С 72
УДК – 517. 2
ББК 22. 161. 1

ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА J_1^a: СЛУЧАЙ $a(y, y) < 0$

Солеҳов Одинашоҳ *- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ХГУ имени академика Бободжона Гафурова (Республика Таджикистан, Худжанд)*
Миршоев Абдушафи Абдулмуминович *– старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии ХГУ имени академика Бободжона Гафурова (Республика Таджикистан, Худжанд), e-mail: a.shafi86@mail.ru*

ОМӮЗИШИ БАЪЗЕ ХОСИЯТҲОИ ОПЕРАТОРИ ИНТЕГРАЛИИ ҲАЛЛИ МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАРТИБИ ЯКӮМ J_1^a: ҲОЛАТИ $a(y, y) < 0$

Солеҳов Одинашоҳ *- номзади илмҳои физика – математика, дотсенти кафедраи алгебра ва геометрияи ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд)*
Миршоев Абдушафи Абдулмуминович *– сармуаллими кафедраи алгебра ва геометрияи ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: a.shafi86@mail.ru*

THE STUDY OF SOME PROPERTIES OF THE SOLUTION OF THE INTEGRAL OPERATOR OF A DIFFERENTIAL ORDER EQUATION J_1^a: CASE A $a(y, y) < 0$

Solehov Odinashoh *– Candidate of Physics and Mathematics Sciences, under Khujand State University named after academician B.G. Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand);*
Mirshoev Abdushafi Abdulmuminovich *– Senior Teacher under Khujand State University named after academician B.G. Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e-mail: a.shafi86@mail.ru*

Ключевые слова: *интегральный оператор, линейность, непрерывность, равностепенная непрерывность, ограниченность.*

В статье рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка в области $\Pi = \{(x, y): 0 \le x, y \le 1\}$*, с одной внутренней сингулярной линией, представимое в виде интегрального оператора и изучаются некоторые его свойства.*

Вожаҳои калидӣ: *оператори интегралӣ, хаттӣ бефосилагӣ, баробардарача, бефосила, маҳдудият.*

Дар мақола як муодилаи дифференсиалии тартиби якум, дар соҳаи $\Pi = \{(x, y): 0 \le x, y \le 1\}$ *бо як хати сингулярии дохилӣ дида баромада мешавад, ки ҳалли он дар намуди оператори интегралӣ ифода шуда, баъзе хосиятҳои он омӯхта мешаванд.*

Key words: *integral operator, linearity, continuity, equitable continuity, limitation.*

This article discusses differential equations of the nerve order in the region $\Pi = \{(x, y): 0 \le x, y \le 1\}$ *, with one internal singular line, representable as an integral operator and studies some of its properties.*

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка [5]: случай $a(y, y) < 0$, $y \in [0,1]$

(1) $$(x - y)\frac{\partial v}{\partial x} + a(x, y)v = f(x, y), \; 0 \le x, y \le 1, x \ne y,$$

где $a(x, y)$, $f(x, y) \in C(\Pi)$, $\Pi = \{(x, y): 0 \le x, y \le 1\}$,
решение которое в области $C(\Pi)$ в виде интегрального оператора.

Воспользуясь теоремой 2.1 [5. Стр. 48] в случае $a(y,y)<0$, $y\in[0,1]$ оператор определим следующей формулой

$$(2)\qquad (J_1^a f)(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(0,0)}{a(0,0)}\psi(x,0,y)+\int\limits_0^x \psi(x,t,y)\dfrac{f(t,y)dt}{t-y}, & 0\le x<y\le 1,\\ \dfrac{f(y,y)}{a(y,y)}, & 0\le x<y\le 1,\\ \dfrac{f(1,1)}{a(1,1)}\psi(x,1,y)+\int\limits_x^1 \psi(x,t,y)\dfrac{f(t,y)dt}{t-y}, & 0\le y=x\le 1\end{cases}$$

В силу теоремы 2.1 оператор J_1^a сопоставляет каждой функции $f\in C(\Pi)$ непрерывное решение уравнения (1.1). Причём, для любых непрерывных функций $c_0(y), c_1(y), y\in[0,1]$. функция

$$V(x,y)=\left(J_1^a f\right)(x,y)+\begin{cases}\left(c_0(y)-c_0(0)\right)\psi(x,0,y), & 0\le x<y\le 1,\\ 0, & 0\le x=y\le 1,\\ \left(c_1(y)-c_1(1)\right)\psi(x,1,y), & 0\le y<x\le 1.\end{cases}$$

также будет непрерывным решением уравнения (1).

Теорема 1. Оператор $J_1^a: C(\Pi)\to C(\Pi)$ линейный, непрерывный, и для спектрального радиуса оператора верно неравенство

$$\rho(J_1^a)\ge\frac{1}{b_0},\ \ b_0=\min\{|a(y,y)|: 0\le y\le 1\},$$

а если

$$a_0=\min\{|a(x,y)|: 0\le x,y\le 1\},\ \text{то}$$

$$\left\|J_1^a\right\|_*\le\frac{1}{a_0}$$

Доказательство. Линейность оператора J_1^a очевидна. Покажем, что оператор ограничен. Тогда в силу линейности оператора, отсюда будет следовать его непрерывность.

Пусть $f(x,y)$ произвольная функция из $C(\Pi)$. При $0\le x<y\le 1$ имеем

$$\left|(J_1^a f)(x,y)\right|\le\left|\frac{f(0,0)}{a(0,0)}\right|\psi(x,0,y)+\int\limits_0^x\psi(x,t,y)\frac{|f(t,y)|}{y-t}dt\le$$

$$\le\frac{\|f\|}{b_0}\psi(x,0,y)+\|f\|\int\limits_0^x\psi(x,t,y)\frac{dt}{y-t}\le\frac{\|f\|}{b_0}m_1+\|f\|m_2$$

где $b_0=\min\limits_{0\le y\le 1}|a(y,y)|,\ m_1=\max\limits_{\substack{0\le x,y\le 1\\ x<y}}\psi(x,0,y),\ m_2=\max\limits_{\substack{0\le x,y\le 1\\ x<y}}\int\limits_0^x\psi(x,t,y)\dfrac{dt}{y-t}.$

При $0\le x=y\le 1$ имеем

$$\left|(J_1^a f)(x,y)\right|=\frac{|f(y,y)|}{a(y,y)}\le\frac{\|f\|}{b_0}.$$

А при $0\le x<y\le 1$ имеем

$$\left|(J_1^a f)(x,y)\right|\le\frac{|f(1,1)|}{|a(1,1)|}+\psi(x,1,y)+\int\limits_0^x\psi(x,t,y)\frac{|f(t,y)|}{y-t}dt\le$$

$$\le\frac{\|f\|}{b_0}m_3+\|f\|m_4=\left(\frac{m_3}{b_0}+m_4\right)\|f\|.$$

$$\left\|J_1^a f\right\|\le k\|f\|,$$

где

$$k=\max\left(\frac{m_1}{b_0}+m_2,\frac{1}{b_0},\frac{m_3}{b_0}+m_4\right),$$

откуда следует ограниченность оператора J_1^a.

Справедливость неравенства

$$\rho(J_1^a)\ge\frac{1}{b_0},$$

проверяется как при доказательстве теоремы 3.1. [5.50]

Пуст $a_0>0$. Тогда при $0\le x\le y-\delta$

$$\left|(J_1^a f)(x,y)\right|\le\left|\frac{f(0,0)}{a(0,0)}\right|\psi(x,0,y)+\int_0^x\psi(x,t,y)\frac{f(t,y)}{t-y}dt\le$$

$$\le\left|\frac{f(0,0)}{a(0,0)}\right|e^{\int_0^x\frac{a(s,y)}{y-s}ds}+\int_0^x e^{\int_0^x\frac{a(s,y)}{y-s}ds}\cdot\frac{|f(t,y)|}{y-t}dt\le$$

$$\le\frac{\|f\|}{a_0}e^{-a\int_0^x\frac{ds}{y-s}ds}+\|f\|\int_0^x e^{-a\int_0^x\frac{ds}{y-s}ds}\cdot(y-t)^{-1}dt=\frac{\|f\|}{a_0}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{a_0}+\frac{\|f\|}{a_0}\left(1-\left(1-\frac{x}{y}\right)^{a_0}\right)=\frac{\|f\|}{a_0},$$

при $y+\delta\le x\le 1$

$$\left|(J_1^a f)(x,y)\right|\le\left|\frac{f(1,1)}{a(1,1)}\right|\psi(x,1,y)+\int_x^1\psi(x,t,y)\frac{f(t,y)}{t-y}dt\le$$

$$\le\left|\frac{\|f\|}{a_0}\right|e^{-a_0\int_x^1\frac{ds}{s-y}}+\|f\|\int_x^1 e^{-a_0\int_t^1\frac{ds}{s-y}}\cdot(t-1)^{-1}dt=\frac{\|f\|}{a_0}\left(\frac{x-y}{1-y}\right)^{a_0}+\frac{\|f\|}{a_0}\left(1-\left(\frac{x-y}{1-y}\right)^{a_0}\right)=\frac{\|f\|}{a_0}.$$

Следовательно,

$$\left|(J_1^a f)(x,y)\right|\le\frac{\|f\|}{a_0}\quad\text{при } |x-y|\ge\delta,$$

Откуда в силу произвольности δ получим

$$\left|(J_1^a f)(x,y)\right|\le\frac{1}{a_0}\cdot\|f\|,\ f\in C(\Pi),$$

$$\|J_1^a\|_*\le\frac{1}{a_0}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Оператор $J_1^a:C(\Pi)\to C(\Pi)$ обладает следующими свойствами:

1) всякую ограниченную и равностепенно непрерывную в окрестности диагонали последовательность функций отображает в ограниченную последовательность функций, которая равностепенно непрерывна по x;

2) всякую ограниченную последовательность функций, которая равностепенное непрерывна в окрестности диагонали и равностепенно непрерывна по y отображает в ограниченную и равностепенное непрерывную последовательность функций.

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(\Pi)$ ограничена

$$\|f_n\|\le M,\ n=1,2,...$$

равностепенно непрерывна в окрестности диагонали.

Для любого $\varepsilon>0$ выберем $\tau>0$ так, чтобы

$$\tau\left(m_1+\frac{m}{b_0}+m_2\right)+M\left(\frac{1}{b_0-\tau}-\frac{1}{b_0}\right)<\varepsilon,\quad b_0>\tau,$$

где

$$m_1 = \max_{\substack{0\le x,y\le 1\\ x<y}} \psi(x,0,y),\ m_2 = \max_{\substack{0\le x,y\le 1\\ x<y}} \int_0^x \psi(x,t,y)\frac{dt}{y-t},\ b_0 = \min_{0\le y\le 1}|a(y,y)|.$$

выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы при $|x-y| < \delta_0$

$$\left|\frac{f_n(x,x)}{a(x,x)} - \frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\right| < \varepsilon,$$

выберем $0 \le x < y < \delta_0$ выполнялись неравенства

$$\left|\frac{f_n(0,0)}{a(0,0)} - \frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\right| < \tau,\ n = 1,2,...$$

$$|a(x,y) - a(y,y)| < \tau,$$

$$\left|\psi(x,0,y) - \left(1-\frac{x}{y}\right)^{a(y,y)}\right| < \tau,\ |f_n(x,y) - f_n(y,y)| < \tau,\ n = 1,2,...$$

Тогда имеем

$$\left|(J_1^a f_n)(x,y) - (J_1^a f_n)(y,y)\right| = \left|\frac{f_n(0,0)}{a(0,0)}\psi(x,0,y) + \int_0^x \psi(x,t,y)\cdot\frac{f_n(t,y)}{t-y}dt - \frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\right| =$$

$$= \left|\frac{f_n(0,0)}{a(0,0)}\psi(x,0,y) + \int_0^x \psi(x,t,y)\cdot\frac{f_n(t,y)}{t-y}dt - \frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\right|\left(1-\frac{x}{y}\right)^{a(y,y)} - \int_0^x e^{\int_x^t \frac{a(y,y)}{s-y}ds}\frac{f_n(y,y)}{t-y}dt \le$$

$$\le \left|\frac{f_n(0,0)}{a(0,0)} - \frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\right| - \psi(x,0,y) + \left|\frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\left(\psi(x,0,y) - \left(1-\frac{x}{y}\right)^{a(y,y)}\right)\right| +$$

$$+ \left|\int_x^y e^{\int_x^t \frac{a(s,y)}{s-y}ds}\frac{f_n(t,y)}{t-y}dt - \int_0^x e^{\int_x^t \frac{a(y,y)}{s-y}ds}\cdot\frac{f_n(t,y)}{t-y}dt\right| <$$

$$< \tau m_1 + \frac{M}{b_0}\tau + \int_0^x \psi(x,t,y)\cdot\frac{|f_n(t,y) - f_n(y,y)|}{t-y}dt +$$

$$+ \int_0^x e^{\int_x^t \frac{a(y,y)}{s-y}ds}\left(e^{\left|\int_x^t \frac{a(s,y)-a(y,y)}{s-y}ds\right|} - 1\right)\cdot\frac{|f_n(y,y)|}{y-t}dt <$$

$$< \tau m_1 + \frac{M}{b_0}\tau + m_2\tau + M\int_0^x (y-t)^{-1} e^{a(y,y)\ln\left(\frac{y-t}{y-x}\right)}\left(e^{\tau\ln\left(\frac{y-t}{y-x}\right)} - 1\right)dt =$$

$$= \tau\left(m_1 + \frac{M}{b_0} + m_2\right) + M\int_0^x \left[\frac{(y-t)^{a(y,y)+\tau-1}}{(y-x)^{a(y,y)+\tau}} - \frac{(y-t)^{a(y,y)-1}}{(y-x)^{a(y,y)}}\right]dt =$$

$$= \tau\left(m_1 + \frac{M}{b_0} + m_2\right) + M\left[\frac{y^{a(y,y)+\tau} - (y-x)^{a(y,y)+\tau}}{(a(y,y)+\tau)(y-x)^{a(y,y)+\tau}} - \frac{y^{a(y,y)} - (y-t)^{a(y,y)}}{a(y,y)(y-x)^{a(y,y)}}\right]dt =$$

$$= \tau\left(m_1 + \frac{M}{b_0} + m_2\right) + M\left[\frac{1}{a(y,y)-\tau}\left(1-\left(1-\frac{x}{y}\right)^{|a(y,y)|-\tau}\right) - \frac{1}{a(y,y)}\left(1-\left(1-\frac{x}{y}\right)^{|a(y,y)|}\right)\right] =$$

$$= \tau\left(m_1 + \frac{M}{b_0} + m_2\right) + M\left(\frac{1}{a(y,y)-\tau} - \frac{1}{|a(y,y)|}\right)\left(1-\left(1-\frac{x}{y}\right)^{|a(y,y)|-\tau}\right) +$$

$$+ \frac{M}{|a(y,y)|}\left(\left(1-\frac{x}{y}\right)^{|a(y,y)|} - \left(1-\frac{x}{y}\right)^{|a(y,y)|-\tau}\right) \le \tau\left(m_1 + \frac{M}{b_0} + m_2\right) + M\left(\frac{1}{b_0-\tau} - \frac{1}{b_0}\right) < \varepsilon.$$

По числу δ_0 выберем δ_1 так, чтобы $\delta_1 < \delta_0$ и

$$a(x,y) \le -\frac{b_0}{2} \text{ при } y-\delta_1 \le x \le y,\ \psi(x,0,y) < \frac{\tau}{2},\ \left|1-\frac{x}{y}\right|^{a(y,y)} < \frac{\tau}{2},\ y-\delta_1 < x < y,\ y \ge \delta_0$$

А по числу δ_1 выберем $\delta \in (0,\delta_1)$ так, чтобы

$$\frac{2M}{\|a\|}\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{\frac{b_0}{2}} \cdot \delta_1^{-\|a\|} < \frac{m_1\tau}{2},\ \frac{M}{b_0}\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{b_0} < \frac{m_1\tau}{2}.$$

Тогда при $y-\delta < x < y,\ y \ge \delta_0$ имеем

$$\left|\left(J_1^a f_n\right)(x,y) - \left(J_1^a f_n\right)(y,y)\right| =$$

$$= \left|\frac{f_n(0,0)}{a(0,0)}\psi(x,0,y) + \int_0^x \psi(x,t,y)\cdot\frac{f_n(t,y)}{t-y}dt - \frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{a(y,y)} - \int_0^x e^{\int_x^t \frac{a(y,y)}{s-y}ds}\cdot\frac{f_n(t,y)}{t-y}dt\right| \le$$

$$\le \left|\frac{f_n(0,0)}{a(0,0)}\right|\psi(x,0,y) + \left|\frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\right|\left(1-\frac{x}{y}\right)^{a(y,y)} + \int_0^x \psi(x,t,y)\cdot\frac{f_n(t,y)}{t-y}dt +$$

$$+ \int_0^{y-\delta_1} e^{\int_t^x \frac{a(y,y)}{y-s}ds}\cdot\frac{|f_n(t,y)|}{y-t}dt + \int_{y-\delta_1}^{x}\left|\psi(x,t,y)\cdot\frac{f_n(t,y)}{t-y} - e^{\int_t^x \frac{a(y,y)}{y-s}ds}\cdot\frac{|f_n(t,y)|}{y-t}\right|dt.$$

Так как

$$\left|\frac{f_n(0,0)}{a(0,0)}\right|\psi(x,0,y) + \left|\frac{f_n(y,y)}{a(y,y)}\right|\left(1-\frac{x}{y}\right)^{a(y,y)} < \frac{M}{b_0}\cdot\frac{\tau}{2} + \frac{M}{b_0}\cdot\frac{\tau}{2} = \frac{\tau M}{b_0},$$

$$\int_0^{y-\delta_1}\psi(x,t,y)\cdot\frac{|f_n(t,y)|}{y-t}dt \le M\int_0^{y-\delta_1} e^{\int_t^x \frac{a(y,y)}{y-s}ds}\cdot\frac{dt}{y-t} =$$

$$= M\int_{y-\delta_1}^{x} e^{\int_t^{y-\delta_1}\frac{a(y,y)}{y-s}ds}\cdot e^{\int_{y-\delta_1}^{x}\frac{a(y,y)}{y-s}ds}\cdot\frac{dt}{y-t} \le M\int_0^{y-\delta_1} e^{\|a\|\int_t^{y-\delta_1}\frac{ds}{y-s}}\cdot e^{-\frac{b_0}{2}\int_{y-\delta_1}^{x}\frac{ds}{y-s}}\cdot\frac{dt}{y-t} =$$

$$= M\int_0^{y-\delta_1}\left(\frac{y-t}{\delta_1}\right)^{|a|}\cdot\left(\frac{y-x}{\delta_1}\right)^{\frac{b_0}{2}}\cdot\frac{dt}{y-t} < M\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{\frac{b_0}{2}}\cdot\delta_1^{-\|a\|}\cdot\int_0^{y-\delta_1}(y-t)^{\|a\|-1}dt =$$

$$= M\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{\frac{b_0}{2}}\cdot\delta_1^{-\|a\|}\frac{y^{\|a\|}-\delta_1^{\|a\|}}{\|a\|} \le M\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{\frac{b_0}{2}}\cdot\frac{\delta_1^{-\|a\|}}{\|a\|} < \frac{m_1\tau}{2},$$

$$\int_0^{y-\delta_1} e^{a(y,y)\int_t^x \frac{ds}{y-s}} \cdot \frac{|f_n(t,y)|}{y-t} dt \le M \int_0^{y-\delta_1} \frac{(y-t)^{a(y,y)-1}}{(y-x)^{a(y,y)}} dt =$$

$$= \frac{M}{a(y,y)} \cdot \frac{y^{a(y,y)} - \delta_1^{a(y,y)}}{(y-x)^{a(y,y)}} \le M\left(\left(\frac{y-x}{\delta_1}\right)^{|a(y,y)|} - \left(1-\frac{x}{y}\right)^{|a(y,y)|}\right) \cdot \frac{1}{b_0} < \frac{M}{b_0}\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{b_0} < \frac{m_1\tau}{2},$$

$$\int_{y-\delta_1}^{x} \left|\psi(x,y,t)\frac{f_n(t,y)}{t-y} - e^{\int_t^x \frac{a(y,y)}{y-s}ds} \frac{f_n(y,y)}{t-y}\right| dt \le \int_{y-\delta_1}^{x} \psi(x,y,t)\frac{|f_n(t,y)-f_n(y,y)|}{t-y}dt +$$

$$\int_{y-\delta_1}^{x} e^{\int_t^x \frac{a(y,y)}{y-s}ds}\left(e^{\int_t^x \frac{|a(s,y)-a(y,y)|}{y-s}ds} - 1\right) \cdot \frac{|f_n(t,y)|}{y-t} dt \le \tau m_2 + M\int_0^x (y-t)^{-1} \cdot e^{a(y,y)\ln\left(\frac{y-t}{y-x}\right)} \cdot \left(e^{\tau \ln\left(\frac{y-t}{y-x}\right)} - 1\right) dt <$$

$$< \tau m_2 + M\left(\frac{1}{b_0-\tau} - \frac{1}{b_0}\right).$$

Следовательно, при $y > \delta_0$, $y - \delta < x < y$

$$\left|\left(J_1^a f_n\right)(x,y) - \left(J_1^a f_n\right)(y,y)\right| \le \frac{\tau M}{b_0} + \frac{m_1\tau}{2} + m_2\tau + M\left(\frac{1}{b_0-\tau} - \frac{1}{b_0}\right) < \varepsilon,\ n = 1,2,...$$

Таким образом, мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $y - \delta < x < y \le 1$ выполняется неравенства

(3) $\left|\left(J_1^a f_n\right)(x,y) - \left(J_1^a f_n\right)(y,y)\right| < \varepsilon,\ n = 1,2,...$

а при $|x - y| < \delta$

$$\left|\left(J_1^a f_n\right)(x,y) - \left(J_1^a f_n\right)(x,y)\right| < \varepsilon,\ n = 1,2,...$$

аналогичным образом можно доказать существование положительного δ такого, что при $y < x < y + \delta$ будут выполняться неравенства (3). Итак, равностепенная непрерывность в окрестности диагонали последовательности $\left\{J_1^a f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ доказана.

Равностепенная непрерывность по x последовательности $\left\{J_1^a f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ доказывается как в теореме 3.2.[5. Стр. 57].

Пусть последовательность $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ также равностепенно непрерывна по y. Покажем, что последовательности $\left\{J_1^a f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ также равностепенно непрерывна по y. Тогда, отсюда будет следовать равностепенная непрерывность этой последовательности.

В силу равностепенной непрерывности в окрестности диагонали последовательности функции $\left\{J_1^a f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - y_1| < 2\delta, |x - y_2| < 2\delta,\ |y_1 - y_2| < \delta$ выполняется неравенства

$$\left|\left(J_1^a f_n\right)(x,y_1) - \left(J_1^a f_n\right)(x,y_2)\right| < \varepsilon,\ n = 1,2,...$$

Так как последовательность $\left\{J_1^a f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна по y в множестве

$$\Pi_\delta = \left\{(x,y) : |x-y| > \delta, (x,y) \in \Pi\right\},$$

то существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon,\delta) > 0,\ \delta_0 < \delta$ такое, что при $|x - y_1| \ge \delta, |x - y_2| \ge \delta,\ |y_1 - y_2| < \delta_0$ выполняются неравенства

$$\left|\left(J_1^a f_n\right)(x,y_1) - \left(J_1^a f_n\right)(x,y_2)\right| < \varepsilon,\ n = 1,2,...$$

Если $|y_1 - y_2| < \delta_0$ и $|x - x_2| < \delta$ (либо $|x - y_2| < \delta$), то

$$|x-y_2|<|x-y_1|+|y_1-y_2|<\delta+\delta_0<2\delta$$

и поэтому

(4) $$\left|\left(J_1^a f_n\right)(x,y_1)-\left(J_1^a f_n\right)(x,y_2)\right|<\varepsilon,\ n=1,2,...$$

Следовательно, при $(x,y_1),(x,y_2)\in \Pi,\ |y_1-y_2|<\delta_0$ выполняются неравенства (4), то есть последовательность $\left\{J_1^a f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна по y. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н.Р. Солехов О. Интегральные представления и граничные задачи для нелинейного уравнения гиперболического типа. ДАН. РТ, Т. 39, №9, 1996. С. 63-68.
2. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых гиперболических уравнения. ДАН. СССР, Т. 281, №3, 1987. С. 92-98.
3. Солехов О. Интегральные представления для одного уравнения гиперболического типа с сингулярными коэффициентами (Материалы научной конференции). Ленинабад, 1990. С. 102-104.
4. Солехов О. Интегральные представления для нелинейного гиперболического уравнения с одной внутренней сингулярной линией. (Материалы научной конференции). Курган - Тюбе, 1991. С. 77.
5. Солехов О. Существование непрерывных решений одного класса дифференциальных уравнений гиперболического типа с одной внутренней сингулярной линией. Кандидатская диссертация. ТГУ, Душанбе, 1997. 88С.

LITERATURE

1. Rajabov N.R., Solehov O. Integral representations and boundary value problems for non – hyperbolic equations. DAN. RT, T. 39, №9, 1996. P. 63-68.
2. Rajabov N.R. Integral representations and boundary and boundary value problems for some hyperbolic equations. DAN. SSSR. T. 281, №3. 1987. P. 92-98.
3. Solehov O. Integral representations for one hyperbolic type equation with singular coefficient. (Materials of a scientific conference, Leninabad, 1990). P. 102-104.
4. Solihov O. Integral representations of a nonlinear hyperbolic equation with one integral singular line (materials of a scientific conference, Kurgan – Tube, 1991). P. 77.
5. Solehov O. The existence of continuous of one class of differential equations of hyperbolic type with one inner singular line. Candidate dissertation TSU Dushanbe 1997. 88p.