УДК 517.968.22

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ПРОСТОЙ ИГРЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Муродова Мадина Набиджоновна, *к.физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП (Таджикистан, Худжанд)*

ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАИ ТАЪҚИБКУНӢ БАРОИ ЯК БОЗИИ СОДА БО АРГУМЕНТИ ДЕРМОНӢ

Муродова Мадина Набиҷоновна, *н.и.физ.-мат., муаллими кафедраи фанҳои риёзи ва табиатшиносии муосири ДДҲБСТ (Тоҷикистон, Хуҷанд)*

SOLVABILITY PURSUIT TASKS FOR ONE SIMPLE GAME WITH LAG ARGUMENT

Murodova Madina Nabijonovna, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science TSULBP(Tajikistan, Khujand),*
E-mail: *murodova72@bk.ru*

Ключевые слова: *задача преследования, простая игра с запаздывающим аргументом, время преследования, управление преследования, гильбертово пространство*

В гильбертовом пространстве рассматривается разрешимость задачи преследования по Л.С.Понтрягину для одной простой игры с запаздывающим аргументом. Доказана теорема о возможности завершения преследования за оптимальное время.

Вожаҳои калидӣ: *масъалаи таъқибкунӣ, бозии сода бо аргументи дермонӣ, вақти таъқибкунӣ, идоракунии таъқибкунӣ, фазои Гилберт*

Дар фазои Гилберт ҳалшавандагии масъалаи таъқибкунӣ аз рӯи назарияи Л.С.Понтрягин барои як бозии сода бо аргументи дермонӣ баррасӣ мешавад. Теорема дар бораи имконпазирии таъқибкунӣ бо вақти оптималӣ исбот карда шудааст.

Key words: *pursuit task, simple game with delayed argument, pursuit time, pursuit controls, Hilbert space*

In Hilbert space, the solvability of the pursuit problem in the sense of L.S.Pontryagin is considered for a single idle game with a lagging argument. The aurhor proves the theorem on the possibility of completing the pursuit in the optimal time.

Различные прикладные задачи из военной сферы, физики, экономики и биологии в условиях конфликта сводятся к дифференциальным играм. В начале 60-х годов XX века в этой области основополагающие конечномерные результаты получены академиками Н.Н.Красовским и Л.С. Понтрягиным. В работах Н.Н.Красовского исследуются позиционные дифференциальные игры. А в работах Л.С.Понтрягина дифференциальная игра рассматривается отдельно с точки зрения преследующего и отдельно с точки зрения убегающего, что неизбежно связывает дифференциальную игру с двумя различными задачами: задача преследования и задача убегания. В данной игре – с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве.

В гильбертовом пространстве X рассматривается разрешимость задачи преследования для простой игры с запаздывающим аргументом $h > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = kx(t-h) + u \\ \dot{y} = ky(t-h) + v \end{cases} \qquad (1)$$

где $\|u\| \le \alpha, \|\vartheta\| \le \beta, k \ge 0$.

Определение. *В игре (1) из начального положения* $(x_o y_o)$ *возможно завершение преследования, если существует число* $T = T(x_o y_o) \ge 0$ *такое, что для любого допустимого измеримого управления убегания* $\vartheta = \vartheta(t)$ *можно выбрать такое допустимое измеримое управления преследования* $u = u(t)$, *что* $x(T) = y(T)$.

Задача преследования ([2], с. 234). *Найти множество начальных положений, из которых в игре (1) возможно завершение преследования с оптимальным временем.*

Для решения этой задачи систему (1) перепишем в виде

$$\dot{z} = kz(t-h) - u + v, \qquad (2)$$

где $z = y - x$, а терминальное множество, где заканчивается игра имеет вид $M = \{0\}$.
Справедлива следующая

Теорема. *Пусть:*

3) $\alpha > \beta$;

4) *При некотором* $nh \le T \le (n+1)h,\ n = 0,1,2, \ldots$ *имеет место включение*

$$\sum_{m=0}^{n}\left[\frac{\left(k(T-mh)\right)^m}{m!} + \frac{(k)^{m+1}}{(m+1)!}\left((T-mh)^{m+1} - (T-(m+1)h)^{m+1}\right]z_o \in S_r \qquad (3)$$

где S_r *–шар с центром в O и радиусом*

$$r = r(T) = (\alpha-\beta)\sum_{m=0}^{n}\frac{(k)^m}{(m+1)!}\left((T-mh)^{m+1} - (-mh)^{m+1}\right).$$

Тогда из любого начального положения $z_o \in X$ *возможно завершение преследования за оптимальное время*

$$T_o = min\{T \ge 0 \text{ для которых имеет место включение}(3)\}.$$

Доказательство. Известно, что шар S_r замкнутое множество. Поэтому, если при некотором T имеет место включение (3), то оно имеет место и при

$$T_o = min\{T \ge 0 \text{ для которых имеет место включение } (3)\}.$$

С другой стороны, в силу того, что $\alpha > \beta$ функция $r = r(T)$ возрастающая функция и $r(0) = 0$. Поэтому для любого начального положения z_o существует $T \ge 0$, такое, что имеет место включение (3). Как известно $([1], c. 312)$

$$S_r = S_{\int_0^{T_o}(\alpha-\beta)\sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}d\tau} = \int_0^{T_o} S_{\sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}(\alpha-\beta)}d\tau =$$

$$= \int_0^{T}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}S_\alpha \overset{*}{-} \sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}S_\beta\right)d\tau \qquad (4)$$

где $A \overset{*}{-} B = C = \{c : c + B \subset A\}$ –геометрическая разность множества A и B.
Следовательно, на основании (3) существует измеримое отображение

$$\omega(r) \in \sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}S_\alpha \overset{*}{-} \sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}S_\beta \qquad (5)$$

такое, что

$$\sum_{m=0}^{n}\left[\frac{[k(T_o-mh)]^m}{m!} + \frac{k^{m+1}}{(m+1)!}\left((T_o-mh)^{m+1} - (T_o-(m+1)h)^{m+1}\right)z_o\right]$$
$$= \int_0^{T_o}\omega(r)dr \qquad (6)$$

Пусть выбрано допустимое измеримое отображение $v = v(\tau) \in S_\beta$. Тогда в силу (5) имеем:

$$\omega(\tau) + \sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}v(\tau) \in \sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}S_\alpha$$

Далее, в силу леммы о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения $([3], c. 365)$, существует такое допустимое отображение $u = (\tau) \in S_\alpha$, что имеет место равенство

$$\omega(\tau) + \sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}v(\tau) = \sum_{m=0}^{n}\frac{[k(T_o-\tau-mh)]^m}{m!}u(\tau) \qquad (7)$$

Если выбраны u=u(τ) и v=v(τ), то для решения задачи (2) с начальным положением z_o ([2], c. 233) имеем:

$$z(T_o) = \Phi(T_o)z_o + \int_{-h}^{0} \Phi(T_o - \tau - h)\, k \cdot z_o d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{T_o} \Phi(T_o - \tau)\big(-u(\tau) + v(\tau)\big)\, d\tau, \qquad (8)$$

где фундаментальное решение Φ(t) находим из равенства

$\dot{\Phi}(t) = k\Phi(t-h)$, $\Phi(0) = I -$ **единичный оператор**, $\Phi(t) = 0$ **при** $t < 0$.

Пусть: 1) $0 \le t \le h$. Тогда

$$\dot{\Phi}(t) = k\Phi(t-h) = k \cdot 0 = 0,$$

$$\Phi(t) = \Phi(0) + C.$$

Следовательно, C=0 и Φ(t)=I

4) $h \le t \le 2h$. Тогда

$$\dot{\Phi}(t) = k\Phi(t-h) = k \cdot I,$$

$$\Phi(t) = \Phi(h) + k(t-h)I = I + k(t-h)I = [1 + k(t-h)] \cdot I.$$

5) $2h \le t \le 3h$. Тогда

$$\dot{\Phi}(t) = k\Phi(t-h) = k\big(1 + k(t-2h)\big)I,$$

$$\Phi(t) = \Phi(2h) + \left[k(t-2h) + \frac{k^2(t-2h)^2}{2!}\right] I = (1 + kh)I +$$

$$+ \left[k(t-2h) + \frac{k^2(t-2h)^2}{2!}\right] I = \left[1 + k(t-h) + \frac{k^2(t-2h)^2}{2!}\right] I.$$

Далее по индукции можно показать, что при

$nh \le t \le (n+1)h$

фундаментальное решение имеет вид:

$$\Phi(t) = \left[1 + k(t-h) + \frac{k^2(t-2h)^2}{2!} + \cdots + \frac{k^n(t-nh)^n}{n!}\right] I == \sum_{m=0}^{n} \frac{[k(t-mh)]^m}{m!} I.$$

Теперь учитывая равенства (6), (7) и (8), имеем:

$$z(T_o) = \sum_{m=0}^{n} \frac{[k(T_o - mh)]^m}{m!} z_o + \int_{-h}^{0} \sum_{m=0}^{n} \frac{[k(T_o - \tau - h - mh)]^m}{m!} k z_o d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{T_o} \sum_{m=0}^{n} \frac{[k(T_o - \tau - mh)]^m}{m!} \big(-u(\tau) + v(\tau)\big) d\tau =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{[k(T_o - mh)]^m}{m!} z_o + \sum_{m=0}^{n} \int_{-h}^{0} \frac{\big[k\big(T_o - \tau - h(1+m)\big)\big]^m}{m!} k z_o d\tau -$$

$$- \int_{0}^{T_o} \sum_{m=0}^{n} \frac{[k(T_o - \tau - mh)]^m}{m!} \big(u(\tau) - v(\tau)\big) d\tau =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{[k(T_o - mh)]^m}{m!} z_o + \sum_{m=0}^{n} \frac{k^{m+1}}{(m+1)!} [(T - mh)^{m+1} - (T - (m+1)h)^{m+1}] z_o -$$

$$- \int_{0}^{T_o} \sum_{m=0}^{n} \frac{[k(T_o - \tau - mh)]^m}{m!} \big(u(\tau) - v(\tau)\big) d\tau =$$

$$= \int_{0}^{T_o} W(\tau) dr - \int_{0}^{T_o} W(\tau) d\tau = 0,$$

т.е. $z(T_o) = 0$ или $x(T_o) = y(T_o)$

Следовательно, из любого начального положения $z_o \in X$ возможно завершение преследования за оптимальное время T_o. При этом, время преследования T_o можно найти из равенства

$$\sum_{m=0}^{n}\left[\frac{[k(T_o-mh)]^m}{m!}+\frac{(k)^{m+1}}{(m+1)!}((T_o-mh)]^{m+1}-(T_o-(m+1)h)^{+1})\right]\times$$

$$\times\|z_o\|=(\alpha-\beta)\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{k^m}{(m+1)!}((T_o-mh)^{m+1}-(-mh)^{m+1}).$$

В частности, когда $\mathrm{k}=0$, имеем

$$\mathrm{T_o}=\frac{\|z_o\|}{\alpha-\beta}$$

Для завершения преследования преследователь выбирает управление $u=u(t)$ по формуле (7). Теорема доказана.

Замечание. В работах ([4], с/19-24; [5], с.77-80) рассматривается аналогичная задача преследования для некоторых линейных игр запаздывающего типа в банаховых пространствах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Понтрягин, Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования/Л.С.Понтрягин// Математический сборник. 1980.Т.112 (154).- №3.- С.307-331.
2. Мухсинов, Е.М. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний в гильбертовом пространстве/Е.М.Мухсинов, М.Н.Муродова// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2016.-№1/1(192).-С.233 – 236.
3. Castaing C. Convex analysis and measurable/C.Castaing,M.Valadier// Multifunctions-Iecture Notes Math. 1977.- №580.- P.1-278.
4. Муродова, М.Н. Решение некоторых примеров дифференциальных игр в гильбертовом пространстве/М.Н.Муродова//Учённые записки. Серия: естественные и экономические науки. Издательство: Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова. 2019. №3 (50). С.19-24
5. Мухсинов, Ё.М. Задача преследования для одной дифференциальной игры запаздывающего типа в банаховом пространстве/Е.М.Мухсинов,М.Н.Муродова// Материалы международной научно-практической конференции «XIII Ломоновские чтения» посвященной 115-летию академика Б.Гафурова (28-29 апреля 2023г.). Душанбе. 2023.- С.77-80.

REFERENCES:

1. Pontryagin, L.S. Linear differential pursuit games // Mathematical collection. 1980. V.112 (154). #3. P.307-331.
2. Mukhsinov, E.M., Murodova M.N. Linear differential pursuit games in the presence of delays in a Hilbert space // Bulletin of the Tajik National University. Natural Sciences Series. 2016. #1/1(192). P.233-236.
3. Castaing, C., Valadier M. Convex analysis and measurement // Multifunctions-Iecture Notes Math. 1977.-№580. P.1-278.
4. Murodova, M, N. Solution of some examples of differential games in Hilbert space // Scientific Notes. Series: natural and economic sciences. Publisher: Khujand State University named after academician B. Gafurov. 2019.-№ 3 (50). P.19-24
5. Mukhsinov, E.M., Murodova M.N. Pursuit problem for one differential game of retarded type in a Banach space // Materials of the international scientific and practical conference “XIII Lomonov Readings” dedicated to the 115th anniversary of academician B. Gafurov (April 28-29, 2023). Dushanbe. 2023. P 77-80.