1.1.2.[01.01.02]МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ, СИСТЕМАҲОИ ДИНАМИКӢ, ИДОРАКУНИИ ОПТИМАЛӢ
1.1.2.[01.01.02]ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
1.1.2.[01.01.02]DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS, OPTIMAL MANAGEMENT

УДК 517.837.2

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ПРОСТОЙ ИГРЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мухсинов Ёдгор Мирзоевич, *к. физ.-мат.наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП (Таджикистан, Худжанд)*

ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАИ ТАЪҚИБКУНӢ БАРОИ ЯК БОЗИИ СОДАИ НАМУДИ НЕЙТРАЛӢ ДАР ФАЗОИ БАНАХ

Муҳсинов Ёдгор Мирзоевич, *н.и.физ.-мат., дотсенти кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири ДДҲБСТ(Тоҷикистон, Хуҷанд)*

SOLVABILITY PURSUIT TASKS FOR ONE NEUTRAL TYPE SIMPLE GAME IN BANACH SPACE

Mukhsinov Edgor Mirzoevich, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science TSULBP(Tajikistan, Khujand),* ***E- mail:*** *yodgor.mukhsinov@gmail.com*

Ключевые слова: *задача преследования, простая игра нейтрального типа, управление преследования, управление убегания, время преследования, банахово пространство*

В работе исследуется одна простая игра нейтрального типа в банаховом пространстве. Доказана теорема о разрешимости задачи преследования в смысле Л.С.Понтрягина. Найдено оптимальное время преследования и дана формула для выбора управления преследования.

Вожаҳои калидӣ: *масъалаи таъқибкунӣ, бозии содаи намуди нейтралӣ, идоракунии таъқибкунӣ, идоракунии гурехтан, вақти таъқибкунӣ, фазои Банах*

Дар мақола як бозии содаи намуди нейтралӣ дар фазои Банах таҳқиқ карда мешавад. Теорема оид ба ҳалшавандагии масъалаи таъқибкунӣ ба маънои Л.С.Понтрягин исбот шудааст. Вақти оптималии таъқибкунӣ ёфта, формулаи интихоби идоракунии таъқибкунӣ дода шудааст.

Key words: *pursuit task, simple neutral type game, pursuit control, escape control, pursuit time, banach space*

The give article dwells on one simple game of neutral type in a Banach space. The author proves the theorem on the solvability of the pursuit problem in the sense of L.S. Pontryagin. The optimal pursuit time is found and a formula is given for selecting the pursuit control.

В работах Л.С.Понтрягина [1,с.307-331] и его последователей исследованы конечномерные дифференциальные игры, когда динамика игры описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Но последние годы возрос интерес к играм, когда динамика игры описывается более сложными уравнениями, в частности, дифференциальными уравнениями нейтрального типа. Это можно объяснить, во-первых, тем, что такие уравнения содержать неизвестную функцию и ее производные в разные моменты времени, что позволяет более точно отображать динамику игры. Во-вторых, увеличилось количество приложений таких уравнений к практическим задачам из военной сферы, техники, физики и экономики [2, с.13-17].

В данной работе исследуется разрешимость задачи преследования для одной простой игры нейтрального типа в банаховом пространстве.

В банаховом пространстве X рассматривается простая игра, описываемая системой

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1\dot{x}(t-h) + k_2x(t-h) + u, & \|u\| \le \alpha, \quad k_1 \ge 0 \\ \dot{y} = k_1\dot{y}(t-h) + k_2y(t-h) + v, & \|v\| \le \beta, \quad k_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Определение. *В игре (1) из начального положения (x_o, y_o) возможно завершение преследования, если существует число $T = T(x_o y_o) \geq 0$ такое, что для любого допустимого измеримого управления убегания $\vartheta = \vartheta(t)$ можно выбрать такое допустимое измеримое управления преследования $u = u(t)$, что $x(T) = y(T)$.*

Для решения задачи преследования для игры (1) эту систему перепишем в виде

$$\dot{z} = k_1 \dot{z}(t-h) + k_2 z(t-h) - u + v, \qquad (2)$$

где $z = y - x$, а терминальное множество, где заканчивается игра имеет вид $M = \{0\}$. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $\alpha > \beta$;

2) *при некотором T, $nh \leq T \leq (n+1)h$, $n = 0,1,2,\dots$ имеет место включение*

$$[1 - k_1 + k_2 h + \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{1}{(i+1)!} \times$$

$$\left[(T-mh)^{i+1} - k_1 (T-(m+1)h)^{i+1} + \frac{k_2}{i+2}\left((T-mh)^{i+2} - (T-(m+1)h)^{i+2}\right)\right]] z_o \in S_r \ (3)$$

где S_r −шар с центром в O и радиусом

$$r = r(T) = (\alpha - \beta)\left(T + \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} \cdot k_1^{m-1-i} k_2^{i+2} \cdot \frac{(T-mh)^{i+2} - (-mh)^{i+2}}{(i+2)!}\right).$$

Тогда из любого начального положения $z_o \in X$ возможно завершение преследования за оптимальное время

$$T_o = min\left\{T \geq 0: \left\|\left[1 - k_1 + k_2 h + \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{1}{(i+1)!}\left[(T-mh)^{i+1} - k_1(T - (m+1)h)^{i+1} + \frac{k_2}{i+2}\left((T-mh)^{i+2} - (T-(m+1)h)^{i+2}\right)\right]\right] z_o\right\| = r(T)\right\}$$

Доказательство. В силу того, что $\alpha > \beta$, то функция $r = r(T)$ возрастающая и $r = r(0) = 0$. Тогда для любого начального положения $z_o \in X$ существует такое число $T \geq 0$, что имеет место включение (3). Так как шар S_r замкнутое множество, то включение (3) имеет место и при T= T_o . В силу работы ([1], с. 313) шар S_r запишем в виде

$$S_{r(T_0)} = S_{\int_0^{T_0}(\alpha-\beta)(1+\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{[(T_0-\tau-mh)]^{i+1}}{(i+1)!})d\tau} =$$

$$= \int_0^{T_0} S_{(\alpha-\beta)\left(1+\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{[(T_0-\tau-mh)]^{i+1}}{(i+1)!}\right)} d\tau =$$

$$= \int_0^{T_0}\left(1 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{[(T_o-\tau-mh)]^{i+1}}{(i+1)!}\right) S_\alpha \stackrel{*}{-}$$

$$\stackrel{*}{-}\left(1 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{[T_o-\tau-mh]^{i+1}}{(i+1)!} S_\beta\right) d\tau =$$

$$= \int_0^{T_0}\left(\Phi(T_o-\tau) S_\alpha \stackrel{*}{-} \Phi(T_o-\tau) S_\beta\right) d\tau, \qquad (4)$$

где

$$\Phi(t) = \left[1 + \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{[t-mh]^{i+1}}{(i+1)!}\right] I,$$

I −единичный оператор.

Тогда в силу (3) и (4) существует такое отображение

$$w(\tau) \in \Phi(T_0-\tau)S_\alpha \underline{*} \Phi(T_0-\tau)S_\beta \qquad (5)$$

что имеет место равенство

$$\Bigg[1 - k_1 + k_2 h + \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{1}{(i+1)!}\left[(T_o - mh)^{i+1} - k_1(T_o-(m+1)h)^{i+1}\right]$$
$$+ \frac{k_2}{i+2}\left((T_o-mh)^{i+2} - (T_o-(m+1)h)^{i+2}\right)\Bigg] z_o =$$
$$= \int_0^{T_o} w(\tau) d\tau \qquad (6)$$

Допустим, что $v = v(\tau)$ −произвольное измеримое допустимое управления убегания. Тогда в силу (5) имеем:

$$w(\tau) + \Phi(T_o-\tau)v(\tau) \in \Phi(T_o-\tau)S_\alpha \qquad (7)$$

Из соотношения (7) в силу леммы 1 ([3], с.143) следует существовании измеримого управления преследования $u = u(\tau)$, что имеет место равенство

$$w(\tau) + \Phi(T_o-\tau)v(r) = \Phi(T_o-\tau)u(\tau). \qquad (8)$$

Легко можно проверить, что $u \in S_\alpha$, т.е. $\|u\| \leq \alpha$.

Учитывая работу ([4], с.80) и равенства (6) и (8) для решения задачи (2) с начальным положением $z(0) = z_o, -h \leq t \leq 0$ получим:

$$z(T_o) = [\Phi(T_o) - \Phi(T_o-h)k_1]z_o + \int_{-h}^{0} \Phi(T_o-\tau-h)\, k_2 \cdot z_o d\tau +$$
$$+ \int_0^{T_o} \Phi(T_o-\tau)\big(-u(\tau)+v(\tau)\big)\, d\tau, \qquad (9)$$

где Φ(t)- фундаментальное решение определяется из равенства

$$\dot\Phi(t) = k_1\dot\Phi(t-h) + k_2\Phi(t-h), \quad \Phi(0) = I \text{ и } \Phi(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Пусть:

1) $0 \leq t \leq h$. Тогда

$$\dot\Phi(t) = k_1 \cdot \dot\Phi(t-h) + k_2 \cdot \Phi(t-h) = 0, \quad \Phi(t) = \Phi(0) + C,$$
$$\Phi(0) = \Phi(0) + C, \qquad C = 0.$$

Следовательно, Φ(t)=I.

2) $h \leq t \leq 2h$. Тогда

$$\dot\Phi(t) = k_1\dot\Phi(t-h) + k_2\Phi(t-h) = k_1\dot I + k_2 \cdot I = k_2 \cdot I,$$

$$\Phi(t) = \Phi(h) + k_2(t-h)I = I + k_2(t-h)I = [1 + k_2(t-h)] \cdot I.$$

Следовательно, $\Phi(t)=[1+k_2(t-h)]I$.

3) $2h \le t \le 3h$. Тогда

$$\dot{\Phi}(t) = k_1\big(1+k_2(t-2h)\big)' I + k_2 \cdot [1+k_2(t-2h)]I =$$
$$= \big[k_1 \cdot k_2 + k_2 \cdot [1+k_2(t-2h)]\big]I,$$
$$\Phi(t) = \Phi(2h) + \left[k_1 \cdot k_2(t-2h) + k_2(t-2h) + \frac{k_2^2(t-2h)^2}{2!}\right] I =$$
$$= (1+k_2h)I + (k_2t - 2k_2h)I + \left[k_1 \cdot k_2(t-2h) + \frac{k_2^2(t-2h)^2}{2!}\right] I =$$
$$= \left[1 + k_2(t-h) + k_1 \cdot k_2(t-2h) + \frac{k_2^2(t-2h)^2}{2!}\right] I =$$
$$= I + C_0^0 k_2(t-h)I + \left[C_1^o k_1 \cdot k_2(t-2h) + C_1^1\frac{k_2^2(t-2h)^2}{2!}\right] I,$$

где

$$C_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Далее, по индукции можно показать, что

$$\Phi(t) = (1 + C_0^0 k_2(t-h))I + \left[C_1^o k_1 \cdot k_2(t-2h) + C_1^1\frac{k_2^2(t-2h)^2}{2!}\right] I + \dots +$$
$$+\left[C_{n-1}^o k_1^{n-1} \cdot k_2(t-nh) + C_{n-1}^1 k_1^{n-2} \cdot k_2^2 \frac{(t-2h)^2}{2!} + C_{n-1}^2 k_1^{n-3} \cdot k_2^3 \frac{(t-nh)^3}{3!} + \dots + C_{n-1}^{n-1} \cdot k_2^n \frac{(t-nh)^n}{n!}\right] I =$$
$$= I + \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i\, k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{(t-mh)^{i+1}}{(i+1)!} I =$$
$$= \left[1 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{(t-mh)^{i+1}}{(i+1)!}\right] I, \qquad (10)$$

когда

$$nh \le t \le (n+1)h.$$

Следовательно, в силу (6), (8), (9) и (10) имеем:

$$z(T_o) = [\Phi(T_o) - \Phi(T_o - h)k_1]z_o + \int_{-h}^{0} \Phi(T_o - \tau - h)\, k_2 \cdot z_o\, d\tau -$$
$$-\int_0^{T_o} \Phi(T_o - \tau)\big(u(\tau) - v(\tau)\big)\, d\tau =$$
$$= \Bigg[\left(1 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i\, k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{(T_o - mh)^{i+1}}{(i+1)!}\right) I$$
$$- \left(k_1 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i k_1^{m-1-i} \cdot k_2^{i+1} \cdot \frac{\big(T_o - h(m+1)\big)^{i+1}}{(i+1)!} k_1\right)\Bigg] z_o +$$

$$+\int_{-h}^{0}\left(1+\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}C_{m-1}^{i}\,k_1^{m-1-i}\cdot k_2^{i+1}\cdot\frac{(T_o-\tau-(m+1)h)^{i+1}}{(i+1)!}\right)k_2\,z_o\,d\tau-$$

$$-\int_0^{T_0}w(\tau)d\tau=\left[\left(1-k_1+\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}C_{m-1}^{i}k_1^{m-1-i}\cdot k_2^{i+1}\cdot\frac{1}{(i+1)!}\right.\right.$$

$$\left.\cdot\left[(T_o-mh)^{i+1}-k_1\left(T_o-h(m+1)\right)^{i+1}\right]\right)+k_2h$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}C_{m-1}^{i}k_1^{m-1-i}\cdot k_2^{i+1}\cdot\frac{(T_o-hm)^{i+2}-(T_o-(m+1)h)^{i+2}}{(i+2)!}k_2\right]z_0-$$

$$-\int_0^{T_0}w(\tau)d\tau=\left[1-k_1+k_2h+\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}C_{m-1}^{i}k_1^{m-1-i}\cdot k_2^{i+1}\cdot\frac{1}{(i+1)!}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[(T_o-mh)^{i+1}-k_1\left(T_o-h(m+1)\right)^{i+1}+\frac{k_2}{i+2}(T-mh)^{i+2}-(T-(m+1)h)^{i+2}\right]\right]z_o$$

$$-\int_0^{T_0}w(\tau)d\tau=\int_0^{T_0}w(\tau)d\tau-\int_0^{T_0}w(\tau)d\tau=0,$$

т.е. $x(T_o)=y(T_o)$.

Поэтому из любого начального положения $z_o\in X$ возможно завершение преследования за оптимальное время T_o. При этом управление преследования $u=u(\tau)$ выбирают по формуле (8).

Замечание. *Отметим, что когда* $k_1=k_2=0$ *мы получаем известный классический результат*

$$\mathrm{T_o}=\frac{\|z_o\|}{\alpha-\beta}.$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Мухсинов, Ё.М. Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве/Е.М.Мухсинов//Дифференциальные уравнения. -2023, т.59, №1.-С.142-146.
2. Мухсинов, Ё.М. О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх/Е.М.Мухсинов//Диссертация на соискание ученой степени доктора физико математических наук. Худжанд. 2023.-306 с.
3. Понтрягин, Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования/Л.С.Понтрягин// Математический сборник. -1980, т.112 (154).- №3.-С.307-331.
4. Хейл, Дж. Теория функционально дифференциальных уравнений.Учебник/Дж.Хейл// Москва: Мир, 1980.- 421 с.

REFERENCES:

1. Mukhsinov, E.M. Solvability of the pursuit problem for one differential game in a Banach space/ E.M.Mukhsinov // Differential equations. 2023. V59.- №1.-P.142-146.
2. Mukhsinov E.M. On the solvability of pursuit and escape problems in differential games/ E.M. Mukhsinov//Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Khujand.- 2023.- 306 p.
3. Pontryagin, L.S. Linear differential pursuit games/L.S.Pontryagin//Mathematical collection. 1980. V.112 (154). №3. P.307-331.
4. Hale, J. Theory of functional differential equations. Textbook. Moscow: Mir, 1984.- 421 p.