УДК 517,837.2
ББК 22

НЕКОТОРЫЕ ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мухсинова Сабоат Маруфбоевна *- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики ХГУ имени академика Б.Гафурова, e-mail: -saboatmukhsinova@gmail.com*

БАЪЗЕ АЗ МАСЪАЛАҲОИ БОЗӢ ДАР ФАЗОИ ЕВКЛИДӢ

Мухсинова Сабоат Маруфбоевна *- номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи математикаи олӣ ва амалии ДДХ ба номи академик Б.Гафуров, e-mail:- -saboatmukhsinova@gmail.com*

SOME GAME PROBLEMS IN EUCLIDEAN SPACE

Mukhsinova Saboat Marufboevna *- Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics of the Khujand State University named after Academician Bobojon Gafurov, e-mail:- saboatmukhsinova@gmail.com*

Ключевые слова: *игровая задача, уравнение с запаздывающим аргументом,уравнение Багли-Торвика с производной дробного порядка, управления преследования, управления убегания.*

В работе исследуются некоторые игровые задачи, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, дифференциальным уравнением запаздывающего типа и уравнением Багли-Торвика с производной дробного порядка.

Вожаҳои калидӣ: *масъалаи бозӣ, муодила бо аргументи дермонӣ, муодилаи Багли- Торвик бо ҳосилаи тартиби касрӣ, идоракунии таъқибкунӣ, идоракунии гурезанда.*

Дар кор баъзе аз масъалаҳои бозӣ дар ҳоле, ки динамикаи бозӣ бо муодилаи дифференсиалии оддӣ, бо муодилаи дифференсиалии бо аргументи дермонӣ ва муодилаи Багли - Торвиг бо ҳосилаи тартиби касрӣ навишта мешавад, татқиқ карда мешавад.

Key words: *game problem, delay equation, Bagley-Torvik equation with fractional derivative, pursuit controls, evasion controls.*

The paper investigates some game problems when the game dynamics is described by an ordinary differential equation, a delayed differential equation, and the Bagley-Torvik equation with a fractional derivative.

Многие управлямые процессы из военной сферы, физики, химии, биологии и экономики протекающие в условиях конфликта или неопределености сводятся к дифференциальным играм. Пионерские работы по дифференциальным играм появились в начале 50-х годов XX века в работах американского математика Р. Айзекса [1].Используя методы динамического программирования Р.Айзекс исследовал некоторые игровые задачи и получил весьма интересные результаты.

В области теории дифференциальных игр фундаментальные результаты были получены советскими математиками Л.С. Понтрягиным [2] и Н.Н. Красовским [3]. В школе Н.Н. Красовского рассматриваются в основном позиционные дифференциальные игры. А в школе Л.С. Понтрягина принят другой подход к дифференциальным играм. В подходе Л.С. Понтрягина игра рассматривается отдельно с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего.Работы Л.С. Понтрягина посвящены конечномерным дифференциальным играм, когда игра описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением. В настоящее время результаты Л.С. Понтрягина перенесены на более широкие классы, когда игра описывается функционально-дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями дробного порядка ([4]-[9]). Целью данной работы является применение полученных результатов для решения некоторых игровых задач в евклидовом пространстве.

1.На плоскости R^2 рассматривается игровая задача, описываемая дифференциальным уравнением

$$\begin{cases}\ddot{x}=u\\ \dot{y}=\vartheta\end{cases}, \qquad (1)$$

где $u=u(t)$ -управления преследования, $\|u\|\le p,\ \vartheta=\vartheta(t)$- управления убегания, $\|\vartheta\|\le\sigma,\ x=x(t)\epsilon R^2,\ y=y(t)\epsilon R^2$.Игра заканчивается, если $\|x-y\|\le l$. Надо найти множество начальных точек (x_0,y_0) из которых заканчивается игра . Для решения этой задачи систему (1) запишем в виде

$$\begin{cases}\dot{z}_1=z_2+\vartheta\\ \dot{z}_2=-u\end{cases}$$

где $z_1=y-x,\ z_2=-\dot{x}$ или в виде

$$\dot{z}=Az-\bar{u}+\bar{\vartheta} \qquad (2)$$

где

$$A=\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix},\qquad z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix},\qquad \bar{u}=\begin{pmatrix}0\\u\end{pmatrix},\qquad \bar{\vartheta}=\begin{pmatrix}\vartheta\\0\end{pmatrix},$$

а терминальное множество, где заканчивается игра является множество $M=\left\{\ z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}:\|z_1\|\le l\right\}$.
Справедливы следующие результаты:

а)Если $\sigma^2\le 2pl$, то из всех начальных точек в (2) заканчивается игра за время $T=\min\left\{\tau\ge 0:\pi e^{\tau A}=(z_{01}+\tau\cdot z_{02},0)\ :\|z_{01}+\tau z_{02}\|\le\frac{p}{2}\tau^2-\sigma\tau+l\right\}$;

б) Если $\sigma^2>2pl$, то из любой точки множества

$$P=\bigcup_{\alpha\epsilon[0,l)}P_\alpha,\ \ P_\alpha=\left\{\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}:\|z_1\|>l,\qquad z_2=\frac{\alpha p-z_1}{T_\alpha},\qquad \|p\|=1\right\},$$

в (2) заканчивается игра за время T_α, где

$$T_\alpha\cdot p=\tau-\sqrt{\tau^2-2pl+2p\alpha}.$$

Данные результаты являются следствием теоремы работы ([5], с.272), ибо
$Y=\{u:\|u\|\le p\},\ Z\ =\{\vartheta:\|\vartheta\|\le\sigma\},\qquad \Phi(\tau-t)=e^{(\tau-t)A},e^{(\tau-t)A}(z_1,z_2)=(z_1+(\tau-t)z_2,z_2),\pi e^{tA}Y=\{(z_1,0):\|z_1\|\le tp\},\ \ \pi e^{tA}Z=\{(z_1,0):\|z_1\|\le\sigma\},\pi M=\{(z_1,0):\|z_1\|\le l\}$.
Следовательно,

$$W(\gamma(\cdot),\tau)=-\int_0^\tau\bigcap_{v\epsilon Z}\left[-\gamma(t)\pi M+\pi e^{(\tau-t)A}(Y-\vartheta)\right]dt=$$

$$=-\int_0^\tau\{(z_1,0):\|z_1\|\le l\gamma(t)+p(\tau-t)-\sigma\}dt=\{(z_1,0):\|z_1\|\le$$

$$\le\frac{p}{2}\tau^2-\sigma t+l\}\,.$$

Если $\sigma^2\le 2pl$, то шар $W(\gamma(\cdot),\tau)$ при всех $\tau\ge 0$ является непустым множеством. Поэтому, из всех точек заканчивается игра за время
$T=\min\{\tau\ge 0:\pi e^{\tau A}=(z_{01}+\tau\cdot z_{02},0)\ :\|z_{01}+\tau z_{02}\|\le\frac{p}{2}\tau^2-\sigma\tau+l\}$.

Если $\sigma^2>2pl$, то шар $W(\gamma(\cdot),\tau)=P=\cup_{\alpha\epsilon[0,l)}P_\alpha$ при всех $\tau\epsilon[0,\mu]$, где $\mu\cdot p=\sigma-\sqrt{\sigma^2-2pl}$ является непустым множеством. Поэтому, из любой точки множества P заканчивается игра за время T_α. Надо отметить, что множество P_α при $\alpha=0$ совпадает с множеством, которое впервые описал Н.Ю. Сатимов ([4],с.8).

2.Рассмотрим игровую задачу, описываемая дифференциальным уравнением Багли-Торвика с производной дробного порядка

$$ay''(t)+bD^{\frac{3}{2}}y(t)+cy(t)=\bar{u}(t)-\bar{\vartheta}(t), \qquad (3)$$

с начальными условиями $y(0)=y_0,\ y'(0)=y_0'$.

Предполагаем, что $y\epsilon C^2[0,T]$ для некоторого $T>0,\ a>0,\ b>0,\ |\bar{u}|\le p,\left|\bar{\vartheta}\right|\le\sigma,\ p>\sigma>0$, а терминальным множеством является множество $M_0=\{0\}$. Как отмечается в работе ([6], с.263) уравнение Багли-Торвик описывает колебания твердой пластины, погруженной в ньютоновскую жидкость.

Полагая $z_1(t)=y(t),\ z_2(t)=D^{\frac{1}{2}}y(t),\ \ z_3(t)=y'(t),\ \ z_4(t)=D^{3/2}y(t)$ игру (3) запишем в виде

$$\begin{cases} D^{1/2}z_1 = z_2 \\ D^{1/2}z_2 = z_3 \\ D^{1/2}z_3 = z_4 \\ D^{1/2}z_4 = \frac{1}{a}(-cz_1 - bz_4 + \bar{u} - \bar{\vartheta}) \end{cases}$$

или в виде

$$D^{1/2}z = Az + B(\bar{u} - \bar{\vartheta}), \qquad (4)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 0 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

с начальными условиями

$$z(0) = z^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если $u = B\bar{u},\ v = B\bar{v}$, то $|u| \le \frac{p}{a},\ \ |v| \le \frac{\sigma}{a}$ и игра (4) примет вид

$$D^{1/2}z = Az + u - v \qquad (5)$$

с терминальным множеством $M=\{z: z_1 = 0\}$.

В силу того, что $\alpha = 0.5,\ m = 1, n = 0$ обобщенная функция Миттаг-Леффлера принимает вид:

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{\alpha}; n+1) = E_2(At^{0.5}; 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^{0.5})^k}{\Gamma(0.5k+1)},$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\xi)^{\alpha};\ \alpha) = E_2(A(t-\xi)^{0.5}; 0.5) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A(t-\xi)^{0.5})^k}{\Gamma(0.5k+0.5)}.$$

Поэтому, в силу теоремы работы ([9],с.121) получаем следующий результат:

Если имеет место включение

$$E_2(AT^{0,5}; 1)z(0) \epsilon M - \int_0^T (T-\xi)^{0.5} E_2(A(T-\xi)^{0.5}; 0.5) S_{\frac{p-\sigma}{a}} d\xi,$$

$$S_{\frac{p-\sigma}{a}} = \left\{z: \|z\| \le \frac{p-\sigma}{a}\right\}, \qquad (6)$$

то в игре (5) из начальной точки z^0 возможно завершение преследования за время $T_0 = \min\{T$: для которых имеет место включение (6)$\}$.

3.Рассмотрим изменения запаса капитала $K(t)$ в условиях конкуренции или неопределенности, описываемая дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом

$$\dot{K}(t) = aK(t) - bK(t-1) - u(t) + v(t), \qquad (7)$$

где $0 < a < 1,\ b > 0,\ u = u(t) -$ управления запасом капитала, а $v = v(t) -$ внешний фактор. Рассмотрим следующую игровую задачу: независимо от внешнего фактора $v = v(t),\ |v(t)| \le \beta$ с помощью управления $u = u(t), |u(t)| \le \alpha$ запасом капитала надо управлять таким образом, что за некоторое конечное время T достичь желаемого результата $m \le K(T) \le m + m_0$. Поэтому, терминальным множеством игры является множество $M = [m, m + m_0],\ m > 0,\ m_0 > 0$.

Рассмотрим случай, когда $b = e^{a-1}$. В этом случае, однородная задача

$$\dot{K}(t) = aK(t) - e^{a-1}K(t-1), \qquad K(s) = K_0, \qquad -1 \le s \le 0,$$

имеет решение $K(t) = K_0 e^{(a-1)t}$.

Следовательно, неоднородная задача (7) с начальным условием $\mathrm{K(s) = K_0},\ -1 \le \mathrm{t} \le 0$, имеет решение

$$K(t) = e^{(a-1)t} K_0 \left[1 + \frac{b}{a-1}(e^{1-a} - 1)\right] + \int_0^t e^{(a-1)(t-s)} \big(-u(s) + v(s)\big) ds.$$

Справедливо следующее утверждение:

Если при некотором $T = T(K_0)$ имеет место включение

$$e^{(a-1)T}K_0\left[1+\frac{b}{a-1}(e^{1-a}-1)\right] \in M + \int_0^T e^{(1-a)(T-s)}S_{\alpha-\beta}ds, \qquad (8)$$

где то в игре (7) за время $T = T(K_0)$ можно достичь желаемого результата, т.е $K(T) \in [m, m+m_0]$.

Действительно, при $\alpha > \beta$ множество $S_{\alpha-\beta}$ непусто и в силу ([7],с.82) из включения (8) следует существования $m_1 \in M$ и интегрируемого селектора φ отображении $s \to e^{(1-a)(T-s)}S_{\alpha-\beta}$, что

$$e^{(a-1)T}K_0\left[1+\frac{b}{a-1}(e^{1-a}-1)\right] = m_1 + \int_0^T \varphi(s)ds$$

Если $v = v(t)$ –произвольное измеримое управления внешнего фактора, то существует такое управление запасом капитала $u = u(t)$, что

$$\varphi(s) = e^{(T-s)(a-1)}\big(u(s)-v(s)\big). \qquad (9)$$

Следовательно, имеем :

$$K(T) = e^{(a-1)T}K_0\left[1+\frac{b}{a-1}(e^{1-a}-1)\right] + \int_0^T e^{(a-1)(T-s)}\big(-u(s)+v(s)\big)ds = m_1 +$$

$$+\int_0^T \varphi(s)ds + \int_0^T e^{(a-1)(T-s)}\big(-u(s)+v(s)\big)ds =$$

$$= m_1 + \int_0^T e^{(T-s)(a-1)}\big(u(s)-v(s)\big)ds + \int_0^T e^{(T-s)(a-1)}\big(-u(s)+v(s)\big)ds =$$

$$= m_1 + \int_0^T e^{(T-s)(a-1)}\big(u(s)-v(s)\big)ds - \int_0^T e^{(T-s)(a-1)}\big(u(s)-v(s)\big)ds =$$

$$= m_1 \in M = [m, m+m_0], \text{т.е.} \ K(T) \in [m, m+m_0].$$

Следовательно, управление $u = u(t)$ выбирая согласно (9) мы достигаем желаемого результата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры.М.: Мир. 1967. 480с.
2. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования.// Математический сборник. 1980, т.112(154), №3(7), с.307-331.
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. Наука. Москва,1970, 420с.
4. Сатимов Н.Ю. К полному исследованию задачи об «изохронных ракетах». ДАН Узб.ССР. 1980, №9, с.6-8.
5. Мухсинов Е.М. О задаче преследования в банаховом пространстве // ДАН Тадж. ССР. 1983, т.26, №5, с.270-274.
6. Чикрий А.А., Матичин И.И. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // Труды Института математики и механики УрО РАН. т. 17, №2, 2011, с.256-270.
7. Мухсинов Е.М., Муродова М.Н. Задача преследования для дифференциальной игры с запаздывающим аргументом в бесконечномерном пространстве // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2018, №3, с.79-86.
8. Мухсинов Е.М. Разрешимость одной дифференциальной игры преследования нейтрального типа // Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Издательство: Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова. 2021, №1 (56), с. 16– 21.
9. Мухсинов Е.М. О разрешимости задачи преследования для дифференциальной игры дробного порядка в банаховом пространстве //Материалы республиканской конференции «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества». Худжанд. 2021, с. 120-122.

REFERENCES

1. Isaacs R. Differential games. M.: Mir. 1967. 480p.
2. L. S. Pontryagin, Linear differential games of pursuit.// Mathematical collection. 1980, v. 112(154), No. 3(7), pp. 307-331.
3. Krasovsky N.N. Game tasks about the meeting of movements. The science. Moscow, 1970, 420p.
4. Satimov N.Yu. Toward a complete study of the problem of "isochronous rockets". DAN Uzbek SSR. 1980, No. 9, pp.6-8.
5. Mukhsinov E.M. On the pursuit problem in a Banach space // Dokl. SSR. 1983, v. 26, No. 5, pp. 270-274.
6. Chikriy A.A., Matichin I.I. On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. v. 17, No. 2, 2011, pp. 256-270.
7. Mukhsinov E.M., Murodova M.N. The Pursuit Problem for a Differential Game with a Delay Argument in an Infinite-Dimensional Space // Bulletin of the Tajik National University. Natural Sciences Series. 2018, No. 3, pp. 79-86.
8. Mukhsinov E.M. Solvability of one differential pursuit game of neutral type // Uchenye zapiski. Series: natural and economic sciences. Publisher: Khujand State University named after academician B. Gafurov. 2021, No. 1 (56), pp. 16–21.
9. Mukhsinov E.M. On the solvability of the pursuit problem for a differential game of fractional order in a Banach space // Proceedings of the republican conference "Modern problems of applied mathematics and their role in shaping the technical worldview of society." Khujand. 2021, pp. 120-122.