i

УДК 517.946

ЗАДАЧА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ В КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Шокирова Мухбира Мухторхоновна*, старший преподаватель кафедры информационно-коммуникационных технологий и программирования, ТГУПБП (Таджикистан, Худжанд)*

МАСЪАЛАИ РИМАН – ГИЛБЕРТ БАРОИ ҲАЛЛИ СИСТЕМАИ УМУМИКАРДАШУДАИ КОШИ-РИМАН БО НУҚТАИ СИНГУЛЯРӢ ДАР СОҲАИ ДОИРАВӢ

Шокирова Мухбира Мухторхоновна, *муаллими калони кафедраи технологияҳои иттилоотию коммуникатсионӣ ва барномарезии ДДҲБСТ (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

FOR CONTINUOUS SOLUTIONS OF A SPECIAL CLASS OF MODEL GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN SYSTEMS WITH A SINGULAR POINT, THE RIEMANN HILBERT PROBLEM IN A CIRCULAR ROMAIN IS STUDIED

Shokirova Mukhbira Mukhtorkhonovna, *Senior lecturer of the Depattment of Information and Communication Technologies and Programming, TSULBP (Tajikistan, Khujand),*
E-mail: *shokirova2002 _1977 @ mail.ru*

Ключевые слова: *модельное уравнение, обобщенная система Коши-Римана, сингулярная точка, круговая область, задача Римана – Гильберта*

Для непрерывных решений специального класса модельных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярной точкой изучается задача Римана – Гильберта в круговой области $|z| \le R$. *В статье по отдельности рассматриваются случаи, когда в краевой задаче* $m > 0, m < 0$ *и* $\alpha_1 \ge 0$.

Вожаҳои калидӣ: *муодилаи моделӣ, системаи умумикардашудаи Коши-Риман, нуқтаи сингулярӣ, соҳаи доиравӣ, масъалаи Риман - Гилберт*

Ҳалли бефосилаи системаи умумикардашудаи Коши-Риман бо нуқтаи сингулярӣ масъалаи Риман – Гилберт дар соҳаи доиравӣ $|z| \le R$ *омухта шудааст. Дар мақола ҳолатҳои* $m > 0, m < 0$ *ва* $\alpha_1 \ge 0$ *дар алоҳидагӣ мавриди баррасӣ қарор гирифтаанд.*

Key words*: model equation, generalized Cauchy-Riemann system, singular point, circular domain, Riemann-Hilbert problem*

Continuous solutions of the generalized Cauchy-Riemann system with a single point the Riemann-Gilbert question in the field of the cycle is studied $|z| \le R$. *The article discusses cases* $m > 0, m < 0$ *and* $\alpha_1 \ge 0$ *individually*

Для обобщенной системы Коши-Римана вида

$$\partial_{\bar z}\Psi - \frac{\alpha}{2\bar z}\Psi - \frac{\lambda}{2\bar z}\overline{\Psi} = 0,\ z \in G, \tag{1}$$

где $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y,$ $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \ne 0,$ и $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \ne 0 -$ произвольные комплексные числа, $\Psi(z)$ - искомая функция изучается краевая задача:

Постановка задачи.

Отыскать в области $G = \{z : 0 \le |z| < R\}$ решения системы (1), удовлетворяющие на $\Gamma = \{z : |z| = R\}$ условию

$$\operatorname{Re}\left[z^{-m}\Psi(z)\right] = h(z). \tag{2}$$

Здесь $m-$целое число. Решения рассматриваются в классе непрерывных в области $G=\{z:|z|<R\}$ и непрерывно - дифференцируемых в области $G_0=G-\{0\}$ функций, что обозначается $C^1(G_0)$. Все обозначения заимствованы у Р. Ахмедова [5].

Функция $\Psi(z)$ принадлежит вышеуказанному классу, и заданная функция $h(R,\varphi)$ разложима по φ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$h(\varphi)=h_0+\frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}h_k e^{i\kappa\varphi}+\overline{h}_k e^{-i\kappa\varphi}.$$

где

$$h_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\varphi)d\varphi,\quad h_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi,\quad k=1,2,... \tag{3}$$

Задача называется однородной, если $h(z)\equiv 0$.

Случай, когда $\alpha=0$ и обобщенная система Коши - Римана (1) принимает вид

$$\partial_{\bar{z}}\Phi-\frac{\lambda}{2\bar{z}}\overline{\Phi}=0,\ z\in G, \tag{4}$$

полностью изучена З.Д. Усмановым в работах [1], [2], [3], [4].

Им исследованы краевые задачи Дирихле и задача Римана – Гильберта для решения уравнения (4).

Задача (1)-(2) в случае, когда $\alpha-$вещественное число полностью изучена Р. Ахмедовым в [5], [6], и когда $\alpha-$комплексное число, им исследована краевая задача Дирихле [7].

Краевая задача (1) и (2), когда в уравнение (1) $\alpha-$комплексное число и её реальное часть $\alpha_1\geq 0$ и $m>0, m<0$ неузечена. Эти случаи рассматриваются в данной статье.

Исследование краевой задачи будет основываться на представлении общего решения модельного уравнения (1), который (см [8], [9], [10]), имеет вид:

$$\Psi(z)=i\cdot(\overline{\lambda}-P_{20})\cdot a_0\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda a_k f_k(r)\cdot e^{ik\varphi}+\overline{P_{1k}a_k f_k(r)}e^{-ik\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}+$$

$$+i\cdot(\overline{\lambda}+P_{10})\cdot b_0\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{10}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda b_k\overline{f_k(r)}e^{ik\varphi}-\overline{P_{2k}b_k}f_k(r)e^{-ik\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}}, \tag{5}$$

где,

$$P_{1k}=(\mu_{1k}-k)+i(\mu_{2k}-\alpha_2),\ P_{2k}=(\mu_{1k}+k)+i(\mu_{2k}+\alpha_2),$$
$$f_k(r)=\cos(\mu_{2k}\ln r)+i\sin(\mu_{2k}\ln r)$$

$$\mu_{1k}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(k^2+|\lambda|^2-\alpha_2^2\right)^2+4\alpha_2^2k^2}+\left(k^2+|\lambda|^2-\alpha_2^2\right)\right)},$$

$$\mu_{2k}=(\operatorname{sgn}\alpha_2)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(k^2+|\lambda|^2-\alpha_2^2\right)^2+4\alpha_2^2k^2}-\left(k^2+|\lambda|^2-\alpha_2^2\right)\right)}$$

и a_0, b_0- произвольные вещественные и $a_k, b_k, (k=1,2,...)$ комплексные числа, которые выражаются через граничное значение функции $\Psi(z)$ на окружности $\Gamma=\{z:|z|=R\}$.

Формула (5) состоит из суммы двух рядов и все члены ряда по отдельности удовлетворяют уравнению (1). Их принадлежность тому или иному классу зависит от знака степени r, т.е. чисел $\alpha_1+\mu_{1k}$ и $\alpha_1-\mu_{1k}$.

В классе $C^1(G_0)$ принадлежат те члены ряда (5), для которых $\alpha_1+\mu_{1k}\geq 0$ и $\alpha_1-\mu_{1k}\geq 0$. Это требование приведет к тому, что, если $\alpha_1\geq 0$ и $|\alpha|\geq|\lambda|$, то $\alpha_1+\mu_{1k}>0$ для всех $k=0,1,2,...$ и $\alpha_1-\mu_{1k}\geq 0$ только для $k=0,1,2,...k_0$, где $k_0=\left[\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\sqrt{|\alpha|^2-|\lambda|^2}\right]$. Если $|\alpha|<|\lambda|$, то для любого $k=0,1,2,...$ числа $\alpha_1+\mu_{1k}>0$ и $\alpha_1-\mu_{1k}<0$

Поэтому, когда $\alpha_1\geq 0$ для решений уравнения (1) из класса $C^1(G_0)$ получим следующее представление:

$$\Psi(z)=i\cdot\left(\overline{\lambda}-P_{20}\right)\cdot a_0\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda a_k f_k(r)\cdot e^{ik\varphi}+\overline{P_{1k}a_k f_k(r)}e^{-ik\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}+$$

$$+\delta\left[i\cdot\left(\overline{\lambda}+P_{10}\right)\cdot b_0\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{10}}+\sum_{k=1}^{k_0}\left\{\lambda b_k\overline{f_k(r)}e^{ik\varphi}-\overline{P_{2k}b_k}f_k(r)e^{-ik\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}}\right],\quad(6)$$

Здесь $\delta=1$, если $|\alpha|\geq|\lambda|$ и $\delta=0$, если $|\alpha|<|\lambda|$, $k_0=\left[\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\sqrt{|\alpha|^2-|\lambda|^2}\right]$.

При $\alpha_1\geq 0$ по отдельности рассматриваются случаи, когда в краевом условии (2) $m>0$ и $m<0$.

1. Случай $m>0$. Подстановка (6) в краевое условие (2) приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений для определения констант $a_k, k=0,1,...$:

$$\mathrm{Re}(\lambda a_m)+\mathrm{Re}(\lambda b_m)=h_0R^m \qquad (7)$$

$$\lambda a_{m+p}+\overline{\lambda}a_{m-p}+\lambda b_{m+p}+\overline{\lambda}b_{m-p}=h_pR^m,\ p=1,...,m-1 \qquad (8)$$

$$\lambda a_{2m}-i\left(\lambda-\overline{P}_{20}\right)a_0+\lambda b_{2m}-i\left(\lambda+\overline{P}_{10}\right)b_0=h_mR^m \qquad (9)$$

$$\lambda a_{2m+k}+P_{1k}a_k+\lambda b_{2m+k}+P_{2k}b_k=h_{m+k}R^m\ (k=1,2,...,k_0) \qquad (10)$$

$$\lambda a_{2m+k}+P_{1k}a_k=h_{m+k}R^m,\ (k=k_0+1,k_0+2,....) \qquad (11)$$

Вначале рассмотрим однородную краевую задачу (1) и (2). Для этого в граничном условии (2) положим $h(z)=0$.

Тогда на основание (7)-(11) получаем бесконечную систему однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_k, b_k.

$$\mathrm{Re}(\lambda a_m)+\mathrm{Re}(\lambda b_m)=0 \qquad (7)^0$$

$$\lambda a_{m+p}+\overline{\lambda}a_{m-p}+\lambda b_{m+p}+\overline{\lambda}b_{m-p}=0,\ p=1,...,m-1 \qquad (8)^0$$

$$\lambda a_{2m}-i\left(\lambda-\overline{P}_{20}\right)a_0+\lambda b_{2m}-i\left(\lambda+\overline{P}_{10}\right)b_0=0 \qquad (9)^0$$

$$\lambda a_{2m+k}+P_{1k}a_k+\lambda b_{2m+k}+P_{2k}b_k=0\ (k=1,2,...,k_0) \qquad (10)^0$$

$$\lambda a_{2m+k} + P_{1k} a_k = 0, \qquad (11)^0$$

Из $(7)^0$ определяются коэффициенты $a_m = i\bar{\lambda}c_m, b_m = -i\bar{\lambda}d_m$, где c_m и d_m произвольные вещественные константы. Значения величины a_m и b_m позволяют определить все константы $a_{(2k+1)m}$, $b_{(2k+1)m}$ $k = 1,2,...$, с помощью цепочки формул

$$\begin{aligned} \lambda a_{(2k+1)m} + P_{1(2k-1)m} a_{(2k-1)m} = 0 \\ \lambda b_{(2k+1)m} + P_{2(2k-1)m} b_{(2k-1)m} = 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

которые следуют из $(10)^0$. Из (12) получаем

$$a_{(2k+1)m} = \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^{k} P_{1(2\delta-1)m} i\bar{\lambda} c_m, (k = 1,2,...)$$

$$b_{(2k+1)m} = \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda^k} \cdot \prod_{\delta=1}^{k} P_{2(2\delta-1)m} i\bar{\lambda} d_m, (k = 1,2,...)$$

Произвольные константы c_m и d_m порождают нетривиальное решение однородной задачи в виде:

$$\Psi_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \lambda a_{(2k+1)m} \cdot e^{i(2k+1)m\varphi} + \bar{P}_{1(2k+1)m} \bar{a}_{(2k+1)m} e^{-i(2k+1)m\varphi} \right\} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 + \mu_{1(2k+1)m}} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{k_0} \left\{ \lambda b_{(2k+1)m} \cdot e^{i(2k+1)m\varphi} - \bar{P}_{2(2k+1)m} \bar{b}_{(2k+1)m} e^{-i(2k+1)m\varphi} \right\} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1 - \mu_{1(2k+1)m}} \qquad (13)$$

Легко доказать, что ряд (13) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \le R$.

Если положим $a_{m-p} = c_{m-p}, b_{m-p} = -d_{m-p} (p = 1,...,m-1)$, где c_{m-p} и d_{m-p} - произвольные комплексные константы, то из $(8)^0$ будет следовать, что $a_{m+p} = -\left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)\bar{c}_{m-p}$ и $b_{m+p} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)\bar{d}_{m-p}$, а из рекуррентных соотношений

$$\lambda a_{(2k+1)m-p} + P_{1[(2k-1)m-p]} \bar{a}_{(2k-1)m-p} = 0$$

$$\lambda a_{(2k+1)m+p} + P_{1[(2k-1)m+p]} \bar{a}_{(2k-1)m+p} = 0,$$

$$\lambda b_{(2k+1)m-p} + P_{2[(2k-1)m-p]} \bar{b}_{(2k-1)m-p} = 0 \text{ где } p = 1,2,..,m-1$$

$$\lambda b_{(2k+1)m+p} + P_{2[(2k-1)m+p]} \bar{b}_{(2k-1)m+p} = 0, \ k = 1,2,...$$

которые вытекают из $(10)^0$, вычисляются все коэффициенты вида $a_{(2k+1)m\pm p}$ и $b_{(2k+1)m\pm p}$:

$$a_{(2k+1)m-p} = \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^{k} P_{1[(2\delta-1)m-p]} c_{m-p}$$

$$a_{(2k+1)m+p} = \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^{k} P_{1[(2\delta-1)m+p]} \left(-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right) \bar{c}_{m-p}$$

$$b_{(2k+1)m-p} = \frac{1}{(-\lambda)^{k+1}} \cdot \prod_{\delta=1}^{k} P_{2[(2\delta-1)m-p]} d_{m-p} \quad (14)$$

$$b_{(2k+1)m+p}=\frac{1}{(-\lambda)^{k+1}}\cdot\prod_{\delta=1}^{k}P_{2[(2\delta-1)m+p]}\cdot\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\cdot\bar{d}_{m-p}\quad(p=1,2,..m-1.)$$

Произвольные константы c_{m-p} и d_{m-p}, $(p=1,2,..m-1.)$ порождают нетривиальные решения однородной задачи (1) и (2):

$$\Psi_{m-p}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\lambda a_{(2k+1)m-p}\cdot e^{i[(2k+1)m-p]\varphi}+\overline{P}_{1[(2k+1)m-p]}\overline{a}_{(2k+1)m-p}e^{-i[(2k+1)m-p]\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1(2k+1)m-p}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\lambda a_{(2k+1)m+p}\cdot e^{i[(2k+1)m+p]\varphi}+\overline{P}_{1[(2k+1)m+p]}\overline{a}_{(2k+1)m+p}e^{-i[(2k+1)m+p]\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{1(2k+1)m+p}}+\quad(15)$$

$$+\sum_{k=0}^{k_0}\left\{\lambda b_{(2k+1)m-p}\cdot e^{i[(2k+1)m-p]\varphi}-\overline{P}_{2[(2k+1)m-p]}\overline{b}_{(2k+1)m-p}e^{-i[(2k+1)m-p]\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{1(2k+1)m-p}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k_0}\left\{\lambda b_{(2k+1)m+p}\cdot e^{i[(2k+1)m+p]\varphi}+\overline{P}_{2[(2k+1)m+p]}\overline{b}_{(2k+1)m+p}e^{-i[(2k+1)m+p]\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{1(2k+1)m+p}}$$

где $a_{(2k+1)m\pm p}$ выражаются через c_{m-p} по формулам (14). Ряд (15) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z|\le R$, то есть для него выполняется условие Коши.

В $(9)^0$ полагая $a_0=c_0, b_0=-d_0$, где c_0 и d_0 - произвольные вещественные константы, получим $a_{2m}=i\left(\left(\lambda-\overline{P}_{20}\right)/\lambda\right)c_0$, $b_{2m}=-i\left(\left(\lambda+\overline{P}_{10}\right)/\lambda\right)d_0$ а по рекуррентным формулам

$$\lambda a_{(2k+1)m}+P_{12m}a_{2m}=0\ (k=1,2,...),$$

$$\lambda b_{(2k+1)m}+P_{22m}b_{2m}=0\ (k=1,2,...,k_0),$$

которые следуют из $(10)^0$ и $(11)^0$, однозначно определим все коэффициенты вида $a_{2m(k+1)}$ и $b_{2m(k+1)}$:

$$a_{2m(k+1)}=(-1)^k\frac{i}{(-\lambda)^{k+1}}\cdot\prod_{\delta=1}^{k}P_{12m\delta}\left(\lambda-\overline{P}_{20}\right)c_0$$

$$b_{2m(k+1)}=(-1)^{k+1}\frac{i}{\lambda^{k+1}}\cdot\prod_{\delta=1}^{k}P_{2,2m\delta}\left(\lambda+\overline{P}_{10}\right)d_0\quad(16)$$

Произвольная константа c_0 и d_0 порождает одно нетривиальное решение однородной краевой задачи (1) и (2)

$$\Psi_0(z)=i\left(\bar{\lambda}-P_{20}\right)a_0\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda a_{2mk}\cdot e^{2imk\varphi}+\overline{P}_{12mk}\overline{a}_{2mk}e^{-2imk\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1+\mu_{12mk}}+$$

$$+i\left(\bar{\lambda}+P_{10}\right)b_0\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{10}}+\sum_{k=1}^{k_0}\left\{\lambda b_{2mk}\cdot e^{2imk\varphi}-\overline{P}_{22mk}\overline{b}_{2mk}e^{-2imk\varphi}\right\}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{12mk}}\quad(17)$$

где вместо a_{2mk} и b_{2mk} нужно пользоваться (16). Ряд (17) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \le R$.

Общее решение однородной краевой задачи (1) и (2) даётся формулой:

$$\Psi^*(z) = \Psi_0(z) + \sum_{p=1}^{m-1} \Psi_{m-p}(z) + \Psi_m(z) \qquad (18)$$

Однородная задача (1) и (2) имеет $2m$ линейно независимых решений.

Теперь изучим неоднородную краевую задачу (1) и (2). Одним из её частных решений будет

$$H(z) = \sum_{p=0}^{\infty} H_p(z), \quad (19)$$

где,

$$H_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \lambda a^{(p)}_{(2k+1)m+p} \cdot e^{i[(2k+1)m+p]\varphi} + \overline{P}_{1[(2k+1)m+p]} \overline{a}^{(p)}_{(2k+1)m+p} e^{-i[(2k+1)m+p]\varphi} \right\} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 + \mu_{1(2k+1)m+p}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0} \left\{ \lambda b^{(p)}_{(2k+1)m+p} \cdot e^{i[(2k+1)m+p]\varphi} - \overline{P}_{2[(2k+1)m+p]} \overline{b}^{(p)}_{(2k+1)m+p} e^{-i[(2k+1)m+p]\varphi} \right\} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha_1 - \mu_{1(2k+1)m+p}},$$

причём для любых $p = 0,1,...$

$$a^{(p)}_{m+p} = \frac{1}{\lambda} h_p R^m, \; a^{(p)}_{(2k+1)m+p} = \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^{k} P_{1[(2\delta-1)m+p]} \frac{1}{\lambda} R^m h_p$$

$$b^{(p)}_{m+p} = \frac{1}{\lambda} h_p R^m, \; b^{(p)}_{(2k+1)m+p} = \frac{1}{(-\lambda)^k} \cdot \prod_{\delta=1}^{k} P_{2[(2\delta-1)m+p]} \frac{1}{\lambda} R^m h_p$$

Непосредственная проверка показывает, что для любых значений индексов p и k отдельные члены ряда, определяющего $H_p(z)$, являются решениями уравнения (1). Тогда его решениями будут также $H_p(z), p = 0,1,...$, а следовательно и $H(z)$.
Также непосредственной проверкой доказывается, что

$$\mathrm{Re}\left[z^{-m} H_p\right] = \frac{1}{2}\left(h_p e^{ip\varphi} + \overline{h}_p e^{-ip\varphi}\right) \qquad \text{на } |z| = R.$$

Отсюда следует, что $H(z)$ удовлетворяет условию (2).

На основании представлений (6), (7)- (19) доказываются теоремы:

Теорема 2 .Пусть $\alpha_1 = \mathrm{Re}\,\alpha \ge 0$. Если $|\alpha| < |\lambda|$, то однородная задача имеет 2m линейно независимых (в поле вещественных чисел) решений, а неоднородная задача разрешима безусловно. Общее решение задачи представимо в виде

$$\Psi(z) = \Psi^*(z) + H(z),$$

где $\Psi^*(z)$ задаётся формулой (18), а $H(z)$ формулой (19).

Теорема 3. Пусть $\alpha_1 = \mathrm{Re}\,\alpha \ge 0$. если $|\alpha| \ge |\lambda|$, то однородная задача имеет 4m линейно независимых (в поле вещественных чисел) решений, а неоднородная задача разрешима безусловно.

2. Случай $m<0$.

Этот случай исследуется анологично как случай $m>0$. Приводим результаты исследования:

Теорема 3. Однородная задача не имеет решений, отличных от нулевого. Неоднородная задача допускает решения тогда и только тогда, когда $h(z)$ удовлетворяет $2|m|$ вещественным условиям разрешимости

$$h_0+\operatorname{Re}\left(\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\beta}}{\lambda^{\beta}}h_{2\beta|m|}\prod_{\delta=0}^{\beta-1}P_{1(2\delta+1)|m|}\right)=0 \quad (20)_0$$

$$h_0+\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\beta}}{\lambda^{\beta}}h_{2\beta|m|+p}\prod_{\delta=0}^{\beta-1}P_{1(2\delta+1)|m|+p}+\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\beta}}{\lambda^{\beta}}h_{2\beta|m|-p}\prod_{\delta=0}^{\beta-1}P_{1(2\delta+1)|m|-p}=0\ \left(p=1,\ldots,|m|-1\right) \quad (20)_p$$

$$\operatorname{Im}\frac{1}{\left(\overline{\lambda}-P_{20}\right)}\left(h_m+\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\beta}}{\lambda^{\beta}}h_{(2\beta+1)|m|}\prod_{\delta=0}^{\beta-1}P_{1(2\delta+2)|m|}\right)=0 \quad (20)_m$$

При выполнение этих условий решение задачи даётся формулой

$$\Phi(z)=\sum_{p=0}^{|m|-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda a_{(2k+1)|m|-p}e^{i[(2k+1)|m|-p]\varphi}+P_{1[(2k+1)|m|-p]}\overline{a}_{(2k+1)|m|-p}e^{-i[(2k+1)|m|-p]}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{1[(2k+1)|m|-p]}}+$$

$$+\sum_{p=1}^{|m|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda a_{(2k+1)|m|+p}e^{i[(2k+1)|m|+p]\varphi}+P_{1[(2k+1)|m|+p]}\overline{a}_{(2k+1)|m|+p}e^{-i[(2k+1)|m|+p]}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{1[(2k+1)|m|+p]}} \quad (21)$$

$$+i\left(\overline{\lambda}-P_{20}\right)a_0\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_1-\mu_{10}}$$

$$a_0=R^m\operatorname{Re}\frac{1}{\left(\overline{\lambda}-P_{20}\right)}\left(h_{|m|}+\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\gamma}}{\lambda^{\gamma}}h_{(2\gamma+1)|m|}\prod_{\delta=0}^{\gamma}P_{12\delta|m|}\right).$$

$$a_{(2k+1)|m|\pm p}=\frac{R^m}{\lambda}\left(h_{(2k+1)|m|\pm p}+\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\gamma}}{\lambda^{\gamma}}h_{2(\gamma+k+1)|m|\pm p}\prod_{\delta=1}^{\gamma}P_{1(2\delta+2k+1)|m|\pm p}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ахмедов, Р. Задача Дирихле для одного класса модельной обобщенной сиситемы Коши-Римана с сингулярной точкой/Р.Ахмедов//Материалы республиканской научно-теоритической конференции «Актуальные проблемы современной математики и её преподавания»- Душанбе 2014г. с. 11-14.
2. Ахмедов, Р. «Исследование уравнения $2\overline{z}\partial_{\overline{z}}w-(\lambda e^{in\varphi}+b(z))\overline{w}=F(z)$»/Р.Ахмедов.- Худжанд, ТГУПБП, 2021.- 172 с.
3. Ахмедов, Р. Краевые задачи для уравнения $2\overline{z}\partial_{\overline{z}}\mathrm{w}-\left(\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{in}\varphi}+b(z)\right)w=F$. Доклад АН Тадж. ССР.- 1987.-Т. 30, № 12.-С.6-9.
4. Ахмедов, Р.О некоторых свойствах решений модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки/Р.Ахмедов, М.М.Шокирова// Символ науки. 2011.- № 10/ 2011. ISSN2410-700X./– Россия Уфа-2011,- С.9-12
5. Усманов, З. Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой. Математический институт с ВЦ АН ТаджССР/З.Д.Усманов. – Душанбе, 1993.- 244 с.
6. Усманов, З. Д. Исследование уравнения $\partial_{\overline{z}}\Phi-\frac{\lambda}{2\overline{z}}\overline{\Phi}=0$ / Исследования по краевым задачам и интегральным уравнениям/З.Д.Усманов.-Душанбе., Дониш, 1976.- С.119-186.
7. Усманов, З. Д. Задача Дирихле для обобщенной системы Коши-Римана в сингулярном случае/З.Д.Усманов/// Докл.АН ТаджССР.-1971.-Т.14, №11.-С.16-20.

8. Усманов, З. Д. Задача Римана-Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой, 1./З.Д.Усманов//Докл.АН ТаджССР.-1972.-Т.11, №4.-С.10-13.
9. Шокирова, М. М. О некоторых свойствах решений специальной модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки/М.М.Шокирова//Материалы международной научно-практической конференции «Word science problems and innovations», г. Пенза, РФ, 30.05.2021.- С. 10-13.
10. Шокирова, М.М. Задача Дирихле для решений специальной модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки. VIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием/М.М.Шокирова//«Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2022), Орёл, 25-26 ноября 2022 г.

REFERENCES:

1. Akhmedov, R. Dirichlet problem for one class of a model generalized Cauchy-Riemann system with a singular point / R. Akhmedov // Materials of the Republican scientific and theoretical conference “Current problems of modern mathematics and its teaching” - Dushanbe 2014. With. 11-14.
2. Akhmedov, R. “Research of the equation” / R. Akhmedov. - Khujand, TSUPBP, 2021. - 172 p.
3. Akhmedov, R. Boundary value problems for equations. Report by AN Taj. SSR.- 1987.-T. 30, No. 12.-S.6-9.
4. Akhmedov, R. On some properties of solutions of the model generalized Cauchy-Riemann system in the vicinity of a singular point / R. Akhmedov, M. M. Shokirova // Symbol of Science. 2011.- No. 10/ 2011. ISSN2410-700X./– Russia Ufa-2011,- P.9-12
5. Usmanov, Z. D. Generalized Cauchy-Riemann systems with a singular point. Mathematical Institute with the Computing Center of the Academy of Sciences of the Taj SSR / Z.D. Usmanov. – Dushanbe, 1993.- 244 p.
6. Usmanov, Z. D. Study of equations / Research on boundary value problems and integral equations / Z. D. Usmanov.-Dushanbe., Donish, 1976.- P.119-186.
7. Usmanov, Z. D. Dirichlet problem for the generalized Cauchy-Riemann system in the singular case / Z. D. Usmanov /// Dokl. AN TajSSR.-1971.-T.14, No. 11.-P.16-20 .
8. Usmanov, Z.D. The Riemann-Hilbert problem for one class of generalized analytic functions with a fixed singular point,1./Z.D.Usmanov//Dokl.AN TajSSR.-1972.-Vol.11, No.4.- P.10-13.
9. Shokirova, M. M. On some properties of solutions of a special model generalized Cauchy-Riemann system in the vicinity of a singular point / M. M. Shokirova // Proceedings of the international scientific and practical conference “Word science problems and innovations”, Penza, RF , 05/30/2021.- pp. 10-13.
10. Shokirova, M.M. The Dirichlet problem for solutions of a special model generalized Cauchy-Riemann system in the neighborhood of a singular point. VIII All-Russian scientific and practical conference with international participation / M.M. Shokirova // “Modern problems of physical and mathematical sciences” (SPFMS-2022), Orel, November 25-26, 2022