1.1.[01 01 00]МАТЕМАТИКА
1.1.[01 01 00]МАТЕМАТИКА
1.1.[01 01 00]MATHEMATICS

1.1.1.[01.01.01]ТАҲЛИЛИ ҲАҚИҚӢ, КОМПЛЕКСӢ ВА ФУНКСИОНАЛӢ
1.1.1.[01.01.01]ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1.1.1.[01.01.01]REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.5

СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА ВСЕЙ ОСИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С ВЕСОМ ЭРМИТА

***Тухлиев Камаридин**, д.физ.-мат. наук, проф. кафедры информатики и вычислительной математики; **Маликов Абдумумин Маликович**, к. физ.-мат. наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики ГОУ “ХГУ имени акад.Б.Гафурова (Таджикистан,Худжанд)*

НАЗДИККУНИИ МУШТАРАКИ ФУНКСИЯҲО ДАР ТАМОМИ ТИР АЗ РУИ ПОЛИНОМҲОИ АЛГЕБРАВӢ БО ВАЗНИ ЭРМИТ

***Тухлиев Қамаридин,** д.и.физ.-мат., проф. кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарор; **Маликов Абдумумин Маликович,** н. и.физ.-мат., дотсенти кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарори МДТ “ДДХ ба номи акад. Б. Ғафуров (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

JOINT APPROXIMATION OF FUNCTIONS ON THE WHOLE AXIS BY ALGEBRAIC POLYNOMIALS WITH HERMITIAN WEIGHT

***Tukhliev Kamaridin**, Dr. of Physics and Mathematics, Prof. of the Department of Informatics and Computational Mathematics, **E-mail:**kamaridin.t54@mail.ru; **Malikov Abdumumin Malikovich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ass. Prof.of the Department of Informatics and Computational Mathematics under the SEI “KhSU named after acad. B.Gafurov”(Tajikistan, Khujand), **E-mail:** mumin_mss@inbox.ru*

***Ключевые слова:** наилучшее приближение, алгебраический полином, ряд Фурье-Эрмита, обобщенный модуль непрерывности*

В статье решается экстремальная задача о наилучшем совместном приближении функций, суммируемых с квадратом на всей оси, алгебраическими полиномами с весом Эрмита. А также получено точное неравенство типа Джексона-Стечкина между наилучшими совместными приближениями самой функции и её последовательными производными в среднем на вещественной оси рядов Фурье-Эрмита.

***Вожаҳои калидӣ:** наздиккунии беҳтарин, полиноми алгебравӣ, силсилаи Фурйе-Эрмит, модули умумии муттасилӣ*

Дар мақола масъалаи экстремалӣ оид ба наздикшавии беҳтарини муштараки функсияҳое, ки бо квадрати тамоми меҳвар бо полиномҳои алгебравӣ бо вазни Эрмит ҷамъ карда мешаванд, ҳал карда мешавад. Инчунин нобаробарии дақиқи навъи Ҷексон-Стечкин байни беҳтарин наздикшавии муштараки худи функсия ва ҳосилаҳои пайдарпайи ба ҳисоби миёна дар меҳвари воқеии силсилаи Фурйе-Эрмит оварда шудааст.

***Key words**: best approximation, algebraic polynomial, Fourier-Hermite series, generalized modulus of continuity*

An extremal problem on the best joint approximation of functions summable with a square on the entire axis by algebraic polynomials with Hermite weight is solved. As well as, it is obtained an exact inequality of the Jackson-Stechkin type between the best joint approximations of the function itself and its successive derivatives on the average on the real axis of the Fourier-Hermite series.

В нашей статье мы будем иметь дело с такими понятиями и определениями, которые опишем ниже.

Пусть $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ - гильбертово пространство вещественных функций f, квадрат которых суммируем с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, с конечной нормой

$$\| f \|_{2,\rho} := \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Введем следующие обозначения: $\mathcal{P}_n$ - подпространство алгебраических полиномов степени не более n;

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} := \inf\{\| f - p_{n-1} \|_{2,\rho} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

– величины наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\rho}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$.

Следует отметить, что в весовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ обычные вопросы полиномиальных приближений функций суммами Фурье – Эрмита, гладкостные характеристики которых определялись специальными модулями непрерывности, ранее исследовалось в работах [1,с.9]. Однако, вопросы совместного приближения функций и их промежуточных производных суммами Фурье – Чебышева относительно мало изучены в вышеуказанных работах. Данная работа посвящена изучению совместного приближения функций и их промежуточных производных и является дальнейшим развитием идей и результатов работ [3, с.4].

Приводим определения и некоторые свойства полиномов Чебышева - Эрмита.

Пусть на действительной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ задана весовая функция

$$\rho(x) = e^{-x^2}, \ x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Последовательно дифференцируя $\rho(x)$, находим

$$\rho'(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$\rho''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2},$$
$$\rho'''(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2}$$
$$\rho^{(IV)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}, \ \ldots \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$e^{x^2}\rho(x) \equiv 1 = H_0(x),$$
$$e^{x^2}\rho'(x) = -2x = H_1(x),$$
$$e^{x^2}\rho''(x) = (4x^2 - 2) = H_2(x),$$
$$e^{x^2}\rho'''(x) = (-8x^3 + 12x) = H_3(x),$$
$$e^{x^2}\rho^{(IV)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12) = H_4(x), \qquad (3)$$

где $H_n(x)$ - некоторый многочлен степени n. Из приведенных равенств в (3) по индукции вытекает, что производная порядка n от функции $\rho(x)$ есть произведение от этой функции на некоторые многочлены степени n, а потому для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} \qquad (4)$$

которое называется многочленом Чебышева - Эрмита степени n. Из (3) и (4) вытекает, что старший член многочлена $H_n(x)$ равен $(-1)^n(-2)^n = 2^n$, то есть

$$H_n(x) = 2^n x^n + \ldots \qquad (5)$$

Первые несколько многочленов Чебышева - Эрмита, как следует из (3) и (4), имеют вид:

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,$$
$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.$$

Покажем, что многочлены $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на всей оси $\mathbb{R}$ ортогональны с весовой функцией (1). С этой целью вычислим рекуррентно интеграл

$$J_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx. \qquad (6)$$

Применяя формулу (4) и интегрируя по частям, находим

$$J_{mn} = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} H_m(x) dx = (-1)^{(n)} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) (e^{-x^2})^{(n)} dx =$$
$$= (-1)^{(n)} [H_n(x)(e^{-x^2})^{(n)}]|_{-\infty}^{+\infty} - (-1)^{(n)} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(x)(e^{-x^2})^{(n-1)} dx.$$

Вне интегральные члены ввиду наличия в них экспоненциального множителя $exp(-x^2)$ равны нулю. Повторяя интегрированием по частям в последнем интеграле последовательно ещё $(n-1)$ раз, получим

$$J_{mn} = (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m''(x)(e^{-x^2})^{(n-2)} dx = \ldots =$$

$$= (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(x) e^{-x^2} dx. \qquad (7)$$

Из интеграла, стоящего в правой части (7), ясно, что если $m < n$, то $H_m^{(n)}(x) \equiv 0$. Следовательно, в этом случае из (6) вытекает, что

$$J_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0,$$

если $m < n$ или $m > n$.

Если же $m = n$, то в силу (5) имеем

$$J_{nn} = n!\, 2^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = n!\, 2^n \sqrt{\pi}.$$

Следовательно, ортонормированный многочлен Чебышева - Эрмита имеет вид

$$\widehat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}. \qquad (8)$$

Ради простоты, без умаления общности, не вводя новые обозначения, через $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обозначим полную ортонормированную систему функций в пространстве $L_{2,\rho}$ на всей оси $\mathbb{R}$.

Хорошо известно [1], что любая функция $f \in L_{2,\rho}$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \qquad (9)$$

где

$$c_k(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$$

– коэффициенты Фурье - Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$, а равенство (9) понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}$.

Если через

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) H_k(x)$$

обозначить частичную сумму $(n-1)$-го порядка ряда Фурье - Эрмита (9) функции $f \in L_{2,\rho}$, то

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} = \| f - S_{n-1}(f) \|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (10)$$

Для $t \in \mathbb{R}$, $|t| \le 1$ рассмотрим оператор обобщенного сдвига с шагом t, действующий на функции $f \in L_{2,\rho}$ по правилу:

$$T_t(f; x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x\sqrt{1-t^2} + ty) e^{-y^2} dy,$$

при этом справедливо [1] (в справедливом равенстве $L_{2,\rho}$)

$$T_t(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)(1-t^2)^{\frac{k}{2}} H_k(x). \qquad (11)$$

Следуя [3], образуем аналоги конечных разностей

$$\Delta_t^1(f, x) := T_t(f, x) - f(x) = (T_t - E)f(x),$$

$$\Delta_t^m(f, x) := \Delta_t^1(\Delta_t^{m-1}(f, \cdot), x) = (T_t - E)^m f(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} T_t^k(f, x), \qquad (12)$$

где $m = 2,3,\ldots$, $T_t^k := T_t^1(T_t^{k-1}), T_t^1 := T_t$, $T_t^0 = E$ – единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}$. С помощью равенств (9),(11),(12) получаем

$$\Delta_t^m(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\left((1-t^2)^{k/2} - 1\right)^m H_k(x).$$

Откуда, воспользовавшись равенством Парсеваля, приходим к соотношению

$$\| \Delta_t^m(f, x) \|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (1-t^2)^{k/2}\right)^{2m} c_k^2(f).$$

Для $f \in L_{2,\rho}$ следующую функцию переменного $\delta \ge 0$:

$$\Omega_m(f, \delta)_{2,\rho} := \sup\left\{\| \Delta_t^m(f, \cdot) \|_{2,\rho}^2 : |t| \le \delta\right\} =$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\left(1 - (1-\delta^2)^{k/2}\right)^{2m}\right\}. \qquad (13)$$

назовем обобщенным модулем непрерывности порядка m функций f.

Пусть $L_{2,\rho}^{(0)} \equiv L_{2,\rho}$. При $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $L_{2,\rho}^{(r)}$ множество функций $f \in L_{2,\rho}$, у которых производные $f^{(r-1)}$ порядка $r-1$ абсолютно непрерывны на любом конечном интервале, а производные $f^{(r)}$ порядка r принадлежат пространству $L_{2,\rho}$. Всюду далее, ради краткости, полагаем

$$\alpha_{n,0} = 1, \qquad \alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1) \quad \text{при} \quad n \ge r, \qquad n, r \in \mathbb{N}.$$

Условимся далее отношение 0/0 считать равным 0 и при вычислении верхних граней по всем функциям $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ предполагать, что $f \notin \mathcal{P}_r$. Отметим, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ в [1] доказано следующее разложение её r-й производной $f^{(r)}$ в ряд Фурье - Эрмита:

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f)\sqrt{2^r\alpha_{k,r}}H_{k-r}(x), \qquad (14)$$

причем ряд, стоящий в правой части (14), сходится в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$. Исходя из разложения функции f в ряд (9) и разложения производной $f^{(r)}$ в ряд (14), применением равенства Парсеваля получаем следующие равенства

$$\| f \|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f),$$

$$\| f^{(r)} \|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} c_k^2(f)\cdot 2^r\alpha_{k,r}, \qquad (15)$$

где в ряд правой части (15), ради простоты, введено обозначение

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\ldots(k-r-1),\ k \geq r,\quad k,r \in \mathbb{N}.$$

Более того простые вычисления показывают, что для произвольных натуральных $n \geq r$ значение величины наилучшего приближения функции $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-r}$ равно

$$E_{n-r}(f^{(r)})_{2,\rho} = \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)2^r\alpha_{k,r}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (16)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для произвольной функции* $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}. \qquad (17)$$

Доказательство. Учитывая соотношения $(10), (1014)$ и (16), С.Б.Вакарчук [3, с.669] доказал неравенство

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r\cdot\alpha_{n,r}}}\cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}. \qquad (18)$$

Для функции $f_0(x) := H_n(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $n \geq r$, неравенство (18) обращается в равенство. В самом деле, в силу (10) $E_{n-1}(f_0) = 1$ и на основании (14) имеем:

$$f_0^{(r)}(x) = \sqrt{2^r\alpha_{n,r}}H_{n-r}(x),$$

откуда

$$E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho} = \sqrt{2^r\alpha_{n,r}}. \qquad (19)$$

Отсюда вытекает равенство (17) и завершаем доказательство теоремы 1.

Имеет место также следующая более общая

Теорема 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ r,s \in \mathbb{Z}_+$ *и* $n > r \geq s$. *Тогда для* $s \in [0,r]$ *справедливо точное неравенство*

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho} \leq 2^{-(r-s)}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\rho}. \qquad (20)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любых $k,n \in \mathbb{N}, r,s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих ограничение $k \geq n > r \geq s$, справедливо равенство

$$\max_{k\geq n}\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} = \max_{k\geq n}\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,s}\cdot\alpha_{k-s,r-s}} = \max_{k\geq n}\frac{1}{\alpha_{k-s,r-s}} = \frac{1}{\alpha_{n-s,r-s}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \qquad (21)$$

Учитывая равенство (21) и формулу (16), будем иметь

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho}=\sum_{k=n}^{\infty}2^s\alpha_{k,s}c_k^2(f)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^s\alpha_{k,s}}{2^r\alpha_{k,r}}\cdot 2^s\alpha_{k,r}c_k^2(f)\leq$$

$$\leq 2^{-(r-s)}\max_{k\geq n}\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}2^r\alpha_{k,r}c_k^2(f)=2^{-(r-s)}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho},$$

и неравенство (20) доказано. Для функции $f_0(x)=H_n(x)\in L_{2,\rho}^{(r)}$, рассмотренной нами при доказательстве теоремы 1 в полученном неравенстве знак неравенства обращается в равенство. Действительно, дифференцируя s - раз функцию f_0, в силу (14) получаем

$$f_0^{(s)}(x)=\sqrt{2^s\alpha_{k,s}}\cdot H_{k-s}(x),$$

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho}=\sqrt{2^s\alpha_{n,s}}\ . \qquad (22)$$

Пользуясь равенствами (19) и (22), запишем

$$E_{n-s-1}^2(f_0^{(s)})_{2,\rho}=2^s\alpha_{n,s}=2^{-(r-s)}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot(2^r\cdot\alpha_{n,r})=$$

$$=2^{-(r-s)}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-r-1}^2(f_0^{(r)})_{2,\rho}\ .$$

Этим точность неравенства (20) установлено, чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Обозначим через $W^{(r)}L_{2,\rho}$ класс функций $f\in L_{2,\rho}^{(r)}$ для которых выполняется следующая неравенство $\|f^{(r)}\|_{2,\rho}\leq 1$.

Теорема 3. *Пусть* $n\in\mathbb{N},\ \ r,s\in\mathbb{Z}_+, r\geq s$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\rho}}\frac{E_{n-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{2,\rho})^{1-s/r}}=\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}. \qquad (23)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию f из класса $W^{(r)}L_{2,\rho}$, которая не является элементом подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. Очевидно, что производные $f^{(s)}(0\leq s\leq r; f^{(0)}=f)$ также принадлежат множеству $W^{(r)}L_{2,\rho}$. Тогда в силу соотношений (10) и (16) запишем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}=\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\ , \qquad (24)$$

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho}=\sum_{k=n}^{\infty}2^s\alpha_{k,s}c_k^2(f), \qquad (25)$$

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\rho}=\sum_{k=n}^{\infty}2^r\alpha_{k,r}c_k^2(f). \qquad (26)$$

Используя формулы $(24)-(2426)$, неравенство Гельдера для производной $f^{(s)}(0\leq s\leq r)$, получаем неравенство типа Колмогорова

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho}=\sum_{k=n}^{\infty}2^s\alpha_{k,s}c_k^2(f)=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^s\alpha_{k,s}}{(2^r\alpha_{k,r})^{s/r}}\cdot(2^r\alpha_{k,s}c_k^2(f))^{\frac{s}{r}}\cdot(c_k^2(f))^{1-\frac{s}{r}}\leq$$

$$\leq \max_{k\geq n}\frac{2^s\alpha_{k,s}}{(2^r\alpha_{k,r})^{s/r}}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\left(2^r\alpha_{k,r}c_k^2(f)\right)^{\frac{s}{r}}\cdot\left(c_k^2(f)\right)^{1-\frac{s}{r}}\leq$$

$$\leq \max_{k\geq n}\frac{\alpha_{k,s}}{(\alpha_{k,r})^{s/r}}\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}2^r\alpha_{k,r}c_k^2(f)\right)^{\frac{s}{r}}\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right)^{1-\frac{s}{r}}\leq$$

$$\leq\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}\cdot\left(E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\rho}\right)^{\frac{s}{r}}\cdot\left(E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}}.$$

Если $f\in W^{(r)}L_{2,\rho}$, то отсюда будем иметь

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho}\leq\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}\cdot\left(E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}},$$

откуда следует оценка сверху

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\rho}}\frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}}}\leq\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{\frac{s}{r}}}\,. \qquad (27)$$

С целью получения оценки снизу той же величины для рассмотренной нами выше функции $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n\alpha_{n,r}}}H_n(x)$, для которой

$$E_{n-1}(f_1)_{2,\rho}=\frac{1}{\sqrt{2^n\alpha_{n,r}}},$$

$$E_{n-s-1}(f_1^{(s)})_{2,\rho}=\sqrt{\frac{2^s\alpha_{n,r}}{2^n\alpha_{n,r}}},$$

имеем:

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_2}\frac{E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}}}\geq\frac{E_{n-s-1}^2(f_1^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}(f_1)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}}}=$$

$$=\frac{2^s\alpha_{n,s}}{2^r\alpha_{n,r}}\cdot\left(2^r\alpha_{n,r}\right)^{1-\frac{s}{r}}=\frac{2^s\alpha_{n,s}}{2^s(\alpha_{n,r})^{\frac{s}{r}}}=\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{\frac{s}{r}}}. \qquad (28)$$

Сравнивая оценку сверху (27) с оценкой снизу (28), получаем требуемое равенство (23), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Пользуясь определением обобщ$\ddot{\chi}$нного модуля непрерывности (13) для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}^{(2)}$, после простых вычислений получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)},t)_{2,\rho}=2^r\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k^2(f)\cdot\left(1-(1-t^2)^{\frac{k-r}{2}}\right)^{2m}. \qquad (29)$$

Далее в работе получено точное неравенство типа Джексона-Стечкина между наилучшими совместными приближениями самой функции и е$\ddot{\chi}$ последовательными производными в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Эрмита.

Напомним, что под неравенствами типа Джексона – Стечкина в широком смысле в любом нормированном пространстве X понимают соотношения вида

$E_{n-1}(f)_X\leq\chi\, n^{-r}\Omega_m(f^{(r)};\delta)_X,\quad r\in\mathbb{Z}_+,\qquad \delta>0,$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через заданную характеристику гладкости Ω_m самой приближаемой функции или некоторой её производной $f^{(r)} \in X$.

Имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть* $m, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$. *Тогда при всех* $n, r \in \mathbb{N}, n > r$ *справедливо точное неравенство*

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho} \leq 2^{-(r-s)}(\alpha_{n,s}/\alpha_{n,r})\frac{\Omega_m^2(f^{(r)},t)_{2,\rho}}{(1-(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}})^{2m}}. \qquad (30)$$

Доказательство. Учитывая равенство (25), из равенства (29) находим

$$\Omega_m^2(f^{(r)},t)_{2,\rho} \geq 2^r \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k^2(f) \cdot \left(1-(1-t^2)^{(k-r)/2}\right)^{2m}$$

$$2^{r-s} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}} \cdot 2^s \alpha_{k,s} c_k^2(f) \cdot \left(1-(1-t^2)^{(k-r)/2}\right)^{2m} \geq$$

$$\geq 2^{r-s} \min_{k \geq n} \left\{\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}}\left(1-(1-t^2)^{(k-r)/2}\right)^{2m}\right\} \sum_{k=n}^{\infty} 2^s \alpha_{k,s} c_k^2(f) =$$

$$= 2^{r-s} \cdot \left\{\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\left(1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{2m}\right\} \cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho},$$

откуда и следует неравенство (30).

Докажем точность неравенства (30). Для функции $f_0(x) = H_n(x) \in L_{2,\rho}^{(r)}$, кроме равенства (22) в силу равенства (29) получим

$$\Omega_m^2(f_0^{(r)},t)_{2,\rho} = 2^r \alpha_{n,r} \cdot \left(1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{2m}.$$

Пользуясь этими равенствами, запишем

$$E_{n-s-1}^2(f_0^{(s)})_{2,\rho} = 2^s \alpha_{n,s} = 2^{-(r-s)}(\alpha_{n,s}/\alpha_{n,r})\frac{\Omega_m^2(f_0^{(r)},t)_{2,\rho}}{(1-(1-t^2)^{(n-r)/2})^{2m}},$$

откуда и вытекает точность неравенства (30), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Абилов, В.А. О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье-Эрмита/В.А.Абилов// Изв.вузов. Матем.-1972.-№3.-С.3-9.
2. Вакарчук, С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов/С.Б.Вакарчук// Матем.заметки, 2014, т.95.-№5.-С.666-684.
3. Маликов, А.М. О наилучшем приближении в среднем алгебраическими полиномами с весом/А.М.Маликов//Ученые записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки. 2018.- № 4(47).- С.3-8.
4. Рафальсон, С.З. О приближении функций в среднем суммами Фурье-Эрмита/С.З.Рафальсон// Изв.вузов. Матем.-1968.-№7.-С.78-84.
5. Тухлиев, К.О приближении функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышёва-Эрмита/К.Тухлиев, А.М.Маликов//ДАН РТ.– 2016.–Т.59. – 7-8. – С.282–289.
6. Тухлиев, К.Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева-Эрмита алгебраическими полиномами/К.Тухлиев, А.М.Туйчиев//Труды ИММ УрО РАН. – 2020. – Т.26. – 2. – С.270–277.
7. Тухлиев, К.О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва в $L_{2,\mu}[-1,1]$. – /К.Тухлиев, Дж.Х.Бекназаров// ДАН РТ. 2014, т.57, 3, С. 177-183.
8. Фройд, Г. Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси. /Г.Фройд//ДАН СССР.- 1970.- Т.191.-2 . С.293-294.
9. Федоров, В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева-Эрмита/В.М.Федоров// Изв.вузов.Матем.-1984.-№ 6.- С.55-63.

10. Шабозов, М.Ш. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам/М.Ш.Шабозов, М.С.Саидусайнов//Труды Инситута математики и механики УрО РАН, 2019, т.25.-№ 2.- С.258-272.

REFERENCES:

1. Abilov, V.A. On the order of approximation of continuous functions by arithmetic means of partial sums of the Fourier/V.A.Abilov//Hermite series. – Izv.university. Mat., 1972.-№3- P.3-9.
2. Vakarchuk, S.B. Approximation of functions on average on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev-Hermite weights and widths of function classes. – Mathematical notes, 2014. V.95. №5. P.666-684.
3. Malikov, A.M. On the best approximation in average by algebraic polynomials with weight. – Scientific notes of KhSU named after. B. Gafurova, Series of natural and economic sciences. 2018. №4(47), P.3-8.
4. Rafalson, S.Z. On the approximation of functions on average by Fourier-Hermite sums. Tidings of University/ S.Z. Rafalson //Mathematics, 1968.- №7.- P.78-84.
5. Tukhliev K. Mean square approximation of functions on the entire axis with Chebyshev-Hermite weight by algebraic polynomials/K.Tukhliev,A.M.Tuychiev//Proceedings of the Institute of Mechanics and Mathematics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. – 2020. V.26. №2.-P.270–277.
6. Tukhliev, K.On the best approximation of functions by Fourier-Chebyshev sums in L_(2,μ) [-1,1]/ K.Tukhliev, J.H.Beknazarov //. – DAN RT. 2014. V.57.-№3.- P.177-183.
7. Tukhliev, K., Malikov A.M. On the approximation of functions on average on the entire axis by algebraic polynomials with Chebyshev/ K.Tukhliev, A.M.Malikov// Hermite weight. – DAN RT. – 2016. V.59.-№7-8. P.282–289.
8. Freud, G. On approximation with weight by algebraic polynomials on the real axis/G.Freud// DAN USSR, 1970.- V.191.-2. P.293-294.
9. Fedorov, V.M. Approximation by algebraic polynomials with Chebyshev-Hermite weight/ V.M. Fedorov//Izvestiya vuzov.Mat., 1984.-№6.- P.55-63.
10. Shabozov, M.Sh.Mean square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums over orthogonal systems/M.Sh.Shabozov, M.S.Saidusaynov//Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2019. V.25.-№2.- P.258-272.