1. ИЛМҲОИ ТАБИАТШИНОСӢ
1. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
1. THE NATURAL SCIENCES

1.1. МАТЕМАТИКА ВА МЕХАНИКА
1.1. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
1.1.MATHEMATICS AND MECHANICS

1.1.2.Муодилаҳои дифференсиалӣ ва физикаи математикӣ
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
1.1.2.Differential equations and mathematical physics

УДК: 517. 968.22
ББК 22.161.6
О - 42

ҲАЛЛИ АНИҚИ БАЪЗЕ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ БЕФОСИЛАИ НАВЪИ ДУЮМИ ВОЛТЕРР

Олимӣ Абдуманон Ғафорзода *- номзади илмҳои физика-математика, дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

Олими Абдуманон Гафорзода *– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

EXACT SOLUTION OF SOME THE SECOND KIND CONTINUOUS VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

Olimi Abdumanon Gaforzoda *– Candidate of Physics and Mathematics Sciences, associate Professor Mathematical Analysis Department named after Professor A.Muksinov under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail:* Abdumanon1950@mail.ru

Вожаҳои калидӣ: *муодилаи интегралии навъи дуюми Волтерр, муодилаи якҷинса, муодилаи дифференсиалии одии хаттӣ, ҳалли муодила.*

Дар мақола намудҳои муодилаҳои интегралии бефосилаи навъи дуюми Волтерр сохта мешаванд, ки ҳалли онҳо дар намуди ошкор ёфта мешавад. Барои ин ҳалли муодилаи интегралӣ ва қисми рости онро кифоя суфта ҳисобида гузариш ба муодилаи дифференсиалии одии хаттии коэффитсиентҳояш тағйирёбандаи мувофиқ амалӣ карда мешавад. Сипас, ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии одӣ навишта дар асоси он формулаи ҳалли аниқи муодилаи интегралӣ бароварда мешавад. Маводи дар мақола пешниҳодшаванда ҳамчунин барои такмили мазмуни курсҳои муодилаҳои интегралии Волтерр ва муодилаҳои дифференсиалии одии хаттӣ татбиқ мегардад.

Ключевые слова: *интегральное уравнение Вольтерра второго рода, однородное уравнение, линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, решение уравнения.*

В статье конструируются типы непрерывных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, решение которых находится в явном виде. Для этого, предполагая решение и правую часть интегрального уравнения достаточно гладкими, осуществляется переход к соответствующему линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами. Далее, выписывается общее решение обыкновенного дифференциального уравнения и на его основе выводится формула точного *решения интегрального уравнения. Материал приводимый в статье также применяется для совершенствования содержания курсов интегральных уравнений Вольтерра и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Key words: *second kind Volterra integral equation , homogeneous equation, linear ordinary differential equation, solution of the equation.*

The article constructs the types of continuous Volterra integral equations of the second kind, the solution of which is in an explicit form. To do this, assuming the solution and the right side of the integral equation are sufficiently smooth, a transition is made to the corresponding linear ordinary differential equation with variable coefficients. Next, the general solution of an ordinary differential equation is written out and on its basis the formula for the exact solution of the integral equation is derived. The

material given in the article is also used to improve the content of the courses of Volterra integral equations and linear ordinary differential equations.

Муодилаҳои интегралии хаттии Волтерр бо муодилаҳои дифференсиалии одии хаттӣ алоқаи зич доранд, ки аз он дар омӯзиши муодилаҳо самаранок истифода мебаранд [1-4]. Масалан, Э.Гурса [1, с.14-15] дар вақти қисми рости муодилаи интегралии навъи дуюми Волтерр бефосила ва ядрои он $K(x,t)$ нисбат ба x ё t бисёраъзогӣ будан, яъне намуди

$$K_1(x,t) = a_0(t) + a_1(t)(x-t) + ... + \frac{a_{n-1}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \text{ ё}$$

$$K_2(x,t) = b_0(x) + b_1(x)(x-t) + ... + \frac{b_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

- ро доштан, ки дар ин ҷо коэффитсиентҳои $a_k(t)$ ва $b_k(x)$ функсияҳои дар порчаи $[a,b]$ бефосила мебошанд, резолвентаи муодиларо бо ёрии ҳалли масъалаи Кошӣ барои муодилаи дифференсиалии одии хаттии тартиби n-ум ифода кардааст. Дар вақти ҳалли масъалаи охирин маълум шудан ҳалли муодилаи интегралӣ бо ёрии резолвента навишта мешавад.

Дар мақолаи мазкур барои якчанд муодилаҳои интегралии навъи дуюми Волтерр бо ядрои намуди $K_1(x,t)$, ки шумораи онҳоро боз зиёд кардан мумкин аст, дар мавриде, ки коэффитсиентҳои $a_k(t)$, $k>0$ бо коэффитсиенти $a_0(t)$ ва ҳосилаҳои он ифода меёбанд, ҳалли муодила дар намуди ошкор ёфта мешавад.

1. Муодилаи зеринро дида мебароем:

$$\varphi(x) + \int_a^x p(t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1}$$

ки дар ин ҷо $p(x)$ ва $f(x)$ функсияҳои маълуми дар порчаи $[a,b]$ бефосила, $\varphi(x)$ бошад, функсияи матлуби дар ин порча бефосила мебошад. Дар аввал, фарз мекунем, ки $\varphi(x)$ ва $f(x)$ бефосила дифференсиронидашаванда бошанд. Ҳар ду тарафи муодилаи (1) - ро дифференсиронида муодилаи хаттии дифференсиалии зеринро ҳосил мекунем:

$$\varphi'(x) + p(t)\varphi(x) = f'(x). \tag{2}$$

Ҳалли умумии муодилаи (2) чунин аст:

$$\varphi(x) = \exp\left[-W_p(x)\right]\left\{C + \int_a^x f'(t)\exp\left[W_p(t)\right]dt\right\}, \tag{3}$$

дар ин ҷо $W_p(x) = \int_a^x p(t)dt$ ва C - доимии ихтиёрӣ мебошад.

Шарти иловагии $f(a)=0$ - ро гузошта дар баробарии охирин қисм ба қисм интегрониро иҷро мекунем:

$$\int_a^x f'(t)\exp\left[W_p(t)\right]dt = \exp\left[W_p(x)\right]f(x) - \int_a^x p(t)f(t)\exp\left[W_p(t)\right]dt,$$

дар натиҷа формулаи (3) чунин мешавад:

$$\varphi(x) = C\exp\left[-W_p(x)\right] + f(x) - \exp\left[-W_p(x)\right]\int_a^x p(t)f(t)\exp\left[W_p(t)\right]dt.$$

Аз ин ҷо дар вақти $f(x)\equiv 0$ функсияи $C\exp\left[-W_p(x)\right]$ - ро ҳосил мекунем ва тафтиши бевосита нишон медиҳад, ки ин функсия муодилаи якҷинсаи ба (1) мувофиқро танҳо дар ҳолати $C=0$ қонеъ мегардонад, яъне ҳалли муодилаи якҷинса функсияи нолӣ аст. Ин аз назарияи умумӣ ҳам маълум мебошад. Пас, дар вақти $\varphi(x)$ ва $f(x)$ дифференсиронидашаванда будан ҳалли муодилаи умумии (1) чунин мешавад:

$$\varphi(x) = f(x) - \exp\left[-W_p(x)\right]\int_a^x p(t)f(t)\exp\left[W_p(t)\right]dt. \tag{4}$$

Шартҳои ба функсияи $f(x)$ гузошташударо сарфи назар карда нишон медиҳем, ки дар ҳолати функсияи ихтиёрии бефосила будани он, функсияи (4) ҳалли муодилаи (1) мешавад. Барои ин функсияи (4) – ро ба муодилаи (1) гузошта, аз ҳар ду тараф $f(x)$ - ро партофта дар қисми чапи баробарӣ ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$-\exp\left[-W_p(x)\right]\int_a^x p(t)f(t)\exp\left[W_p(t)\right]dt +$$
$$+\int_a^x p(t)f(t)dt - \int_a^x p(t)\exp\left[-W_p(t)\right]dt\int_a^t p(\xi)f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi. \tag{5}$$

Дар ин ҷо дар интеграли дукарата тартиби интегрониро дигар карда ва аз натиҷаи ҳосилшуда $p(t)\exp\left[-W_p(t)\right]dt = -\left(\exp\left[-W_p(t)\right]\right)'$ буданашро ба назар гирифта, барои ин интеграл баробарии зеринро пайдо мекунем:

$$\int_a^x p(t)\exp\left[-W_p(t)\right]dt\int_a^t p(\xi)f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi = \int_a^x p(\xi)f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi\int_\xi^x p(t)\exp\left[-W_p(t)\right]dt =$$
$$= -\exp\left[-W_p(x)\right]\int_a^x p(t)f(t)\exp\left[W_p(t)\right]dt + \int_a^x p(\xi)f(\xi)d\xi.$$

Қимати интеграли дукаратаро аз ин баробарӣ ба ифодаи (4) гузошта, айниятан ба нол баробар будани ифодаи мазкурро мефаҳмем.

Хулоса, ҳалли муодилаи (1) бо формулаи (4) ифода меёбад.

Мисоли 1. Муодилаи $\varphi(x) + \int_a^x \varphi(t)dt = x$ - ро ҳал кунед.

Муодилаи додашуда намуди (1) – ро дорад, ки дар он $p(t)=1$ аст, бинобар ин $W_p(x) = \int_a^x dt = x-a$ мешавад. Натиҷаҳоро ба формулаи (4) гузошта, ҳалли муодиларо ҳосил мекунем: $\varphi(x) = x - e^{-(x-a)}\int_a^x te^{t-a}dt$ ё ки $\varphi(x) = 1 + (a-1)e^{-(x-a)}$.

2. Муодилаи намуди

$$\varphi(x) + \int_a^x \left\{2p(t) + (x-t)\left[p^2(t) - p'(t)\right]\right\}\varphi(t)dt = f(x),\ x\in[a;\, b] \tag{6}$$

- ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $p(x) \in C^1[a;\, b]$, $f(x) \in C[a;\, b]$ функсияҳои маълум ва $\varphi(x) \in C[a;\, b]$ функсияи матлуб мебошад.

Бароии ёфтани ҳалли муодилаи додашуда, дар аввал ҳалли муодила $\varphi(x)$ ва қисми рости он $f(x)$ - ро ду маротиба дифференсиронидашаванда ҳисоб мекунем ва ҳар ду тарафи муодиларо ду маротиба медифференсиронем. Дар натиҷа ба хулоса меоем, ки ҳалли муодилаи (6) муодилаи дифференсиалии хаттии

$$\varphi''(x) + 2p(x)\varphi'(x) + \left[p'(x) + p^2(x)\right]\varphi(x) = f''(x) \tag{7}$$

- ро қонеъ мегардонад. Ҳалли умумии муодилаи (7) мувофиқи формулаи (5) [3, с. 17] чунин намуд дорад:

$$\varphi(x) = C_0 \exp\left[-W_p(x)\right] + C_1(x-a)\exp\left[-W_p(x)\right] + \exp\left[-W_p(x)\right]\int_a^x (x-\xi) f''(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi\,, \tag{8}$$

ки дар ин ҷо C_0 ва C_1 - доимиҳои ихтиёрианд.

Дар ин формула интегралро бо роҳи ду маротиба қисм ба қисм интегронидан дигаргун менамоем. Дар ин ҳол, бе таъсир ба натиҷаи ниҳоӣ, бар илова ба шартҳои болоӣ фарз мекунем, ки $f'(a) = f(a) = 0$ аст. Ҳосил мекунем:

$$\int_a^x (x-\xi) f''(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi =$$

$$= (x-\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]f'(\xi)\Big|_a^x - \int_a^x f'(\xi)\left[(x-\xi)p(\xi) - 1\right]\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi =$$

$$= -\left[(x-\xi)p(\xi) - 1\right]\exp\left[W_p(\xi)\right]f(\xi)\Big|_a^x + \int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi) + p'(\xi)\right] - 2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi =$$

$$= \exp\left[W_p(x)\right]f(x) + \int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi) + p'(\xi)\right] - 2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi\,.$$

Бо назардошти ин баробарӣ, формулаи (8), ки ҳалли муодилаи интегралии додашударо дарбар мегирад, чунин мешавад:

$$\varphi(x) = C_0 \exp\left[-W_p(x)\right] + C_1(x-a)\exp\left[-W_p(x)\right] + f(x) +$$
$$+ \int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi) + p'(\xi)\right] - 2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi) - W_p(x)\right]d\xi\,. \tag{9}$$

Дар вақти $f(x) \equiv 0$ будан аз формулаи (9) ифодаи зерин ҳосил мешавад:

$C_0 \exp\left[-W_p(x)\right] + C_1(x-a)\exp\left[-W_p(x)\right]$, ки бояд ҳалли муодилаи якҷинсаи мувофиқи муодилаи (6) бошад. Бевосита ба муодила гузоштан нишон медиҳад, ки ин танҳо дар ҳолати $C_0 = C_1 = 0$ имконпазир аст, яъне муодилаи якҷинсаи мувофиқ ба ҳалли ягонаи нолӣ соҳиб мебошад. Дар асоси назарияи умумии муодилаҳои интегралӣ низ ҳамин хулоса дуруст аст.

Ҳамин тавр, дар вақти иҷро шудани шартҳои ба функсияи $f(x)$ гузошташуда, ҳалли муодилаи (6) функсияи намуди

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi) + p'(\xi)\right] - 2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi) - W_p(x)\right]d\xi \tag{10}$$

мешавад.

Акнун исбот мекунем, ки бароии функсияи ихтиёрии бефосилаи $f(x)$ формулаи (10) ҳалли муодилаи интегралии додашударо ифода мекунад. Бо ин мақсад ифодаи функсияи $\varphi(x)$ - ро аз формулаи (10) ба муодилаи интегралии (6) мегузорем, аз ҳар ду тараф $f(x)$ - ро ихтисор мекунем ва қисми чапи баробарии ҳосилшударо чунин ишорат мекунем ва дида мебароем:

$$X(x) \equiv \int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi) + p'(\xi)\right] - 2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi) - W_p(x)\right]d\xi +$$

$$+\int_a^x \left\{2p(t)+(x-t)\left[p^2(t)-p'(t)\right]\right\}\left\{f(t)+\int_a^t \left\{(t-\xi)\left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]-2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)-W_p(t)\right]d\xi\right\}dt\,.$$

Мо бояд нишон диҳем, ки $X(x)\equiv 0$ аст. Пеш аз ҳама, қайд мекунем, ки $X(x)$ функсияи дар порчаи $[a;\,b]$ бефосила мебошад ва $X(a)=0$ аст. $X'(x)$ - ҳисоб мекунем:

$$X'(x)=\int_a^x \left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]d\xi+$$

$$+\int_a^x \left[p^2(t)-p'(t)\right]\left\{f(t)+\int_a^t \left\{(t-\xi)\left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]-2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]d\xi\right\}dt+$$

$$+p(x)\int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]-2p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]d\xi\,.$$

Аз ин ҷо маълум мегардад, ки $X'(x)$ дар порчаи $[a;\,b]$ бефосила ва $X'(a)=0$ аст. Акнун $X''(x)$ - ро ҳисоб карда, ҳосил мекунем:

$$X''(x)=-p(x)\int_a^x \left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]d\xi+\left[p^2(x)+p'(x)\right]f(x)+$$

$$+\left[p^2(x)-p'(x)\right]\left\{f(x)+\int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]-2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]d\xi+\right.$$

$$+p'(x)\int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]-2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]d\xi+$$

$$+p(x)\int_a^x \left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]d\xi-$$

$$-p^2(x)\int_a^x \left\{(x-\xi)\left[p^2(\xi)+p'(\xi)\right]-2p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]d\xi-2p^2(x)f(x)\equiv 0\,.$$

Аз айнияти охирин ва баробарии $X'(a)=0$, айнияти $X'(x)\equiv 0$, аз ин ва баробарии $X(a)=0$ айнияти $X(x)\equiv 0$ - ро дар порчаи $[a;\,b]$ ҳосил мекунем.

Ин натиҷа собит месозад, ки функсияи (10) ҳалли муодилаи (6) мебошад.

Қайд кардан лозим аст, ки айнияти $X(x)\equiv 0$ - ро, чун дар ҳолати муодилаи 1, бо роҳи элементарӣ исбот кардан мумкин аст.

Мисоли 2. Ҳалли муодилаи зеринро ёбед: $\varphi(x)+4\int_a^x (1+x-t)\varphi(t)dt=x+1$. Муодилаи додашуда муодилаи намуди (6) мебошад, дар он $p(x)=2$, $f(x)=x+1$ аст. Пас, $W_p(x)=\int_a^x 2dt=2(x-a)$ буда, мувофиқи формулаи (10) ҳалли муодилаи додашударо чунин меёбем:

$$\varphi(x)=x+1+4\int_a^x (x-\xi-1)(\xi+1)e^{2(\xi-a)-2(x-a)}d\xi=x+1+4\int_a^x (x-\xi-1)(\xi+1)e^{2(\xi-x)}d\xi=$$

$$=x+1+4e^{-2x}\int_a^x (x-\xi-1)(\xi+1)e^{2\xi}d\xi\,,\ \varphi(x)=\left[2a^2+2a+1-(2a+1)x\right]e^{2a-2x}.$$

Мисоли 3. Ҳалли муодилаи $\varphi(x)+\int_a^x (2+x-t)\varphi(t)dt=1$ - ро ёбед. Муодила додашуда муодилаи намуди (10) аст, $p(x)=1$, $f(x)=1$, бинобар ин $W_p(x)=x-a$ ва ҳалли он мувофиқи формулаи (10) чунин мешавад:

$$\varphi(x)=1+\int_a^x (x-\xi-2)\exp(\xi-x)d\xi \text{ ё ки } \varphi(x)=-(x-a-1)e^{a-x}.$$

3. Муодилаи

$$\varphi(x)+\int_a^x \left\{3p(t)+3(x-t)\left[p^2(t)-p'(t)\right]+\frac{(x-t)^2}{2}\left[p^3(t)-3p(t)p'(t)+p''(t)\right]\right\}\varphi(t)dt=f(x) \quad (11)$$

- ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $p(x)\in C^2[a;\,b]$, $f(x)\in C[a;\,b]$ ва $\varphi(x)\in C[a;\,b]$ функсияи номаълум аст.

Дар аввал ҳалли муодила $\varphi(x)$ ва қисми рости он $f(x)$ - ро се маротиба

дифференсиронидашаванда ҳисоб мекунем ва аз ҳар ду тарафи муодила се маротиба ҳосила мегирем. Он гоҳ, ҳосил мекунем, ки ҳалли муодилаи интегралии (11) муодилаи дифференсиалии зеринро қонеъ мегардонад:

$$\varphi'''(x)+3p(x)\varphi''(x)+3\left[p^2(x)+p'(x)\right]\varphi'(x)+\left[p^3(x)+3p(x)p'(x)+p''(x)\right]\varphi(x)=f'''(x).$$

ки дар ин ҷо C_0, C_1 ва C_2 - доимиҳои ихтиёрианд.

Ҳалли умумии муодилаи охирин дар асоси формулаи (6) [3, с.17] дар намуди зерин навишта мешавад:

$$\varphi(x)=\exp\left[-W_p(x)\right]\int_a^x \frac{(x-\xi)^2}{2}f'''(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi+\frac{1}{2}C_2(x-a)^2\exp\left[-W_p(x)\right]+$$
$$+C_1(x-a)\exp\left[-W_p(x)\right]+C_0\exp\left[-W_p(x)\right], \quad (12)$$

ки дар ин ҷо C_0, C_1 ва C_2 - доимиҳои ихтиёрӣ ҳастанд.

Барои кӯтоҳ шудани навишт ва бе таъсир ба натиҷаи ниҳоӣ шартҳои иловагии $f''(a)=0$, $f'(a)=0$, $f(a)=0$ - ро гузошта, дар формулаи (12) интегралро пайдарпай қисм ба қисм интегронида, ҳосил мекунем:

$$\int_a^x \frac{(x-\xi)^2}{2}f'''(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi=\frac{(x-\xi)^2}{2}f''(\xi)\exp\left[W_p(x)\right]_a^x+$$
$$+\int_a^x\left[x-\xi-\frac{(x-\xi)^2}{2}p(\xi)\right]f''(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi=\left[x-\xi-\frac{(x-\xi)^2}{2}p(\xi)\right]\exp\left[W_p(\xi)f'(\xi)\right]_a^x+$$
$$+\int_a^x\left\{1-2(x-\xi)p(\xi)+\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]\right\}\exp\left[W_p(\xi)\right]f'(\xi)d\xi=$$
$$=\left\{1-2(x-\xi)p(\xi)+\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]\right\}\exp\left[W_p(\xi)\right]f(\xi)\Big|_a^x-$$
$$-\int_a^x\left\{3p(\xi)-3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]+\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi=$$
$$=\exp\left[W_p(x)\right]f(x)+$$
$$+\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}f(\xi)\exp\left[W_p(\xi)\right]d\xi$$

.

Ин табдилдиҳиро ба назар гирем, он гоҳ баробарии (12) намуди зеринро мегирад:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}C_2(x-a)^2\exp\left[-W_p(x)\right]+C_1(x-a)\exp\left[-W_p(x)\right]+C_0\exp\left[-W_p(x)\right]+ \quad (13)$$

$$+f(x)+\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi$$

.

Дар вақти $f(x)\equiv 0$ аз ин баробарӣ ифодаи

$$\frac{1}{2}C_2(x-a)^2\exp\left[-W_p(x)\right]+C_1(x-a)\exp\left[-W_p(x)\right]+C_0\exp\left[-W_p(x)\right]$$

ҳосил мешавад, ки бояд ҳалли муодилаи якҷинсаи ба муодилаи (11) мувофиқ шавад. Санҷиши бевосита нишон медиҳад, ки танҳо дар ҳолати $C_0=C_1=C_2=0$ будан ин тавр шуда метавонад. Пас, дар вақти ҳалли муодилаи (11) $\varphi(x)$ ва қисми рости он $f(x)$ се маротиба дифференсиронидашаванда будан ҳалли ин муодила функсияи

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi\cdot \qquad (14)$$

мешавад.

Исбот мекунем, ки ҳангоми $f(x)$ функсияи бефосилаи ихтиёрӣ будан формулаи (14) ҳалли муодилаи (11) – ро ифода менамояд. Барои ин функсияи (14) - ро ба муодила мегузорем, $f(x)$ - ро аз ҳар ду тараф мепартоем ва қисми чапи баробарии ҳосилшударо бо $\chi(x)$ - ишорат мекунем,

$$\chi(x)\equiv\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi+$$

$$+\int_a^x\left\{3p(t)+3(x-t)\left[p^2(t)-p'(t)\right]+\frac{(x-t)^2}{2}\left[p^3(t)-3p(t)p'(t)+p''(t)\right]\right\}\left\{\ f(t)+\right.$$
$$\left.+\int_a^t\left\{3(t-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(t-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(t)\right]f(\xi)d\xi\ \right\}dt$$

. Ҳисобкуниҳои зеринро мегузаронем:

$$\chi'(x)=\int_a^x\left\{3\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-(x-\xi)\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi-$$

$$-\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]p(x)f(\xi)d\xi+$$

$$+\int_a^x\left\{3\left[p^2(t)-p'(t)\right]+(x-t)\left[p^3(t)-3p(t)p'(t)+p''(t)\right]\right\}\left\{\ f(t)+\int_a^t\left\{\ 3(t-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{(t-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\ \right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(t)\right]f(\xi)d\xi\ \right\}dt+$$

$$3p(x)\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi,$$

$$\chi''(x)=-\int_a^x\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi+$$

$$+p(x)\int_a^x\left\{3p'(\xi)+3p^2(\xi)-(x-\xi)\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi+$$

$$+p^2(x)\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi-$$

$$-p'(x)\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi+$$

$$+\int_a^x\left[p^3(t)-3p(t)p'(t)+p''(t)\right]\left\{f(t)+\int_a^t\left\{3(t-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(t-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(t)\right]f(\xi)d\xi\right\}dt\,,$$

$$\chi'''(x)=p(x)\int_a^x\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi-$$

$$-\left[p''(x)+3p(x)p'(x)+p^3(x)\right]f(x)+p'(x)\int_a^x\left\{3p'(\xi)+3p^2(\xi)-(x-\xi)\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi-p(x)\int_a^x\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi-$$

$$-p^2(x)\int_a^x\left\{3p'(\xi)+3p^2(\xi)-(x-\xi)\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi+$$

$$+3\left[p(x)p'(x)+p^3(x)\right]f(x)+2p(x)p'(x)\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-\right.$$

$$\left.-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi+$$

$$+p^2(x)\int_a^x\left\{3p'(\xi)+3p^2(\xi)-(x-\xi)\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi-$$

$$-p^3(x)\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi-$$

$$-3p^3(x)f(x)-p''(x)\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-\right.$$

$$\left.-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi-p'(x)\int_a^x\left\{3p'(\xi)+3p^2(\xi)-(x-\xi)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi+p'(x)p(x)\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]\right\}-3p(\xi)\left.\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi+3p(x)p'(x)f(x)+\left[p^3(x)-\right.$$

$$\left.-3p(x)p'(x)+p''(x)\right]\left\{f(x)+\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi\right\}=$$

$$=\left[-p''(x)-3p(x)p'(x)-p^3(x)+3p(x)p'(x)+3p^3(x)-3p^3(x)+3p(x)p'(x)+p^3(x)-\right.$$
$$\left.-3p(x)p'(x)+p''(x)\right]f(x)+\left[2p(x)p'(x)-p^3(x)-p''(x)+p'(x)p(x)+p^3(x)-3p(x)p'(x)+p''(x)\right]\cdot$$
$$\cdot\int_a^x\left\{3(x-\xi)\left[p'(\xi)+p^2(\xi)\right]-\frac{(x-\xi)^2}{2}\left[p''(\xi)+3p(\xi)p'(\xi)+p^3(\xi)\right]-3p(\xi)\right\}\exp\left[W_p(\xi)-W_p(x)\right]f(\xi)d\xi\equiv 0\,.$$

Аз айнияти охирин ва баробариҳои аёни $\chi''(a)=0$, $\chi'(a)=0$, $\chi(a)=0$ бармеояд, ки $\chi(x)\equiv 0$ аст. Ин мефаҳмонад, ки функсияи бо формулаи (14) муайяншаванда ҳалли муодилаи интегралии (11) мебошад.

Мисоли 4. Ҳалли муодилаи интегралии

$$\varphi(x)+\int_a^x\left[3+3(x-t)+\frac{(x-t)^2}{2}\right]\varphi(t)dt=x$$

- ро ёбед.

Муодилаи додашуда муодилаи намуди (11) мебошад, ки дар ин ҳол $p(x)=1$, $f(x)=x$ аст. Пас, мувофиқи формулаи (14) ҳалли муодила чунин навишта мешавад:

$$\varphi(x)=x+\int_a^x\left[3(x-\xi)-\frac{(x-\xi)^2}{2}-3\right]e^{\xi-x}\xi d\xi=x-\frac{1}{2}\int_a^x(\xi-x)^3e^{\xi-x}d\xi-\frac{6+x}{2}\int_a^x(\xi-x)^2e^{\xi-x}d\xi-$$

$$-(3+3x)\int_a^x(\xi-x)e^{\xi-x}d\xi-3x\int_a^x e^{\xi-x}d\xi\ .$$

Дар ин ҷо интегралҳоро ҳисоб карда, натиҷаи зеринро соҳиб мешавем:

$$\varphi(x)=\left[(2a-1)(a-x)+\frac{1}{2}(a-1)(a-x)^2+a\right]e^{a-x}.$$

АДАБИЁТ

1. Гурса Э. Курс математического анализа. Т.3, ч.2 / Э.Гурса. - М-Л: ГТТИ, 1934.- 320с.
2. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями/ М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192с.
3. Олимов А.Г. К теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков//Ученые записки Худжандского государственного университета им. Б.Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. - Худжанд: Нури маърифат. - 2016, №2(37). - С.16-21.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений/ В.В.Степанов . -М., 1959.- 468 с.

LITERATURE

1. Goursat E. Course of mathematical analysis. Vol.3, part2 / E.Goursat. - M-L: GTTI, 1934.- 320p.
2. Krasnov M.L. Integral equations. Tasks and examples with detailed solutions/ M.L.Krasnov, A.I.Kiselev, G.I.Makarenko. – M.: Editorial URSS, 2003. – 192p.
3. Olimov A.G. On the theory of linear ordinary differential equations of higher orders//Scientific notes of B.Gafurov Khujand State University. Series: Natural and Economic Sciences. - Khujand: Nuri marifat. - 2016, №2(37). - P.16-21.
4. Stepanov V.V. Course of differential equations/ V.V.Stepanov . -M., 1959.- 468 p.