1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
1.1.2.Муодилаҳои дифференсиалӣ ва физикаи математикӣ
1.1.2.Differential equations and mathematical physics

ТДУ 517.926
ББУ 22.161.6

ОИД БА БЕФОСИЛА ВОБАСТАГИИ ҲАЛЛИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ АЗ ШАРТҲОИ АВВАЛА ВА КОЭФФИТСИЕНТҲО

Зиёмидинов Баҳодур Мирзомидинович *- номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон, e-mail: ziemidinov67@mail.ru*

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И КОЭФФИЦИЕНТОВ

Зиёмидинов Баходур Мирзомидинович *- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики, e-mail: ziemidinov67@mail.ru.*

ON THE CONTINUOUS DEPENDENCE OF DECISIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON INITIAL DATA AND COEFFICIENTS

Ziyomidinov Bahodur Mirzomidinovich *- Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Sciences, Tajik State University of Law, Business and Politics, e-mail: ziemidinov67@mail.ru.*

Вожаҳои калидӣ: *муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ, масъалаи Коши, нобаробарии интегралӣ, наздикшавандагии интегралӣ, мунтазам наздикшавандагии интегралӣ.*

Дар мақола масъала оид ба бефосила вобастагии ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалӣ аз шартҳои аввала ва коэффитсиентҳо, ки дар фазои функсияҳои суммиронидашаванда дода шудаанд, омӯхта шудааст. Теоремаи мувофиқ ва инчунин леммаи ёрирасон, ки нобаробарии Гронуолл-Беллманро умумӣ менамояд, исбот карда шудааст.

Ключевые слова: *линейные дифференциальные уравнения, задача Коши, интегральные неравенства, интегральная сходимость, равномерно интегральная сходимость.*

В статье изучается задача о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных и коэффициентов, заданных в пространстве суммируемых функций. Доказана соответствующая теорема, а также вспомогательная лемма, обобщающая неравенство Гронуолла-Беллмана.

Key words: *linear differential equations, Cauchy problem, integral inequalities, integral convergence, uniformly integral convergence.*

The article studies the problem of the continuous dependence of the solutions of differential equations on the initial data and coefficients given in the space of integrable functions. The corresponding theorem is proved, as well as an auxiliary lemma generalizing the Gronwall-Bellman inequality.

Системаи муодилаҳои хаттии

$$x' = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

-ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $A(t)$ матриса-функсия, $f(t)$ вектор-функсия мебошанд ва дар фосилаи (a,b) муайян карда шудааст. Агар $A(t)$ и $f(t)$ дар фосилаи (a,b) бефосила бошанд, онгоҳ ҳалли $x(t)$ – и системаи (1) , ки шарти аввалаи $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in (a,b)$ -ро қаноат мекунонад, дар тамоми фосилаи (a,b) мавҷуд буда, ягона аст ва аз шартҳои аввала, коэффитсиентҳои муодилаҳо, тарафи рости системаи (1) бефосила вобаста аст (ниг., масалан ба [1]).

Дар мақолаи мазкур барои ҳолате, ки элементҳои матрисаи $A(t)$ ва вектор-функсияи $f(t)$ аз фазои $L_{1,loc}(a,b)$ аст, чунин натиҷаҳо ба даст оварда шудаанд.

Дар ин ҳолат ҳалли системаи намуди (1), ки шарти аввалаи $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in (a,b)$ -ро қаноат мекунонад, ҳамчун ҳалли бефосилаи муодилаи интегралии

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + f(s)]ds, \tag{2}$$

муайян карда мешавад, ки интеграли намуди (2) интеграли Лебег аст. Аз теоремаи Лебег натиҷа мебарояд, ки агар ҳалли бефосилаи муодилаи (2) мавҷуд бошад, он гоҳ вай мутлақ бефосила аст ва системаи муодилаи намуди (1)-ро қариб дар ҳама ҷо қаноат мекунонад [2].

Пайдарпаии масъалаҳои Коши

$$x' = A_k(t)x + f_k(t), \quad x(t_0) = \xi_k, \quad k = 1,2,\dots\ , \quad t \in (a,b)\,, \tag{3}$$

-ро дида мебароем, ки дар ин ҷо элементҳои матрисаи $A_k(t)$ ва вектор-функсияи $f_k(t)$ аз фазои $L_{1,loc}(a,b)$ мебошанд.

Баъзе таърифҳои маъмулро меорем, ки барои исботи теоремаи асосӣ лозим мешаванд [3].

Таърифи 1. *Мегӯянд, ки пайдарпаии вектор-функсияҳои* $\{f_k(t)\}$, *k=1, 2, … интегралӣ ба функсияи* $f(t)$ *дар фосилаи* (a,b) *наздик мешавад, агар барои ягон* $t_0 \in (a,b)$ *ва дилхоҳ* $t \in (a,b)$ *баробарии зерин ҷой дошта бошад:*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} (f_k(s) - f(s)\,)ds = 0. \tag{4}$$

Таърифи 2. *Мегӯянд, ки пайдарпаии вектор-функсияҳои* $\{f_k(t)\}$, *k=1, 2, … мунтазам интегралӣ ба функсияи* $f(t)$ *дар ҳар як порчаҳои фосилаи* (a,b) *наздик мешавад, агар муодилаи ҳудудии (4) дар ҳар як порчаҳои фосилаи* (a,b) *мунтазам ҷой дошта бошад.*

Монанди ҳамин мафҳумҳои интегралӣ ва мунтазам интегралӣ наздикшавандагии пайдарпаиҳои матриса-функсияҳо муайян карда мешаванд.

Қайд менамоем [3], ки интегралӣ наздикшавандагии пайдарпаии $\{f_k(t)\}$ ба $f(t)$, мунтазам интегралӣ наздикшаванда мешавад, агар яке аз шартҳои зерин иҷро шавад:

а) чунин функсияи $\varphi \in L_{1,loc}(a,b)$ мавҷуд бошад, ки

$$|f_k(t)| \le \varphi(t), \quad k = 1,2,\dots, \quad t \in (a,b)$$

иҷро гардад;

б) пайдарпаии $\{f_k(t)\}$ дар фазои $L_{p,loc}(a,b)$ маҳдуд бошад, ки $p > 1$.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теорема. *Бигзор пайдарпаиҳои* $\{A_k(t)\}$ *ва* $\{f_k(t)\}$, $k = 1,2,\dots$ *мунтазам интегралӣ дар ҳар як порчаҳои фосилаи* (a,b) *мувофиқан ба* $A_0(t)$ *ва* $f(t)$ *наздик шаванд ва ҳангоми* $k \to \infty$, $\xi_k \to x_0$ *шавад. Бигзор пайдарпаии* $\{A_k(t)\}$ *дар фазои* $L_{1,loc}(a,b)$ *маҳдуд бошад. Онгоҳ, пайдарпаии ҳалҳои* $x_k(t)$, $k = 1,\ 2,\dots$ *-и масъалаи (3) дар ҳар як порчаҳои фосилаи* (a,b) *ба ҳалли* $x(t)$*-и системаи намуди (1), ки шарти аввалаи* $x(t_0) = x_0$*-ро дорад, мунтазам наздик мешаванд.*

Барои исботи ин тасдиқот леммаи зерин истифода бурда мешавад.

Лемма. *Бигзор функсияи* $\psi(t)$ *дар фосилаи* (a,b) *ғайриманфӣ ва бефосила буда, нобаробарии интегралии*

$$\psi(t) \le \left| \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\psi(s)ds \right| + \psi_0(t), \quad t \in (a,b)\,, \tag{5}$$

-ро қаноат кунонад, ки дар ин ҷо $\gamma(t) \ge 0$ буда, аз фазои $L_{1,loc}(a,b)$ аст, функсияи $\psi_0(t) \ge 0$ буда, дар фосилаи (a,b) бефосила аст ва t_0 – нуқтаи қайд кардашудаи фосилаи (a,b) мебошад. Онгоҳ, шарти зерин ҷой дорад

$$\psi(t) \le \psi_0(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \gamma(s) e^{\left|\int_{t_0}^{s}\gamma(\tau)d\tau\right|}\psi_0(s)ds \right|. \tag{6}$$

Қайд менамоем, ки аз (6) ҳангоми $\psi_0(t) \equiv 0$ будан, нобаробарии Гронуолл-Беллман [4] ҳосил мешавад.

Натиҷа. *Агар дар шарти лемма функсияи $\psi_0(t)$ дар ҳар як порчаҳои фосилаи (a,b) мутлақ наздикшаванда бошад, онгоҳ барои функсияи $\psi(t)$ -и нобаробарии (6) -ро қаноаткунанда, баҳои зерин ҷой дорад:*

$$\psi(t) \le \psi_0(t_0) e^{\int_{t_0}^{t}\gamma(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t}\gamma(\tau)d\tau} {\psi'}_0(s)ds, \quad a < t < b.$$

Мисолҳо овардан мумкин аст, ки дар онҳо шарти мунтазам ва интегралӣ наздикшавандагиро дар теорема, бо шарти интегралӣ наздикшавандагӣ иваз кардан мумкин нест, ҳатто дар ҳолате, ки барои ҳаргуна k, функсияҳои $A_k(t)$ ва $f_k(t)$ нисбат ба t бефосила бошанд.

Бо ин мақсад ду функсияҳои зеринро дохил менамоем:

$$\mu_k(t) \quad \text{ва} \quad \nu_k(\tau) = \int_0^t \mu_k(\tau)d\tau,$$

ки дар порчаи $[0,\ 1]$ муайян мебошанд:

$$\mu_k(t) = \begin{cases} k, & \text{агар } 0 \le t \le \dfrac{1}{k}, \\ k - (k^2 t - k), & \text{агар } \dfrac{1}{k} < t \le \dfrac{2}{k}, \\ 0, & \text{агар } t \notin \left[0, \dfrac{2}{k}\right]. \end{cases}$$

Маълум аст, ки

$$\nu_k(t) = \begin{cases} kt, & \text{агар } 0 \le t \le \dfrac{1}{k}, \\ 2kt - \dfrac{k^2}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}, & \text{агар } \dfrac{1}{k} < t \le \dfrac{2}{k}, \\ \dfrac{3}{2}, & \text{агар } t \notin \left[0, \dfrac{2}{k}\right]. \end{cases}$$

Ҳосил менамоем:

$$\forall\, t > 0 \quad \text{ва ҳангоми} \quad k \to \infty \text{ будан,} \quad \nu_k(t) \to \frac{3}{2} \quad \text{мешавад.}$$

Муодилаи скалярии

$$x' = a_k(t)x + f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

-ро дида мебароем, ки шарти аввалаи $x(0) = 1$ -ро дорад.

Мисоли 1. Бигзор дар (7) $f_k(t) \equiv 0$, $a_k(t) \equiv \mu_k(t)$ $\forall\, k = 1, 2 \ldots$ ва $f(t) \equiv a(t) \equiv 0$ бошад. Онгоҳ,

$$x(t) \equiv 1\,, \quad x_k(t) = exp\left(\int_0^t a_k(s)ds\right) = exp\big(\nu_k(t)\big), \qquad k = 1, 2, \dots$$

аст. Ҳангоми $k \to \infty$ ва $t > 0$ будан, $x_k(t) \to \exp\frac{3}{2} \neq x_0(t)$ мешавад.

Мисоли 2. Бигзор дар (7) $a_k(t) \equiv 0$, $f_k(t) \equiv \mu_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ ва $f(t) \equiv a(t) \equiv 0$ бошад. Онгоҳ,

$$x(t) \equiv 1\,, \quad x_k(t) = \int_0^t f_k(s)ds = \nu_k(t), \;\; k = 1, 2, \dots$$

аст. Ҳангоми $k \to \infty$ ва $t > 0$ будан, $x_k(t) \to \exp\frac{3}{2} \neq x_0(t)$ мешавад.

Исботи теорема. Вектор – функсияи $z_k(t) = x_k(t) - x(t)$ ҳалли муодилаи интегралии

$$z(t) = \int_{t_0}^t A_k(s)z(s)ds + g_k(t)\,, \quad t \in (a, b), \tag{8}$$

аст, ки дар ин ҷо

$$g_k(t) = \xi_k - x_0 + \int_{t_0}^t \big(A_k(s) - A(s)\big)x(s)ds + \int_{t_0}^t (f_k(s) - f(s))ds.$$

Аз баробарии

$$\int_{t_0}^t \big(A_k(s) - A(s)\big)x(s)ds = \int_{t_0}^t \big(A_k(\tau) - A(\tau)\big)d\tau x(t) -$$
$$- \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \big(A_k(\tau) - A(\tau)\big)d\tau x'(s)ds$$

ва аз мунтазам ва интегралӣ наздикшавандагии мувофиқан пайдарпаиҳои $\{A_k(t)\}$ ва $\{f_k(t)\}$ ба $A(t)$ ва $f(t)$ натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии вектор-функсияи $g_k(t)$ дар ҳар як порчаҳои фосилаи (a, b) ҳангоми $k \to \infty$, мунтазам ба сифр наздик мешавад. Аз муодилаи (8) натиҷа мебарояд, ки функсияи $z_k(t)$ нобаробарии интегралии

$$|z_k(t)| \le \left|\int_{t_0}^t \gamma_k(s)|z_k(s)|ds\right| + |g_k(t)|, \qquad t \in (a, b)$$

-ро қаноат мекунад, ки дар ин ҷо $\gamma_k(s) = \|A_k(s)\|$ аст. Бинобар, дар асоси леммаи дар боло зикр гардида, баҳои зерин ҷой дорад:

$$|z_k(t)| \le |g_k(t)| + \left|\int_{t_0}^t \gamma_k(s)e^{\int_{t_0}^t \gamma_k(\tau)d\tau}|g_k(s)|ds\right|. \tag{9}$$

Аз (9) натиҷа мебарояд, ки пайдарпаии функсияҳои $z_k(t)$, $k = 1,\ 2, \dots$ дар ҳар як порчаҳо маҳдуд буда, ҳангоми $k \to \infty$ будан, дар ҳар як порчаҳои фосилаи (a, b) мунтазам ба сифр наздик мешаванд.

Теорема исбот шуд.

Исботи лемма. Дурустии баҳои (5) -ро ҳангоми $t > t_0$ будан, муқаррар менамоем.

Функсияи

$$u(t) = \int_{t_0}^t \gamma(s)\psi(s)ds$$

мутлақ бефосила аст ва дар асоси (5) нобаробарии

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\int_{t_0}^t \gamma(\tau)d\tau}u(t)\right] \le e^{-\int_{t_0}^t \gamma(\tau)d\tau}\psi_0(t)\gamma(t) \tag{10}$$

- ро қаноат мекунад. Нобаробарии (10) -ро дар почаи $[t_0, t]$ интегронида, ҳосил менамоем:

$$e^{-\int_{t_0}^{t}\gamma(\tau)d\tau}u(t) < \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s}\gamma(\tau)d\tau}\psi_0(s)\,\gamma(s)ds, \quad t_0 < t < b$$

ё ин ки

$$u(t) \le \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t}\gamma(\tau)d\tau}\psi_0(s)\gamma(s)ds, \quad t_0 < t < b.$$

Аз ин ҷо, дар асоси нобаробарии (5) нобаробарии (6) -ро ҳосил мекунем. Ҳолати $t < t_0$ айнан ҳамин тавр дида баромада мешавад.

Лемма исбот шуд.

Исботи натиҷа. Дар ҳақиқат, азбаски функсияи $\psi_0(t)$ мутлақ бефосила аст, пас қариб дар ҳама ҷо $\psi'_0(t)$ мавҷуд аст ва ҳангоми $a < t < t_0$ будан, нобаробарии зеринро доро мебошем:

$$\psi(t) \le \psi_0(t) - \int_{t_0}^{t}\gamma(s)e^{-\int_{t_0}^{s}\gamma(\tau)d\tau}\psi_0(s)ds = \psi_0(t) + \int_{t_0}^{t}\psi_0(s)de^{-\int_{t_0}^{s}\gamma(\tau)d\tau}.$$

Нобаробарии охиронро қисм ба қисм интегронида, ҳосил мекунем:

$$\psi(t) \le \psi_0(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\gamma(\tau)d\tau} - \int_{t}^{t_0} e^{\int_{t}^{s}\gamma(\tau)d\tau}\psi'_0(s)ds\,.$$

Монанди ҳамин, ҳангоми $t_0 < t < b$ будан доро мешавем:

$$\psi(t) \le \psi_0(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\gamma(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t}\gamma(\tau)d\tau}\psi'_0(s)ds.$$

Натиҷа исбот шуд.

ПАЙНАВИШТ

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М.: Наука, 1972. – 496 с.
3. Красносельский М.А. Нелинейные почти периодические колебания / М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов – М.: Наука, 1970. – 352 с.
4. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П.Демидович – М.: Наука, – 1967. – 472 с.

REFERENCES

1. Petrovsky I.G. Lectures on the theory of ordinary differential equations / I.G. Petrovsky - Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1984. - 296 p.
2. Kolmogorov, A. N. Elements of the theory of functions and functional analysis / Kolmogorov, S.V. Fomin - M.: Nauka, 1972.- 496 p.
3. Krasnoselsky M.A. Nonlinear almost periodic oscillations / M.A. Krasnoselsky, V.Sh. Burd, Yu.S. Kolesov - M.: Nauka, 1970.-352 p.
4. Demidovich, B.P. Lectures on the mathematical theory of stability / B.P. Demidovich - M.: Nauka, - 1967. - 472 p.