1.1.[01 01 00] МАТЕМАТИКА
1.1.[01 01 00] МАТЕМАТИКА
1.1.[01 01 00] MATHEMATICS

1.1.2.[01.01.02] МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ, СИСТЕМАҲОИ ДИНАМИКӢ, ИДОРАКУНИИ ОПТИМАЛӢ

1.1.2.[01.01.02] ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

1.1.2.[01.01.02] DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS, OPTIMAL MANAGEMENT

УДК 517.955

ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Валиев Рузибой Сангимуродович, *докторант PhD кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БГУ имени Носира Хусрава (Таджикистан, Бохтар)*

МАСЪАЛАҲО БО ШАРТҲОИ АВВАЛА БАРОИ ЯК СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДАИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО ДУ ХАТҲОИ ДОХИЛИИ СИНГУЛЯРӢ

Валиев Рузибой Сангимуродович, *докторанти PhD кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии ДДБ ба номи Носири Хусрав (Тоҷикистон, Бохтар)*

PROBLEMS WITH INITIAL DATA FOR ONE OVERDETERMINED SYSTEM OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INTERNAL SINGULAR LINES

Valiev Ruziboy Sangimurodovich, *PhD Doctoral Student of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations of the BSU named after Nosir Khusrav* ***E-mail:*** *ruziboivaliev@gmail.com*

Ключевые слова: *переопределённая система, многообразие решений, прямоугольник, сингулярные линии, свойства решений, задачи с начальными данными.*

В данной статье изучены свойства полученных решений, а также рассмотрены задачи с начальными данными. В ходе проведенного анализа для рассматриваемой переопределённой системы определено представление многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого и второго уравнений системы связаны между собой определённым образом.

Калидвожаҳо: *системаи барзиёдмуайяншуда, бисёршаклаи ҳал, росткунҷа, коэффитсиенти сингулярӣ, хосиятҳои ҳал.*

Дар мақола системаи барзиёдмуайяншудаи дидашаванда ҳангоме, ки коэффитсиентҳои муодилаҳои якум ва дуюм байни худ ба таври муайян алоқаманд мебошанд, тасвирҳои интегралии ҳал ба таври ошкор ҳосил карда шудаанд. Хосиятҳои ҳалҳои ҳосилкардашуда омӯхта шуда, масъалаҳо бо шартҳои аввала дида баромада шудаанд.

Keywords: *overdetermined system, solution manifold, rectangle, singular lines, properties of solutions, initial value problems.*

The given article dwells on the properties of the solutions obtained and considers problems with initial data. During the analysis, for the considered overdetermined system, a representation of the solution manifold is determined in explicit form when the coefficients of the first and second equations of the system are related in a certain way.

Объектом нашего исследования являются свойства приводимых решений, кроме того, мы решили рассмотреть задачи с начальными данными. Чтобы найти решение посталенной задачи, провели анализ переопределённой системы для представления многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого и второго уравнений системы связаны между собой определённым образом.

Обозначим через D прямоугольник:

$$D = \{(x, y): -a < x < a,\ 0 < y < a\},$$

$$\Gamma_1 = \{y = 0,\ -a < x < a\},\ \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < a\}$$

Далее обозначим:

$\Gamma_1^0 = \{y = x,\ 0 \le x \le a\},\ \Gamma_2^0 = \{y = -x,\ \ -a \le x \le 0\}$.

В области D рассмотрим систему уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_i(x,y), b_1(x,y),\ c_1(x,y),\ f_i(x,y), i = \overline{1,2}$ − заданные функции в области $D, m = n = 1, p \ge 2, u(x,y)$ − искомая функция.

Проблема исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и суперсингулярными коэффициентами была рассмотрена в различных трудах [1,с.15].

С использованием методики, разработанной в [5,с.7] для системы уравнений (1), получено представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

Случай 1. Пусть первое уравнение системы (1) является главным, тогда получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1)* $m = n = 1,\ p \ge 2$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}),\ b_1(x,y),$
$c_1(x,y),\ \ f_1(x,y) \in C(\overline{D});$

2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) = 0;$

3) $\frac{a(x,x)}{2x} + \frac{b(y,y)}{2y} < 1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$\frac{a(x,x)}{2x} + \frac{b(y,y)}{2y} > -1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$a_2(0,0) > 0;$

4) $|a_1(x,y) - a_1(x,x)| \le H_1|y-x|^{\alpha_1}, H_1 = const,\ 0 < \alpha_1 < 1$
в окрестности Γ_1^0,
$|a_1(x,y) - a_1(x,x)| \le H_2|x+y|^{\alpha_2}, H_2 = const,\ 0 < \alpha_2 < 1$
в окрестности Γ_2^0,
$|b_1(x,y) - b_1(y,y)| \le H_3|x-y|^{\beta_1}, H_3 = const,\ \ 0 < \beta_1 < 1$
в окрестности Γ_1^0,
$|b_1(x,y) - b_1(y,y)| \le H_4|x+y|^{\beta_2}, H_4 = const,\ \ 0 < \beta_2 < 1$
в окрестности Γ_2^0,
$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \le H_5 x^{\gamma_1}, H_5 = const,\ \gamma_1 > 2p-1;$

5) *a)* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)$ *в* D,

b) $(x^2-y^2)^{p+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) + a_1(x,y)f_2(x,y) =$

$$= (x^2-y^2)^{p+1}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p} - \frac{b_1(x,y)}{x^2-y^2}\right)\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}} exp\left[-W_{b_1}^1(x,y)\right] \times$$
$$\times\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y)}{(t^2-y^2)^2}\left|\frac{t+y}{t-y}\right|^{-\frac{b_1(y,y)}{2y}} exp\left[W_{b_1}^1(t,y)\right]dt\right) +$$
$$+(x^2-y^2)^{p-1}f_1(x,y) \text{ в } D;$$

6) $f_1(x,y) = o\left(|x-y|^{\lambda_1}\right), \lambda_1 > 1 - \frac{b_1(y,y)}{2y}$ *в окрестности* Γ_1^0,
$f_1(x,y) = o\left(|x+y|^{\lambda_2}\right), \lambda_2 > 1 + \frac{b_1(y,y)}{2y}$ *в окрестности* Γ_2^0,
$f_2(x,0) = o(x^{\mu_1}), \mu_1 > 2p-1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D\setminus(\Gamma_0^1\cup\Gamma_0^2))$ представимо в виде:

$$u(x,y)=\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{a(x,x)}{2x}}exp\left[-W_{a_1}^1(x,y)\right]\times$$

$$\times\left\{\varphi_1(x)+\int_0^y exp\left[W_{a_1}^1(x,\tau)-W_{b_1}^1(x,\tau)\right]\left|\frac{x+\tau}{\tau-x}\right|^{\frac{a_1(x,x)}{2x}}\left|\frac{x+\tau}{x-\tau}\right|^{\frac{b_1(\tau,\tau)}{2\tau}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\psi_1(\tau)+\int_0^x\frac{f_1(t,\tau)}{(t^2-\tau^2)^2}exp\left[W_{b_1}^1(t,\tau)\right]\left|\frac{t+\tau}{t-\tau}\right|^{-\frac{b_1(\tau,\tau)}{2\tau}}dt\right)d\tau\right\}\equiv$$

$$\equiv T_1\left(\varphi_1(x),\psi_1(y),f_1(x,y)\right),\qquad (2)$$

$$\varphi_1(x)=exp\left[-W_{a_2}^{2p}(x,0)+a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\times$$

$$\times\left(c_1+\int_0^x\frac{f_2(t,0)}{t^{2p}}exp\left[W_{a_2}^{2p}(t,0)-a_2(0,0)W_{2p-1}(t)\right]dt\right)\equiv$$

$$\equiv N_1\left(c_1,f_2(x,0)\right),\qquad (3)$$

$$\psi_1(y)=\frac{1}{(-y^2)a_2(0,y)-(-y^2)^p b_1(0,y)}\left[(-y^2)^{p+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)\Bigg|_{x=0}+\right.$$

$$\left.+a_1(0,y)f_2(0,y)-(-y^2)^{p-1}f_1(0,y)\right],\qquad (4)$$

$$W_{a_1}^1(x,y)=\int_0^y\frac{a_1(x,\tau)-a_1(x,x)}{x^2-\tau^2}d\tau,\ \ W_{b_1}^1(x,y)=\int_0^x\frac{b_1(t,y)-b_1(y,y)}{t^2-y^2}dt,$$

$$W_{a_2}^{2p}(x,0)=\int_0^x\frac{a_2(t,0)-a_2(0,0)}{t^{2p}}dt,\ \ W_{2p-1}(x)=\frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}},$$

c_1 *−произвольная постоянная.*

Полученное решение обладает свойствами:

1°. Если $y\to 0$, то

$$u(x,0)=\varphi_1(x).$$

2°. Если $y\to 0$ и $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\}=O\left(exp\left[a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\right).$$

$$3^\circ.\ \lim_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\}=c_1.$$

4°. Если $x\to 0$ и $y\neq 0$, то

$$u(0,y)=O\left(exp\left[a_2(0,0)W_{2p-1}(x)\right]\right).$$

5°. Если $y\to x$, то

$$u(x,y)=O\left(\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{a(x,x)}{2x}}\right),\ \text{при}\ \frac{a(x,x)}{2x}<0\ \textit{в окрестности}\ \Gamma_1^0.$$

$$u(x,y)=0,\ \text{при}\ \frac{a(x,x)}{2x}>0\ \textit{в окрестности}\ \Gamma_1^0.$$

6°. Если $y\to -x$, то

$$u(x,y)=0,\ \text{при}\ \frac{a(x,x)}{2x}<0\ \textit{в окрестности}\ \Gamma_2^0.$$

$$u(x,y)=O\left(\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{a(x,x)}{2x}}\right),\ \text{при}\ \frac{a(x,x)}{2x}>0\ \textit{в окрестности}\ \Gamma_2^0.$$

Случай 2. Пусть второе уравнение системы (1) является главным, тогда получено следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в системе уравнений* (1) $m=n=1, p\geq 2$ *коэффициенты и правые части* *удовлетворяют следующим условиям*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D})$,
$c_1(x,y),\ \ b_1(x,y),\ \ f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;

2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2-y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2-y^2}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) \neq 0$;

3) $a_2(y,y) > 0,\ a_1(0,0) > 0$;

4) $a_2(x,y) - a_2(y,y) = o((x-y)^{\mu_1}),\ \mu_1 > p-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$a_2(x,y) - a_2(y,y) = o((x+y)^{\mu_2}),\ \mu_2 > p-1$ *в окрестности* Γ_2^0,
$|a_1(0,y)\ - a_1(0,0)\,| \le H_3 y^{\mu_3},\ \ H_3 = const,\ \ \mu_3 > 1$;

5) a) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2-y^2}\right)$ *в* D,

$$b)\ \left(a_2(x,y) - b_1(x,y)\right)\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}} exp\left[-W_{b_1}^1(x,y)\right] \times$$
$$\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y)}{(t^2-y^2)^2}\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b_1(y,y)}{2y}} exp\left[W_{b_1}^1(t,y)\right]dt\right) +$$
$$+(x^2-y^2)^{p-1} f_1(x,y) = (x^2-y^2)^{p+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right) +$$
$$+a_1(x,y) f_2(x,y)\ \text{в}\ \ D;$$

6) $f_2(x,y) = o(|x-y|^{\gamma_1}),\ \gamma_1 > p-1$ *в окрестности* Γ_1^0,
$f_2(x,y) = o(|x+y|^{\gamma_2}),\ \gamma_2 > p-1$ *в окрестности* Γ_2^0.

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ *представимо в виде:*

$$u(x,y) = exp\left[-W_{a_2}^p(x,y) + a_2(y,y)J_{p-1}^{(1)}(x,y)\right]\left(\psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_2(t,y)}{(t^2-y^2)^p} \times\right.$$
$$\left.\times\, exp\left[W_{a_2}^p(t,y) - a_2(y,y)J_{p-1}^{(1)}(t,y)\right]dt\right) \equiv T_2(\psi_2(y), f_2(x,y)), \qquad (5)$$

где

$$\psi_2(y) = exp\left[W_{a_1}^2(0,y) + a_1(0,0)W_1(y)\right] \times$$
$$\left(c_2 - \int_0^y F_1(s) exp\left[-W_{a_1}^2(0,s) - a_1(0,0)W_1(s)\right]ds\right) \equiv N_2(c_2, F_1(y)), \qquad (6)$$

$$W_{a_2}^p(x,y) = \int_0^x \frac{a_2(t,y) - a_2(y,y)}{(t^2-y^2)^p}dt,$$

$$J_{p-1}^{(1)}(x,y) = \frac{x}{2(p-1)y^2(x^2-y^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)y^2}\int_0^x \frac{dt}{(t^2-y^2)^{p-1}},$$

$$W_{a_1}^2(0,y) = \int_0^y \frac{a_1(0,s) - a_1(0,0)}{s^2}ds,\ W_1(y) = \frac{1}{y},$$

$$F_1(y) = \frac{1}{a_2(x,y) - b_1(x,y)}\left[(-y^2)^{p+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}\right)\Bigg|_{x=0} +\right.$$
$$\left.+a_1(0,y) f_2(0,y) - (-y^2)^{p+1} f_1(0,y)\right],$$

c_2 *–произвольная постоянная.*

Полученное решение обладает свойствами

1°. Если $x \to 0$, то
$u(0,y) = \psi_2(y)$.

2°. Если $x \to 0$ и $y \to 0$, то

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\}=O(exp[a_1(0,0)W_1(y)]).$$

3°. $\lim_{y\to 0}\left\{exp[-a_1(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\}=c_2.$

4°. Если $y\to x$, то

$$u(x,y)=\ O\left(exp\left[a_2(y,y)J_{p-1}^{(1)}(x,y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y\to -x$, то

$$u(x,y)=\ 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Полученные интегральные представления решений и их свойства дают возможность для системы уравнений (1) ставить и решать следующие задачи с начальными данными.

Задача K_1. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D\setminus(\Gamma_0^1\cup\Gamma_0^2))$ по начальному условию

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)]\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\}=m_1,$$

где m_1 − заданная известная постоянная.

Задача K_2. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D\setminus(\Gamma_1^0\cup\Gamma_2^0))$ по начальному условию

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp[-a_1(0,0)W_1(y)]\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\}=m_2,$$

где m_2 − заданная известная постоянная.

Решение задачи K_1. Используя интегральные представления решений системы уравнений (2), (3), (4) и условие задачи K_1, имеем: $c_1=m_1$.

Теорема 3. *Если в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют всем условиям теоремы 1, тогда единственное решение задачи K_1 выражается формулами (2), (3), (4), где $c_1=m_1$.*

Решение задачи K_2. Для решения этой задачи используем интегральное представление решений (5), (6) и условие задачи K_2 и получим, что $c_2=m_2$.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 2, тогда единственное решение задачи K_2 представимо в виде (5), (6), где $c_2=m_2$.*

Таким образом, мы смогли представить многообразие решения таких видов задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Sur-faces.-Zeip. Zig; Leubner, 1906.- 120 p.
2. Гайшун, И. В. Линейные уравнения в полных производных/И.В.Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. – 273 с.
3. Михайлов, Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями/Л.Г.Михайлов.–Душанбе: изд. Дониш, 1986. – 115с.
4. Михайлов, Л.Г. К теории пльных дифференциалов с сингулярными точками /Л.Г.Михайлов// ДАН России. – 1992. – Т. 322, №4. – с. 646 - 650.
5. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами/Н.Раджабов.- Душанбе. изд. ТГУ, 1992. - 236с.
6. Раджабов, Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения /Н.Раджабов.-Душанбе:изд. Деваштич 2007 .- 221с.
7. Раджабов, Н., Махамед Эльсаед Абдель Аал. Переопределеная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями. - Lap Lambert Academic Publishing,Germany, 2011.- 234с.
8. Хартман,Ф.Обыкновенные дифференциальные уравнения/Ф.Хартман.–М.:Мир,1970. – 720 с.
9. Тасмамбетов, Ж.Н. О развитии исследований специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка/Ж.Н.Тасмамбетов// Материалы международной научно-практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании»; г.Актобе 20-21 февраля 2015г. - С. 6-17.
10. Тасмамбетов, Ж. Н. Построение нормальных и нормально–регулярных решений

специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка/ Ж.Н.Тасмамбетов.–Актобе: 2015. – 463 с.
11. Шамсуддинов, Ф. М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностю/Ф.М.Шамсудинов// Доклады Адыгской (Черкеской) Международной академии наук.2014. Т. 16, №1. - С. 40-46.
12. Шамсуддинов, Ф. М. Об одной переопределенной системе дифферен-циальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой/Ф.М.Шамсуддинов// Вестн.Волгогр.гос.ун-та. Сер. Мат. Физ. 2016., №6(37). - С.99-107.
13. Шамсудинов, Ф. М. Об исследовании одного класса гиперболических уравнений второго порядка и с связанных с ними переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными точками. [Текст]: дис… докт. физ.-мат. наук: 010102: защищена 25.12.19.: утв. 25.09.20 / Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич. -Д., 2019.-355с.-Библиогр.: с.338-355.
14. Шамсудинов, Ф. М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью.\ Ф.М. Шамсудинов/Ф.М.Шамсуддинов// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2015.- №1\4(168). - с.37-42.
15. Шамсудинов, Ф. М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы второго порядка с сингулярной точкой/Ф.М.Шамсудинов//Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2015.- №1/1(156). - с.60 - 65.

REFERENCES:

1. Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Sur-faces.-Zeip.Zig; Leubner, 1906.- 120 p.
2. Gaishun, I. V. Linear equations in total derivatives. –Minsk: Science and Technology,1983. – 273 p.
3. Mikhailov L.G. Some overdetermined systems of partial differential equations with two unknown functions. – Dushanbe: ed. Donish, 1986. – 115 p.
4. Mikhailov L.G. On the theory of linear differentials with singular points//Dokl.Akad.–1992.–T. 322, No.4.-With.646-650.
5. Radjabov N. Introduction to the theory of partial differential equations with supersingular coefficients. - Dushanbe. ed. TSU,1992.-236 p.
6. Radjabov, N. Integral equations of Volterra types with fixed boundary and internal singular and supersingular kernels and their applications.- Dushanbe: ed. Devashtich 2007.-221 p.
7. Radjabov N., Mahamed Elsayed Abdel Aal. An overdetermined second-order linear system with singular and supersingular lines.-Lap Lambert Academic Publishing, Germany,2011.- 234c.
8. Hartman F. Ordinary differential equations.–M.:Mir,1970.–720 p.
9. Tasmambetov,Zh.N.On the development of research into special systems of partial differential equations of the second order // Materials of the international scientific and practical conference «Information technologies: innovations in science and education»; Aktobe February 20-21, 2015 - P. 6-17.
10. Tasmambetov Zh. N. Construction of normal and normally-regular solutions of special systems of second-order partial differential equations. – Aktobe: 2015. – 463 p.
11. Shamsuddinov F. M. On one overdetermined system of second-order differential equations with a strong singularity // Reports of the Adyghe (Cherkessia) International Academy of Sciences. 2014. T. 16, No. 1. - P. 40-46.
12. Shamsuddinov F. M. On one overdetermined system of second-order differential equations with a singular point // Vestn.Volgogr.gos.un-ta. Ser. Mat. Phys. 2016., No. 6(37). - P.99-107.
13. Shamsudinov F. M. On the study of one class of second-order hyperbolic equations and related overdetermined systems of differential equations with singular and supersingular points. [Text]: dis... doc. physics and mathematics Sciences: 010102: protected 12/25/19: approved. 09.25.20 / Shamsudinov Faizullo Mamadulloevich. -D., 2019.-355 p.-Bibliography: p.338-355.
14. Shamsudinov F. M. Integral representations of solutions for one overdetermined system of second-order differential equations with a strong singularity.\ F.M. Shamsudinov // Bulletin of the Tajik National University. Natural Sciences Series. - 2015.- No. 1\4(168). - p.37-42.
15. Shamsudinov F. M. Integral representations of solutions for one overdetermined second-order system with a singular point. / F.M. Shamsudinov // Bulletin of the Tajik National University. Natural Sciences Series. - 2015.- No. 1/1(156). - p.60 – 65.