УДК 517. 91
ББК-22.161.61

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИЗНАКОВ ЛИНЕАРИЗУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПОМОЩИ ДВУХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

***Эргашбоев Турсунбой** – доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд*
***Воситова Дилором Абдурасуловна** –доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд),*
e–mail: vositova.dilorom@mail.ru

ТАТҚИҚИ АЛОМАТҲОИ ХАТТИКУНОНИИ МУОДИЛАИ РИККАТИ БО ЁРИИ АЛГЕБРАИ ДУЧЕНАКАИ ЛИ

***Эргашбоев Турсунбой** – дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А.Мӯҳсинов МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд)*
***Воситова Дилором Абдурасуловна** – дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А.Мӯҳсинов МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: vositova.dilorom@mail.ru*

STUDY OF LINEARIZABILITY CHARACTERS OF THE RIKKATI EQUATION WITH THE TWO – DIMENSIONAL LIE ALGEBRA

***Ergashboeva Tursunboy** – Dotsent of the Department of Mathematical Analysis named after Professor A.Mukhsinov State Educational Instituon “KhSU named after academician B. Gafurov” (Tajikistan Republic, Khujand)*
***Vositova Dilorom Abdurasulovna** – Dotsent of the Department of Mathematical Analysis named after Professor A.Mukhsinov, State Educational Instituon “KhSU named after academician B. Gafurov” (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: vositova.dilorom@mail.ru*

***Ключевые слова:** уравнения Риккати, группа Ли, алгебра Ли, оператор, оператор группы, коммутатор.*

Уравнения Риккати является нелинейным дифференциальным уравнением. Жозеф Лиувилль в 1841 году показал, что решение специального уравнения Риккати в общем случае не может быть представлено в виде интегрирования элементарных функций. В данной работе рассматривается уравнение Риккати с точки зрения группового анализа дифференциальных уравнений. Доказана теорема о разрешимости уравнения Риккати, допускающее двухмерную алгебру Ли. Доказательство теоремы содержит конструкцию построения решений уравнения Риккати и поэтому имеет теоритеческое и практическое значение.

***Вожаҳои калидӣ:** муодилаи Риккати, гуруҳи Ли, алгебраи Ли, оператор, оператори гуруҳ, коммутатор*

Муодилаи Риккати муодилаи дифференсиалии ғайрихаттӣ мебошад. Жозеф Лиувилл дар соли 1841 исбот намуд, ки ҳалли муодилаи махсуси Риккати дар ҳолати умумӣ бо ёрии функсияҳои элементарӣ ифода карда намешавад. Дар мақолаи мазкур муодилаи Риккати аз нуқтаи назари таҳлили гуруҳ дар муодилаҳои дифференсиалӣ татқиқ карда шудааст. Теорема дар бораи ҳалшавии муодилаи Риккати бо ёрии алгебраи дученакаи Ли исбот карда шудааст. Исботи теорема конструксияи сохтани ҳалли муодилаи Риккатиро дар бар мегирад ва аз ин рӯ аҳамияти калони назариявӣ ва амалӣ дорад.

Key words: *Riccati equations, Lie group, Lie algebra, operator, group operator, commutator.*

The Riccati equation is a non-linear differential equation. Joseph Liouville showed in 1841 that the solution of the special Riccati equation in the general case cannot be represented as an integration of elementary functions. In this paper, the Riccati equation is considered from the point of view of group analysis of differential equations. A theorem on the solvability of the Riccati equation is proved, which admits a two-dimensional Lie algebra. The proof of the theorem contains a construction for constructing solutions to the Riccati equation and, therefore, has theoretical and practical significance

Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое называется уравнением Риккати

$$\frac{dx}{dt} = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2. \qquad (1)$$

Отметим что, если известно одно частное решение уравнения (1), то оно интегрируется в квадратурах. Действительно, пусть $x = x_0(t)$ некоторое частное решение уравнение (1), сделаем замену $x(t) = x_0(t) + z(t)$, тогда получим

$$\frac{dx_0(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} = P(t) + Q(t)x_0 + Q(t)z(t) + R(t)\left[x_0^2(t) + 2x_0(t)z(t) + z^2(t)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = \left[P(t) + Q(t)x_0 + R(t)x_0^2(t) - \frac{dx_0}{dt}\right] + \left[Q(t)z + R(t)(2x_0z + z^2\right]$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \left[2R(t)x_0(t) + Q(t)z + R(t)z^2\right]. \qquad (2)$$

Уравнение (2) есть уравнение Бернулли $(n = 2)$. В общем случае уравнение (1) в квадратурах не интегрируется.

В данной статье мы приведём некоторые признаки интегрируемости уравнения Риккати. Для этого нам потребуются некоторые сведения и факты из теории групп Ли.

I. Однопараметрические группы преобразований и их операторы. Рассмотрим семейство отображений с действительным параметром a

$$T_a(z) = f(z, a), \qquad (3)$$

где $z \in R^N$ и $f(z, a) \in R^N$, т.е. мы имеем отображения $T_a : R^N \to R^N$. Семейство отображений $\{T_a\}_{a\in\Delta}$ называется однопараметрической группой преобразований, если выполнены следующие условия:

1^0. Для любых a и b из интервала Δ, для любых $T_a,\ T_b \in \{T_a\}$, $\quad T_b\ T_a = T_{a+b}$, т.е. $(T_bT_a)(z) = T_b(T_az) = f(f(z, a), b) = f(z, a+b)$.

2^0. Выполняется закон ассоциативности $T_a(T_bT_c) = (T_aT_b)T_c$.

3^0. $T_0(z) = f(z, 0) = f(z)$, т.е. $T_0 = J -$ тождественное отображение.

4^0. Для каждого $a \in \Delta$ существует обратный элемент $a^{-1} \in \Delta$ такой, что $T_aT_{a^{-1}} = T_{a^{-1}}T_a = J$, где $J -$тождественное отображение.

Если условие 2^0 имеет вид $T_aT_b = T_{\varphi(a,\, b)}$, то всегда можно добиться, чтобы $\varphi(a, b) = a + b$ [1, стр. 7-8].

Разложим функцию $\bar{z} = f(z, a)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 0$, тогда имеем $\bar{z} = f(z,\ a) = f(z,\ 0) + \left.\frac{\partial f(z, a)}{\partial a}\right|_{a=0} a + o(a)$ или

$$f(z, a) = z + \xi(z)a + o(a),$$

где

$$\xi^i(z) = \left.\frac{\partial f^i(z,a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{4}$$

Формулой (4) задаётся касательный вектор в точке z к кривой, описываемой точками $\bar{z}$ при групповом преобразования (3) и поэтому $\xi(z) = (\xi^1(z),\ \xi^2(z), ...,\ \xi^N(z))$ называется касательным векторным полем. Оператор

$$X = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} \tag{5}$$

называется инфинитезимальным оператором группы G (или просто оператором группы). Можно доказать, что множество всех операторов вида (5) образует линейное (или векторное) пространство. Линейное пространство, в котором задан билинейный закон умножения, называется алгеброй.

Рассмотрим любые два оператора $X_1 = \xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}$, $X_2 = \xi_2^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}$ вида (5). Определим их коммутатор $[X_1,\ X_2]$ формулой

$$[X_1,\ X_2] = \left(X_1(\xi_2^i) - X_2(\xi_1^i)\right)\frac{\partial}{\partial z^i}. \tag{6}$$

Из определения коммутатора видно, что он

1) билинеен: $[cX_1,\ X_2] = [X_1,\ cX_2] = c[X_1,\ X_2]$, $[X,\ X_1 + X_2] = [X,\ X_1] + [X,\ X_2]$, $[X_1 + X_2,\ X] = [X_1,\ X] + [X_2,\ X]$

2) антисимметричен: $[X_1,\ X_2] = -[X_2,\ X_1]$ и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[X_1,[X_2,\ X_3]] + [X_2,\ [X_3,\ X_1]] + [X_3,[X_1,\ X_2]] = 0.$$

Векторные пространство операторов вида (5) с коммутатором, определенным формулой (6) называется алгеброй Ли. Размерность векторного пространства L считается размерностью алгебры Ли.

Ниже мы рассмотрим некоторые применения алгебры Ли в задачах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, остановимся на вопросе о том, какие уравнения (помимо линейных) обладают фундаментальной системой решений, так что задача построения общего решения сводится к нахождению конечного числа частных решений.

Пусть задана нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = F^i(t,\ x^1,\ x^2, ..., x^n), \quad i = 1,2,...,\ n. \tag{7}$$

Говорят, что система (7) обладает фундаментальной системой частных решений

$$x_k = (x_k^1,\ x_k^2, ...,\ x_k^n), \quad k = 1,2,...,\ m, \tag{8}$$

если общее решение системы (7) выражается через частные решения (8) формулами

$$x^i = \varphi^i(x_1, ...,\ x_m,\ c_1,\ c_2, ...,\ c_n),$$

при этом частные решения (8) называется фундаментальной системой решений уравнений (7). Общий вид уравнений с фундаментальными решениями нашёл Софус Ли и доказал следующую теорему

Теорема 1. Уравнения (7) обладают фундаментальной системой решений, если они представимы в виде

$$\frac{dx^i}{dt} = T_1(t)\xi_1^i(x) + ... + T_2(t)\xi_r^i(x) \tag{9}$$

так, что операторы

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1,2,...,\ r$$

образуют $r-$мерную алгебры Ли, при этом число m необходимых фундаментальных решений (8) удовлетворяет условию

$$nm \geq r.$$

Пример 1. Уравнение Риккати (1) имеет вид (9) и операторы

$$X_1=\frac{d}{dx},\quad X_2=x\frac{d}{dx},\quad X_3=x^2\frac{d}{dx}$$

образуют алгебру Ли. Например,

$$[X_2,\ X_3]=\left[X_2(x^2)-X_2(x)\right]\frac{d}{dx}=\left[2x^2-x^2\right]\frac{d}{dx}=x^2\frac{d}{dx}=X_3$$

и т.д., при этом $n=1,\ r=3\ и\ m\geq r=3$, т.е. для выражения общего решения уравнения Риккати требуется не менее трёх частных решений. Можно доказать, что достаточно иметь трёх частных решений, так как любые четыре решения связаны условием анти гармонического отношения [1, стр. 36].

Теорема 2. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x),$$

обладающее фундаментальной системой решений, линеаризуется преобразованием зависимой переменной x в том и только в том случае, когда оно может быть записано в виде

$$\frac{dx}{dt}=T_1(t)\xi_1(x)+T_2(t)\xi_2(x) \tag{10}$$

так, что операторы

$$X_1=\xi_1(x)\frac{d}{dx},\quad X_2=\xi_2(x)\frac{d}{dx} \tag{11}$$

образуют алгебру Ли размерности $r=2$ или $r=1$, т.е.

$$[X_1,\ X_2]=\alpha X_1+\beta X_2 \tag{12}$$

или $X_2=\gamma X_1$ с постоянными коэффициентами $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [1], (теорема 4.2., с. 37). Так как её мы будем использовать в дальнейшем, то для полноты изложения мы приведём доказательство этой теоремы в несколько изменённом виде.

Если $r=1$, то $\xi_2(x)=\gamma\xi_1(x)$, так что в этом случае уравнение (10) является уравнением с разделяющимися переменными. Если $r=2$, то для доказательство теоремы достаточно доказать, что всякая двумерная алгебра Ли L_2 на прямой приводится заменой x к алгебре с базисом

$$X=\frac{d}{dy},\qquad Y=y\frac{d}{dy}.$$

Пусть один из операторов (11) приведён к виду $X=\frac{d}{dy}$, что всегда возможно ([1], теорема 1, с. 10) и $Y=f(y)\frac{d}{dy}$ - другой оператор из L_2 линейно независимый с X. Для них $[X,Y]=[X(f(y))-Y(1)]\frac{d}{dy}=f'(y)\frac{d}{dy}$. Тогда условие (12) имеет вид

$$\frac{df}{dy}=\alpha+\beta f \tag{13}$$

(хотя бы одно из постоянных $\alpha,\ \beta$ отлично нуля). Из последнего уравнение имеем

а) $f(y)=\alpha y+c,\qquad Y=\alpha y\frac{d}{dy}+cX$, если $\beta=0$

б) если $\beta\neq 0$, то уравнение (13) линейное и при этом

$$f(y)=c^{\beta y}-\frac{\alpha}{\beta},\quad Y=ce^{\beta y}\frac{d}{dy}-\frac{\alpha}{\beta}X.$$

В случае а) в качестве базисных операторов можно взять операторы

$$X=\frac{d}{dy},\quad Y=y\frac{d}{dy},$$

а в случае б) базисные операторы

$$X_1 = \frac{d}{dy}, \quad X_2 = e^y \frac{d}{dy}. \tag{14}$$

Сделав замену $\bar{y} = e^{-y}$, приводим операторы (14) к виду

$$\bar{X} = \frac{d}{d\bar{y}}, \quad \bar{Y} = \bar{y}\frac{d}{d\bar{y}}.$$

Теорема доказана.

Применим теорему 2 к исследованию уравнения Риккати.

Теорема. Если уравнение Риккати

$$\frac{dx}{dt} = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2 \tag{15}$$

обладает одним из следующих четырёх свойств, то оно обладает и тремя другими:

1) уравнение (15) линеаризуется заменой переменной x;

2) уравнение (15) может быть записано в двухчленном виде

$$\frac{dx}{dt} = T_1(t)\xi_1(x) + T_2(t)\xi_2(x)$$

так, что операторы $X_1 = \xi_1(x)\frac{d}{dx}, \quad X_2 = \xi_2(x)\frac{d}{dx}$ порождают двухмерную алгебру Ли, т.е.

$$[X_1, \ X_2] = \alpha X_1 + \beta X_2$$

(если $[X_1, \ X_2] = 0$, то алгебра одномерна, и в уравнение (15) переменные разделяются).

3) уравнение (15) либо имеет вид $\frac{dx}{dt} = Q(t)x + R(t)x^2$, либо

$$\frac{dx}{dt} = P(t) + Q(t)x + k[Q(t) - kP(t)]x^2 \tag{16}$$

с некоторым комплексным коэффициентом k

4) уравнение (15) допускает постоянное решение.

Доказательство этой теоремы не приводится и профессор Н.Х. Ибрагимов ставит его как задачу ([1], (теорема 4.3., с. 38-39)).

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) вытекает из теоремы 2.

а) Докажем, эквивалентность утверждений 1) и 3).

а$_1$) Пусть уравнение (15) линеаризуется, тогда выполняется условие 2), т.е.

$$\frac{dx}{dt} = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2 = T_1(t)\xi_1(x) + T_2(t)\xi_2(x),$$

так что операторы $X_1 = \xi_1(x)\frac{d}{dx}, \ X_2 = \xi_2(x)\frac{d}{dx}$ образуют алгебру Ли. Последнее означает, что для этих операторов выполняется равенство $[X_1, \ X_2] = \alpha X_1 + \beta X_2$ (хотя бы одно из чисел α и β отлично от нуля). Пусть $R(t) = kQ(t) + k_1 P(t)$, тогда

$$\frac{dx}{dt} = (1 + k_1x^2)P(t) + Q(t)(x + kx^2) = T_1(t)\xi_1(x) + T_2(t)\xi_2(x),$$

где $\xi_1(x) = 1 + k_1x^2, \quad \xi_2(x) = x + kx^2.$

Вычислим коммутатор

$$[X_1, \ X_2] = [X_1(\xi_2) - X_1(\xi_1)]\frac{d}{dx} = [(1 + k_1x^2)(1 + 2kx) - (x + kx^2)(2k_1x)]\frac{d}{dx} =$$

$$= X_1 + [(2kk_1x^3 + 2kx - 2k_1x^2 - 2k_1kx^3]\frac{d}{dx} = X_1 + 2k\left(x - \frac{k_1}{k}x^2\right)\frac{d}{dx}.$$

Если $\frac{k_1}{k}=-k$, то мы получим $2k(x+kx^2)\frac{d}{dx}=2kX_2$. Таким образом, $\xi_1(x)=1-k^2x^2, \quad \xi_2(x)=x+kx^2$, т.е. базисные операторы

$$X_1=(1-k^2x^2)\frac{d}{dx} \text{ и } X_2=(x+kx^2)\frac{d}{dx} \tag{17}$$

образуют алгебру Ли, и $[X_1, \quad X_2]=X_1+2kX_2$. Таким образом, уравнение приведено к виду (16), то есть

$$\frac{dx}{dt}=P(t)+Q(t)x+R(t)x^2=P(t)+Q(t)x+\left[kQ(t)-k^2P(t)\right]x^2=$$

$$=P(t)+Q(t)x+k\left[Q(t)-kP(t)\right]x^2.$$

a$_2$) Обратно, если уравнение Риккати имеет вид (16), то оно может быть приведено к виду

$$\frac{dx}{dt}=\left[P(t)-k^2x^2P(t)\right]+\left[xQ(t)+kQ(t)x^2\right]=$$

$$=(1-k^2x^2)P(t)+(x+kx^2)Q(t)=T_1(t)\xi_1(x)+T_2(t)\xi_2(x)$$

и операторы (17) образуют алгебру Ли. Тогда согласно теоремы 2 уравнение Риккати линеаризуется.

б) Докажем эквивалентность утверждений 1) и 4).

б$_1$) Пусть уравнение (15) линеаризуется. Тогда его можно записать в виде (16) и постоянное число $x=-\frac{1}{k}$ является решением уравнения (16).

б$_2$) Пусть теперь постоянное число $x=const=c$ является решением уравнения Риккати и в этом случае выполняется равенство $P(t)+Q(t)c+R(t)c^2=0$, тогда

$$R(t)=-\frac{1}{c^2}P(t)-\frac{1}{c}Q(t) \text{ и при } k=-\frac{1}{c}, \quad R(t)=kQ(t)-k^2P(t),$$

то есть уравнение Риккати имеет вид (16) и поэтому линеаризуется.

Используя доказанные выше результатыв можно получить доказательства эквивалентности других утверждений.

Пример 2. Применим теорему к конкретному уравнению

$$\frac{dx}{dt}=P(t)+Q(t)x+2\left[Q(t)-2P(t)\right]x^2.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt}=(1-4x^2)P(t)+(x+2x^2)Q(t),$$

т.е. уравнение имеет вид (10) и $X_1=\xi_1(x)\frac{d}{dx}=(1-4x^2)\frac{d}{dx}, \quad X_2=(x+2x^2)\frac{d}{dx}.$

Операторы X_1 и X_2 образуют двухмерную алгебру Ли. Действительно,

$$[X_1, \quad X_2]=(X_1(\xi_2)-X_2(\xi_1))\frac{d}{dx}=\left[(1-4x^2)(1+4x)-(x+2x^2)(-8x)\right]\frac{d}{dx}=$$

$$=(1-4x^2)\frac{d}{dx}+(4x-16x^3+8x^2+16x^3)\frac{d}{dx}=X_1+(4x+8x^2)\frac{d}{dx}=X_1+4X_2,$$

тогда

$$[X_1, \ X_2]=(1-4x^2+4x+8x^2)\frac{d}{dx}=(1+4x+4x^2)\frac{d}{dx}=(1+2x)^2\frac{d}{dx}=X.$$

Найдем замену $y=y(x)$, приводящая оператор X к виду $X=\frac{d}{dy}$.

Для этого решим уравнение $(1+2x^2)\frac{dy}{dx}=1,$ и находим

$$y=\int\frac{dx}{(1+2x)^2}=-\frac{1}{2(1+2x)}=-\frac{1}{2+4x}.$$

Такая замена переводит алгебру операторов

$$X_1=(1+2x)^2\frac{d}{dx},\qquad X_2=Y=(x+2x^2)\frac{d}{dx}$$

в операторы

$$\overline{X}=X(y)\frac{d}{dy}=\left[(1+2x)^2\frac{dy}{dx}\right]\frac{d}{dy}=\left[(1+2x)^2\frac{1}{(1+2x)^2}\right]\frac{d}{dy}=\frac{d}{dy}$$

и

$$\overline{Y}=Y(y)\frac{d}{dy}=\left[x(1+2x)\frac{dy}{dx}\right]\frac{d}{dy}=\left[x(1+2x)\frac{1}{(1+2x)^2}\right]\frac{d}{dy}=\frac{x}{1+2x}\frac{d}{dy},$$

но

$$(2+4x)y=-1\Rightarrow 2y+4xy=-1\Rightarrow 4xy=-1-2y\Rightarrow x=-\frac{1+2y}{4y}.$$

Тогда

$$\overline{Y}=\frac{-\frac{1+2y}{4y}}{-\frac{1}{2y}}\frac{d}{dy}=\frac{1+2y}{2}\frac{d}{dy}=\left(\frac{1}{2}+y\right)\frac{d}{dy}=\frac{1}{2}\overline{X}+Y\frac{d}{dy},$$

и заданное уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4y}\right)=P(t)+Q(t)\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{4y}\right]+2[Q(t)-2P(t)]\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4y}\right)^2=$$

$$=P(t)-Q(t)\frac{1}{2}-Q(t)\frac{1}{4y}+Q(t)\frac{1}{2}+Q(t)\frac{1}{2y}+\frac{1}{8y^2}Q(t)-P(t)-\frac{1}{y}P(t)-\frac{1}{4y^2}P(t)\quad \textit{или}$$

$$\frac{1}{4y^2}\frac{dy}{dt}=Q(t)\frac{1}{4y}+\frac{1}{8y^2}Q(t)-\frac{1}{y}P(t)-\frac{1}{4y^2}P(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dt}=Q(t)y+\frac{1}{2}Q(t)-4yP(t)-P(t)\Rightarrow\frac{dy}{dt}=[Q(t)-4P(t)]y+\left[\frac{1}{2}Q(t)-P(t)\right],$$

в итоге мы получаем линейное уравнение.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н.Х.Ибрагимов. Азбука группового анализа. – М.: Знание, 1989, 44с.
2. Н.Х.Ибрагимов. Опыт группового анализа дифференциальных уравнений. – М.: Знание, 1991, 47с.

REFERENCES

1. Ibragimov N.Kh. ABC of group analysis – M.: Knowledge, 1989, 44p.
2. Ibragimov N. Kh. The experience of group analysis, ordinary differential equations – M.: Knowledge, 1991, 47p.