ТДУ 517.926

ДОИР БА БАЪЗЕ ХОСИЯТҲОИ ФАЗОҲОИ ФУНКСИОНАЛИИ СТЕПАНОВ

Зиёмидинов Баҳодур Мирзомидинович, *н.и. физ.-мат., дотсенти кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири ДДБҲСТ (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ СТЕПАНОВА

Зиёмидинов Баходур Мирзомидинович, *к.физ.-мат.наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП (Таджикистан, Худжанд)*

CONCERNED WITH CERTAIN PROPERTIES STEPANOV'S FUNCTIONAL SPACES

Ziyomidinov Bahodur Mirzomidinovich, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Sciencesunder under the TSULBP (Tajikistan, Khujand),*
E-mail: *ziemidinov67@mail.ru.*

Вожаҳои калидӣ: *фазоҳои Степанов, функсияҳои локал интегралшаванда, пайдарпаиҳои мунтазам маҳдуд*

Дар мақола фазоҳои функсионалии Степанов ва хосиятҳои онҳо баррасӣ шудааст. Нишон дода шудааст, ки фазоҳои Степанов аз фазоҳои функсияҳои маҳдуд васеътар аст.Алоқаи байни фазоҳои Степанов бо фазои функсияҳои дифференсиронидашаванда, робитаи байни нормаҳои ин фазоҳо, мунтазам наздикшавии пайдарпаии интегралҳо аз кӯчиши функсияҳо аз фазои Степанов нишон дода шудааст.

Ключевые слова: *пространства Степанова, локально интегрируемые функции, равномерно ограниченные последовательности*

Анализированы функциональные пространства Степанова и их свойства. Отмечено, что пространство Степанова шире, чем пространство ограниченных функций.Показана связь пространств Степанова с пространством дифференцируемых функций, связь между нормами этих пространств, равномерно сходящимся последовательности интегралов от сдвигов функций из пространства Степанова.

Key words: *Stepanov spaces, locally integrals functions, uniformly bounded sequences*

The article dwells on Stepanov's functional spaces and its properties. It is shown that Stepanov space is wider than the spaces of bounded functions. The connection between Stepanov spaces and the space of differentiable functions, the connection between the norms of these spaces and a uniformly convergent sequence of integrals of shift functions from Stepanov space are indicated.

1. Фазоҳои функсионалии Степанов. Дар корҳои классикӣ ва бунёдии Ж. Фавар, М.Г. Крейн, М.А. Красноселский, Х.Л. Массера, Э. Муҳаммадиев, В.А. Костин ва А.Г. Баскаков [ниг., масалан 1-7] фазоҳои функсионалии гуногуни Степанов омӯхта шудаанд.

Таърифи 1. Фазои Степанов S гуфта маҷмуи ҳамаи вектор-функсияҳои $x(t)$ −ро меноманд, ки ба маънои Лебег (ниг., масалан, [8]) дар $R_+ = [0, \ +\infty)$ локалӣ интегронидашаванда буда, шарти зерин иҷро мегардад:

$$\sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1} |x(\tau)|\, d\,\tau < \infty.$$

Норма дар фазои S бо формулаи зерин дохил карда мешавад:

$$\|x\|_S = \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1} |x(\tau)|\, d\tau.$$

Дар фазои S дилхоҳ пайдарпаии фундаменталӣ наздикшаванда аст, яъне S фазои банах мешавад.

Қайд менамоем, ки фазои S функсияҳои ғайримаҳдуд низ дорад, яъне аз фазоҳои дар R_+ маҳдуд васеъ аст. Мисолҳои зеринро дида мебароем.

а) Мисоли функсияи ғайримаҳдуди канишдор, ки ба фазои S тааллуқ дорад. Бигзор

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, \text{ ҳангоми } 0 \le t < 1, \\ n, \text{ ҳангоми } n \le t < n + \dfrac{1}{n}, \\ 0, \quad \text{ҳангоми } n + \dfrac{1}{n} \le t < n + 1, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

бошад.

Қайд менамоем, ки $\varphi(n) = n$ аст. Бинобар, $\varphi(n) \to \infty$ ҳангоми $n \to \infty$. Яъне, функсияи $\varphi(t)$ ғайримаҳдуд аст.

Ба фазои S тааллуқ доштани функсияи додашударо месанҷем. Дар ҳар як порчаи охирнок функсия маҳдуд аст ва миқдори охирноки нуқтаҳои каниш дорад. Бинобар, $\varphi(t)$ дар ҳар як порчаи охирнок интегронидашаванда аст, яъне дар нимтири $[0; +\infty)$ локалӣ интегронидашаванда аст. Нишон медиҳем, ки

$$\sup_{t \ge 0} \int_t^{t+1} |\varphi(\tau)|\, d\tau < \infty$$

иҷро мешавад. Дар ҳақиқат, $\forall t \ge 0$

$$\int_t^{t+1} |\varphi(\tau)|\, d\tau \le \int_{[t]}^{[t]+2} |\varphi(\tau)|\, d\tau = \int_{[t]}^{[t]+1} |\varphi(\tau)|\, d\tau + \int_{[t]+1}^{[t]+2} |\varphi(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \int_{[t]}^{[t]+\frac{1}{[t]}} [t]\, d\tau + \int_{[t]+1}^{[t]+1+\frac{1}{[t]+1}} ([t]+1)\, d\tau = 1 + 1 = 2.$$

Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки $\varphi(t)$ ба фазо S тааллуқ дорад.

б) Мисоли функсияи ғайримаҳдуди бефосила, ки ба фазои S тааллуқ дорад. Бигзор

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, \text{ ҳангоми } 0 \le t \le \dfrac{3}{2}, \\ n^2(t-n) + n, \text{ ҳангоми } n - \dfrac{1}{n} < t \le n, \\ -n^2(t-n) + n, \quad \text{ҳангоми } n < t \le n + \dfrac{1}{n}, \\ 0, \text{ ҳангоми } n + \dfrac{1}{n} < t \le n + 1 - \dfrac{1}{n+1}. \end{cases} \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

Ба осонӣ санҷидан мумкин аст, ки барои дилхоҳ $t \ge 0$

$$\int_t^{t+1} |\psi(\tau)|\, d\tau \le 2$$

ҷой дорад. Бинобар, $\psi(t) \in S$.

Таърифи 2. Агар $x(t),\ y(t)$ аз S ва

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds \quad \forall t \ge 0, \tag{1}$$

бошад, он гоҳ $y(t)$ – ро ҳосилаи функсияи $x(t)$ номида, чунин ишорат менамоем: $x'(t)$.

Аз баробарии (1) бармеояд, ки функсияи $x(t)$ мутлақ бефосила аст. Бинобар ин, ҳосилаи $x'(t)$ қариб дар ҳама ҷо мавҷуд аст ва қариб дар ҳама ҷо ба функсияи $y(t)$ баробар мешавад.

Бо S^1 маҷмуи ҳамаи вектор-функсияҳои $x(t)$ – ро ишорат менамоем, ки барои онҳо $x(t) \in S$ ва $x'(t) \in S$ аст.

Ҳамин тавр, фазои S^1 ин маҷмуи $\{x(t): x(t) \in S \text{ и } x'(t) \in S\}$, ҳамаи вектор-функсияҳои дар фосилаи $[0;+\infty)$ бо ҳамроҳии ҳосилааш локалӣ интегронидашаванда (ба маънои Лебег) буда, шарти зеренро қаноат мекунонад:

$$\sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}|x(s)|\,ds+\sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}|x'(s)|\,ds<\infty.$$

Норма дар фазои S^1 бо формулаи зерин дохил карда мешавад:

$$\|x\|_{S^1}=\|x\|_S+\|x'\|_S.$$

Бо S^m маҷмуи ҳамаи вектор-функсияҳои $x(t)$ –ро ишорат менамоем, ки дар фосилаи $[0;+\infty)$ муайян буда, барои онҳо $x(t)\in S$ ва $x'(t)\in S,\ldots,x^{(m)}(t)\in S$ аст, яъне

$$S^m=\{x(t):x(t)\in S,x'(t)\in S,\ldots,x^{(m)}(t)\in S\}.$$

Норма дар фазои S^m бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$\|x\|_{S^m}=\|x\|_S+\|x'\|_S+\cdots+\left\|x^{(m)}\right\|_S.$$

Ба воситаи $C_+=C_+(R_+,R^n)-$ фазои банахи дар нимтири $R_+=[0,+\infty)$ бефосила ва маҳдуди вектор-функсияҳоро ишорат менамоем, ки норма чунин муайян карда мешавад:

$$\|x\|_{C_+}=\sup_{t\geq 0}|x(t)|.$$

Ба воситаи $C_+^{m-1}=C_+^{m-1}(R_+,R^n)-$ фазои Банахи вектор-функсияҳои $x(t)\in C_+$, ки $x',x'',\ldots,x^{(m-1)}\in C_+$ бударо ишорат мекунем; норма дар C_+^{m-1} бо формулаи зерин муайян мешавад:

$$\|x\|_{C_+^{m-1}}=\|x\|_{C_+}+\|x'\|_{C_+}+\cdots+\left\|x^{(m-1)}\right\|_{C_+}.$$

Ба воситаи $S_p^0=S_p$ $p\geq 1$ маҷмуи ҳамаи вектор-функсияҳои $x(t)$ –ро ишорат менамоем, ки барои онҳо ифодаи

$$\|x\|_{S_p}=\sup_{t\geq 0}\left(\int_t^{t+1}|x(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

охирнок аст.

Ҳангоми $p=1$ будан $S_p=S$ –ро ҳосил менамоем. Ҳангоми $p=\infty$ будан $S_p=S_\infty$ буда,

$$\|x\|_{S_\infty}=vrai\sup_{t\leq s\leq t+1}|x(s)|$$

мешавад.

Бо S_p^m маҷмуи ҳамаи вектор-функсияҳои $x(t)$ –ро ишорат менамоем, ки ҳосилаҳои бефосилаи $x^{(i)}(t)$, $i=1,2,\ldots,m-1$ дошта, ҳосилаи $x^{(m-1)}(t)$ дар ҳар як порча мутлақ бефосила мебошад ва ифодаи зерин

$$\|x\|_{S_p^m}=\|x\|_{S_p}+\|x'\|_{S_p}+\cdots.+\left\|x^{(m)}\right\|_{S_p}$$

охирнок аст.

2. Хосиятҳои фазоҳои Степанов ва баъзе дохилшавиҳо .Дар ин ҷо баъзе хосиятҳо ва пайдарпаиҳои маҳдудро дар фазоҳои Степановро дида мебароем.

Тасдиқоти зерин ҷой доранд.

Леммаи 1. *Бигзор* $x\in S^1$ *бошад. Он гоҳ нобаробарии зерин дуруст аст:*

$$|x(t)|\leq\|x\|_{S^1}$$

барои дилхоҳ $t\geq 0$.

Леммаи 2. *а) Фазои* S^m *ба фазои* C_+^{m-1} *бефосила дохил мешавад, яъне*

$$S^m\subset C_+^{m-1}\ \text{ва}\ \|x\|_{C_+^{m-1}}\leq 2\|x\|_{S^m};$$

б) S^m *фазои Банах мебошад.*

Леммаи 3. *а) Чунин дохилшавиҳо ҷой дорад:*

$$C_+^m\subset S_\infty^m\subset S_p^m\subset S_1^m\subset C_+^{m-1},\qquad 1<p<+\infty.$$

б) Агар $p>q$ *бошад, он гоҳ* фазои S_p^m *ба фазои* S_q^m *бефосила дохил мешавад.*

Леммаи 4. *Функсияи* $x(t)$, *аз фазои* S_q^m *ба фазои* S_p^m *дохил мешавад, агар ҳосилаи* $x^{(m)}(t)$ *ба* *фазои* S_p *таалluқ дошта бошад.* Баъзе хосиятҳои функсияҳоеро, ки ба фазои C^m ё S_p^m таалluқ доранд, дида мебароем. Агар функсияи $x(t)$ ба фазои C^m (S_p^m) таалluқ дошта бошад, онгоҳ кӯчиши он низ $(S_h x)(t) = x(t+h),\ h \in R_+$ ба ин фазо таалluқ дорад.

Фарз менамоем, ки функсияи $x(t)$ аз S_p^m буда, дар тамоми тири ададӣ муайян аст [1].

Леммаи 5. *Бигзор* $x \in S_p^m$ *ва* $y(t) = (S_h x)(t) = x(t+h),\ h \in R$ *бошад. Онгоҳ,* $y \in S_p^m$ *ва* $\|x\|_{S_p^m} = \|y\|_{S_p^m}$ мешавад.

Исбот. Гузориши $\tau + h = s$ –ро истифода бурда, ҳосил менамоем:

$$\int_t^{t+1} |y(\tau)|^p d\tau = \int_t^{t+1} |x(\tau+h)|^p d\tau = \int_{t+h}^{t+h+1} |x(s)|^p ds.$$

Маълум аст, ки $\forall\, h \in R$ буда, баробарии зерин ҷой дорад:

$$\sup_{t\ge 0} \int_t^{t+1} |x(\tau)|^p d\tau = \sup_{t\ge 0} \int_{t+h}^{t+h+1} |x(s)|^p ds.$$

Ниҳоят, ҳосил мекунем $y \in S_p^m$ ва

$\|y\|_{S_p^m} = \|x\|_{S_p^m}$.

Леммаи 5 исбот шуд. Ҳамин тавр, дар ин фазоҳо гурӯҳи якпараметраи изометрикии операторҳо амал мекунад. Ба маҷмуи кучишҳо нуқтаҳои ҳудудияшро дохил намуда, маҷмуи ҳосилшударо бо $S_h x\colon h \in R$ ишорат мекунем. Бо мақсади омӯзиши сохти маҷмуи $S_h x$, аз рӯи функсияи $x(t)$ ду пайдарпаиҳои функсияҳои $\{y_k(t)\},\ \{z_k(t)\}$ – ро месозем:

$$y_k(t) = x(t+h_k),\ \ z_k(t) = \int_0^t x(\tau+h_k)d\tau.$$

Барои функсияи $x \in S_p^m$ модули мутлақ бефосилагии интегралро чунин муайян менамоем:

$$\omega_x^m(\delta) = \sup_{(\alpha_i,\beta_i)} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \left|x^{(m)}(\tau)\right| d\tau,$$

ки дар ин ҷо

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) \le \delta \le 1,\ \ \alpha_i < \beta_i \le \alpha_{i+1} < \beta_{i+1} \le \alpha_1 + 1, \quad 1 \le p \le \infty$$

аст.

Леммаи 6. *Бигзор* $x \in S_p^m,\ 1 \le p \le \infty,\ m \ge 1$ *бошад. Онгоҳ пайдарпаии функсияҳои* $\{y_k(t)\},\ \{y_k'(t)\}, \dots, \left\{y_k^{(m-1)}(t)\right\}$ *дар тамоми тири ададӣ мунтазам маҳдуд мешаванд.*

Исбот. Мувофиқи леммаи 3 чунин дохилшавиҳо ҷой дорад:

$S_\infty^m \subset S_p^m \subset S_1^m \subset C_+^{m-1}$,

ва аз леммаи 5 чунин баробарӣ ҳосил мешавад:

$\|y_k\|_{C_+^{m-1}} = \|x\|_{C_+^{m-1}}$.

Аз ин ду муносибатҳо тасдиқоти лемма бармеояд. Леммаи 6 исбот шуд.

Леммаи 7. *Бигзор* $x \in S_p^0 = S_p,\ 1 \le p \le \infty$ *бошад. Онгоҳ пайдарпаии функсияҳои* $\{z_k(t)\}$ *дар ҳар як порчаи охирноки тири ададӣ мунтазам маҳдуд мешаванд.*

Исбот. Ҳангоми $t \ge 0$ доро мешавем

$$|z_k(t)| \le \left|\int_0^t x(\tau+h_k)d\tau\right| = \left|\int_0^{[t]} x(\tau+h_k)d\tau + \int_{[t]}^t x(\tau+h_k)d\tau\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{[t]+1} \int_i^{i+1} |x(\tau+h_k)|d\tau \le ([t]+1)\|x\|_S.$$

Аз ин ҷо, дар асоси нобаробарии интегралии Гёлдер (ниг., масалан, [9-10]) ҳосил менамоем:

$$|z_k(t)| \le ([t]+1)\|x\|_{S_p}.$$

Монанди ҳамин ҳолати $t<0$ муоина карда мешавад. Аз ин ҷо натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\{z_k(t)\}$ дар ҳар як порчаи охирноки тири ададӣ мунтазам маҳдуд мешаванд. Леммаи 7 исбот шуд. Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теорема. *Бигзор* $x \in S_1^m = S^m$, $m \ge 1$ *бошад ва*

$$\omega_x^m(\delta) \to 0 \text{ ҳангоми } \delta \to 0 \qquad (2)$$

ҷой дошта бошад. Онгоҳ, барои дилхоҳ пайдарпаии $\{h_k\} \subset R$, *зерпайдарпаии* $\{h_{k_j}\}$ *ва функсияи* $\tilde{x} \in S^m$ *мавҷуд аст, ки баробарии зерин ҷой дорад*

$$\lim_{j\to\infty}\left|x^{(i)}\left(t+h_{k_j}\right)-\tilde{x}^{(i)}(t)\right|=0, \quad i=0,1,\dots,m-1$$

ва ин наздикшавӣ дар ҳар як порчаи охирнок мунтазам аст.

Исбот. Пайдарпаии $\{y_k(t)\}$−ро дида мебароем. Баробарии зеринро доро мешавем:

$$y_k^{(i)}(t)-y_k^{(i)}(s)=\int_s^t y_k^{(i+1)}(\tau)d\tau, \ s<t. \qquad (3)$$

Ҳангоми $i<m-1$ будан аз (2) дар асоси леммаи 1 ҳосил менамоем:

$$\left|y_k^{(i)}(t)-y_k^{(i)}(s)\right| \le \int_s^t \left|y_k^{(i+1)}(\tau)\right|d\tau \le \left\|y_k^{(i+1)}\right\|_{S^1}|t-s| \qquad (4)$$

ва ҳангоми $i=m-1$ будан ҳосил мекунем:

$$\left|y_k^{(m-1)}(t)-y_k^{(m-1)}(s)\right| \le \int_s^t \left|y_k^{(m)}(\tau)\right|d\tau. \qquad (5)$$

Мувофиқи леммаи 2 пайдарпаии $\left\{y_k^{(i)}(t)\right\}$, $i=1,\ 2,\dots,m-1$ дар тамоми тири ададӣ мунтазам маҳдуд мешавад. Аз нобаробарии (4) натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\left\{y_k^{(i)}(t)\right\}$, $i=1,\ 2,\dots m-2$ баробардараҷа бефосила аст ва аз нобаробарии (5) дар асоси шарти (2) натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии $\left\{y_k^{(m-1)}(t)\right\}$ баробардараҷа бефосила мешавад. Бинобар, мувофиқи теоремаи Артсел (ниг., масалан, [4], [5]) зерпайдарпаии $\left\{y_{k_j}(t)\right\}$ мавҷуд аст, ки ба ягон функсияи $\tilde{x}(t)$ дар ҳар як порчаи охирнок бо ҳамроҳии ҳосилаи то тартиби $m-1$ мунтазам наздик мешавад. Нишон медиҳем, ки функсияи $\tilde{x}(t)$ дар фазои S^m мехобад. Бо ин мақсад нишон медиҳем, ки функсияи $\tilde{x}^{(m-1)}$ мутлақ бефосила аст.

Бигзор $\varepsilon>0$ бошад ва $\delta>0$−ро чунон интихоб менамоем, ки $\omega_x^m(\delta)<\varepsilon$ шавад. Барои нуқтаҳои $t \le \alpha_1<\beta_1 \le \alpha_2<\beta_2 \le \dots \le \alpha_N<\beta_N \le t+1$ шарти

$$\sum_{i=1}^N(\beta_i-\alpha_i)<\delta$$

иҷро мегардад. Соҳиб мешавем:

$$\left|y_k^{(m-1)}(\beta_i)-y_k^{(m-1)}(\alpha_i)\right| \le \int_{\alpha_i}^{\beta_i}\left|y_k^{(m)}(\tau)\right|d\tau.$$

Ё ин ки суммиронида, ҳосил мекунем:

$$\sum_{i=1}^N\left|y_k^{(m-1)}(\beta_i)-y_k^{(m-1)}(\alpha_i)\right| \le \sum_{i=1}^N\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\left|y_k^{(m)}(\tau)\right|d\tau \le \omega_{y_k}^m\sum_{i=1}^N(\beta_i-\alpha_i),$$

яъне

$$\sum_{i=1}^{N}\left|y_k^{(m-1)}(\beta_i)-y_k^{(m-1)}(\alpha_i)\right| < \varepsilon \tag{6}$$

ҳосил мешавад. Дар нобаробарии (6), k –ро бо k_j иваз намуда, ҳангоми $j \to \infty$ ба ҳудуд гузашта, ҳосил менамоем:

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\tilde{x}^{(m-1)}(\beta_i)-\tilde{x}^{(m-1)}(\alpha_i)\right| \leq \varepsilon.$$

Аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки функсияи $\tilde{x}^{(m-1)}(s)$ мутлақ бефосила ва ҳосилаи он $\left(\tilde{x}^{(m-1)}(s)\right)' = \tilde{x}^{(m)}(s)$ дар ҳар як фосилаи $(t, t+1)$ ба фазои $L_1(t, t+1)$ тааллуқ дорад ва бар замми он нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\left\|\tilde{x}^{(m)}\right\|_S \leq \left\|x^{(m)}\right\|_S.$$

Теорема исбот шуд.

ПАЙНАВИШТ:

1.Favard, J. Sur les equations differentials a coefficients Presque-periodiques/J.Favard//Acta Math. - 1927. V.51. - P. 31 – 81.
2.Далецкий, Ю.Л.Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн.- М.: Наука. – 1970.- 534 с.
3.Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский.-М.:Наука, 1966.
4.Массера, Х.Л. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер.- М.: Мир - 1970. – 458 с.
5.Мухамадиев, Э.М. К теории ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений/Э.М.Мухамадиев//Дифференциальные уравнения.- 1974. - Т. 10, №4.- С. 635 - 646.
6.Костин, В.А. К теории функциональных пространств Степанова / В.А.Костин, А.В. Костин. - Воронеж: ВГУ, 2007. – 259 с.
7. Баскаков, А.Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений / А.Г. Баскаков // Дифференциальные уравнения. - 2003. -Т. 39, №3 .- С. 413 - 415.
8.Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М.: Наука, 1972. – 496 с.
9.Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости/Б.П.Демидович.-М.: Наука, – 1967. – 472 с.
10.Натансон,И.П.Теория функций вещественной переменной/И.П.Натансон.–М.:Наука,1974.–480с.

REFERENCES:

1. Favard,J.Sur les equations differentials a coefficients Presque-periodiques/Acta Math-1927.V.51.P31 – 81.
2. Daletsky, Yu.L. Stability of solutions of differential equations in Banach space / Yu.L. Daletsky, M.G. Crane. M.: Science. – 1970. 534 p.
3. Krasnoselsky, M.A. Shift operator along trajectories of differential equations / M.A. Krasnoselsky. M.: Nauka, 1966.
4. Massera, H.L. Linear differential equations and functional spaces / Kh.L. Massera, H.H. Sheffer – M.: Mir, 1970. 458 p.
5. Mukhamadiev, E.M. On the theory of bounded solutions of ordinary differential equations / E.M. Mukhamadiev // Differential equations. 1974. V.10.- №4.- P.635-646.
6. Kostin, V.A. On the theory of Stepanova functional spaces / V.A. Kostin, A.V. Kostin – Voronezh: VSU, 2007. – 259 p.
7. Baskakov, A.G. Estimates of bounded solutions of linear differential equations / A.G. Baskakov // Differential equations. – 2003. V.39.-№ 3.-P.413-415.
8. Kolmogorov, A.N. Elements of the theory of functions and functional analysis / A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin – M.: Nauka, 1972.- 496 p.
9. Demidovich, B.P. Lectures on the mathematical theory of stability / B.P.Demidovich – M.: Nauka, - 1967.- 472 p.
10. Nathanson, I.P. Theory of functions of a real variable / I.P. Natanson.–M.:Nauka,1974.- 480 p.