 0$. Он гоҳ, дар асоси бефосилагии $f(x)$ дар нуқтаи x_0 чунин атрофи нуқтаи x_0 ёфт мешавад, ки барои дилхоҳ порчаи $[c, d]$, $c \neq d$ дар дохили ин атроф хобида, нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$f(x) \geq \frac{\beta}{2}.$$

Пас, дар асоси хосияти 6 ҳосил менамоем:

$$\int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx \geq \int_{c}^{d} f(x)dx \geq \int_{c}^{d} \frac{\beta}{2} dx = \frac{\beta}{2}\ (d - c) = \alpha > 0$$

Яъне, нобаробарии (9) ҷой дорад.

Хосияти 8. *Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[\text{а}, \text{в}]$ интегронидашаванда бошад, он гоҳ функсияи $|f(x)|$ ҳам интегронидашаванда буда,*

$$\left|\int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx\right| \leq \int_{\text{а}}^{\text{в}} |f(x)|dx. \qquad (10)$$

Исбот. Аз теоремаи 9.4 $[2, \text{с}. 376]$ натиҷа бармеояд, ки функсияи $|f(x)|$ интегронидашаванда аст. Фаҳмост, ки адади $\alpha = \pm 1$ –ро чунон интихоб намудан мумкин аст, ки

$$\alpha \cdot \int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx \geq 0$$

мешавад. Бо осонӣ дида мешавад, ки $\alpha f(x) \leq |\alpha f(x)| = |f(x)|$.

Пас,

$$\left|\int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx\right| = \alpha \cdot \int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx = \int_{\text{а}}^{\text{в}} \alpha f(x)dx \leq \int_{a}^{\text{в}} |f(x)|dx.$$

Нобаробарии (10) исбот шуд.

Хосияти 9. *Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[\text{а}, \text{в}]$ интегронидашаванда буда, $m \leq f(x) \leq M$ бошад, он гоҳ*

$$m(\text{в} - \text{а}) \leq \int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx \leq M(\text{в} - a) \qquad (11)$$

Исбот. Дар асоси хосияти 6 аз нобаробарии $m \leq f(x) \leq M$ ҳосил менамоем:

$$\int_{\text{а}}^{\text{в}} mdx \leq \int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx \leq \int_{\text{а}}^{\text{в}} Mdx$$

ё ки

$$m(\text{в} - \text{а}) \leq \int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx \leq M(\text{в} - a).$$

Нобаробарии (11) исбот шуд.

Хосияти 10 *(дар бораи қимати миёна). Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[\text{а}, \text{в}]$ бефосила бошад, он гоҳ чунин адади $\text{с} \in [\text{а}, \text{в}]$ ёфт мешавад, ки*

$$\int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx = f(c)(\text{в} - a) \qquad (12)$$

Исбот. Дар асоси бефосилагии функсияи $f(x)$ дар порчаи $[\text{а}, \text{в}]$ чунин ададҳои m ва M мавҷуд, ки барои дилхоҳ $x \in [\text{а}, \text{в}]$ нобаробариҳои зерин ҷой доранд:

$m \leq f(x) \leq M$.

Пас, дар асоси хосияти 9,

$$m(\text{в} - \text{а}) \leq \int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx \leq M(\text{в} - a)$$

Яъне,

$$m \leq \frac{\int_{а}^{в} f(x)dx}{в - a} \leq M$$

Аз дигар тараф, дар асоси бефосилагии $f(x)$ дар $[а, в]$ чунин адади $с \in [а, в]$ мавҷуд, ки

$$f(c) = \frac{\int_{а}^{в} f(x)dx}{(в - a)},$$

яъне

$$\int_{а}^{в} f(x)dx = f(c) \cdot (в - a)$$

Баробарии (12) исбот шуд.

АДАБИЁТ:

1.Ильин, В.А.Математический анализ/В.А.Ильин, В.А.Садовничий В.А., Б.Х.Сендов.-Москва, Наука.-1979.-720с.
2.Шипачев, В.С. Высшая математика/В.С.Шипачев.-Москва, Высшая школа.- 1985.-369с.
3.Кремер, Н.Ш.Математика для экономистов/ Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко И.М.Тришин.-Москва, Юнити. -2010.-648с.
4.Байзоев, С. Математикаи олӣ/С.Байзоев.- Хуҷанд, Хуросон.- 2019.-336с.
5.Мухсинов, Е.М.Математикаи олӣ/Е.М.Мухсинов, М.Н.Муродова.- Хуҷанд, Парки ДДҲБСТ. -2021.-166с.
6.Алиев, Б. Алгебра/Б.Алиев.-Душанбе, Собириён. - 2006.-183с.
7.Колмогоров А.Н. Алгебра ва ибтидои анализ/ Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Ивлев Б.М., Шварцбурд С. И.-Душанбе, Маориф. -1993.-370с.

REFERENCES:

1. Ilyin V.A., Sadovnichy V.A., Sendov B.Kh. Mathematical analysis. Moscow, Nauka.-1979.-720 p.
2. Shipachev V.S. Higher Mathematics. Moscow, Vysshaya shkola.- 1985.-369 p.
3. Kremer N.Sh., Putko B.A., Trishin I.M. Mathematics for economists.-Moscow, Unity. -2010.- 648 p.
4. Bayzoev S. Mathematics oli.. Khudand, Khuroson.- 2019.-336 p.
5. Mukhsinov E.M., Murodova M.N. Mathematics oli. Khudand, Parki DDҲBST. -2021.-166 p.
6. Aliev B. Algebra. With. 11. Dushanbe, Sobiriyon. - 2006.-183 p.
7. Kolmogorov A.N., Abramov A.M., Dudnitsyn Yu.P., Ivlev B.M., Shvartsburd S.I. Algebra and ibtidoi analysis. Dushanbe, Maorif. -1993.-370 p.