УДК 517.5
ББК 32.973

ВЕРХНИЕ ГРАНИ ОЦЕНКИ ОСТАТКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В $L_2(\mathbb{R})$

***Тухлиев Камаридин** - доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и вычислительной математики, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru*
***Хамдамов Шерали Джумабекович** - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики ХГУ имени академика Б.Гафурова (Республика Таджикистан, г. Худжанд), e-mail: sher762004@ mail.ru*

ҲУДУДҲОИ БОЛОИ БАҲОДИҲИИ БАҚИЯИ ТАБДИЛДИҲИИ ФУРЪЕ ДАР $L_2(\mathbb{R})$

***Тухлиев Қамаридин** - доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарор, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru*
***Ҳамдамов Шерали Ҷумабекович** - номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарори ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: sher762004@ mail.ru*

UPPER BOUNDS FOR THE RESIDUE OF THE FOURIER TRANSFORM IN $L_2(R)$

***Tukhliev Kamaridin** - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Informatics and Computational Mathematics, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru*
***Khamdamov Sherali Dzhumabekovich** - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Informatics and Computational Mathematics, Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e-mail: sher762004@ mail.ru*

Ключевые слова: *преобразование Фурье, оператор Стеклова, обобщённый модуль непрерывности m-го порядка.*

В статье найдены точные верхние грани оценки остатка преобразования Фурье в пространстве суммируемых с квадратом на всей оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ функций на некоторых классах дифференцируемых функций, структурные свойства которых определяются скоростью убывания к нулю обобщённого модуля непрерывности m-го порядка, определяемого через оператора Стеклова.

***Калимаҳои калидӣ**: табдилдиҳии Фурье , оператори Стеклов, модули бефосилагии умумишудаи тартиби m –ум.*

Дар мақола баҳодиҳии ҳудудҳои болои аниқ барои бақияи табдилдиҳии Фурье дар фазои функсияҳои дар тамоми тири $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ бо квадрат ҷамшавандаи дар баъзе синфҳои диффересиронидашавандаи функсияҳо ёфта мешавад. Хосияти сохтории ин функсияҳо бо суръати пастшавии ба сифр бо модули бефосилагии умумишудаи тартиби m –ум, бо оператори Стеклов муайян мешавад.

***Key words**: Fourier transform, Steklov operator, generalized modulus of continuity of the m-th order.*

The exact upper bounds of the remainder estimate are found in the article Fourier transforms in the space of square integrable on the whole Axis $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ *functions on some classes Differentiable functions whose structural properties are determined The rate of decrease of the generalized modulus of continuity of the m-th order, defined through the Steklov functions (operator).*

Приведём нужные нам в дальнейшем определения и обозначения. Всюду далее $\mathbb{N}$ – означает множество натуральных чисел; $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – множество всех действительных чисел; $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ – множество всех положительных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le \infty)$ – пространства суммируемых в p-й степени на всей действительной оси $\mathbb{R}$ функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\| f \|_p := \| f \|_{L_p(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ esssup\{\, |f(x)|:\ x \in \mathbb{R}\,\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Хорошо известно, что если $g \in L_2(\mathbb{R})$, то $g \in L_1(\mathbb{R})$ и значит, что при любых конечных a и b существует интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b g(u) e^{iux} du = f_{a,b}(x).$$

Планшерель [1] впервые доказал, что этот интеграл имеет предел в среднем на всей оси $\mathbb{R}$, и таким образом построил оператор Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. В самом деле, если полагать

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{N\to\infty}{l.i.m.} \int_{-N}^{N} g(u) e^{iux} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iux} du, \tag{1}$$

то согласно теории Планшереля

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{N\to\infty}{l.i.m.} \int_{-N}^{N} f(u) e^{-iux} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iux} du \tag{2}$$

и имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx. \tag{3}$$

Легко заметить, что формулы (1) и (2) являются обращением одна другой, а потому, если записать формулу (1) в виде $f = Fg$, то естественно формулу (2) записать в виде $g = F^{-1} f$, и таким образом оператор F^{-1} обратный оператору F только знаком при i отличается от множителя e^{iux}.

Формула (2) означает, что для всякой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ интеграл

$$g_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t) e^{-ixt} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

при любом $N > 0$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$, то есть существует $g \in L_2(\mathbb{R})$ такой, для которого $g(x) = \underset{N\to\infty}{l.i.m.}\ g_N(x)$ или, что то же, $\| g - g_N \|_2 \to 0$ при $N \to \infty$, причём имеет место равенство (3). Возникает естественная задача отыскания точной оценки интеграла

$$\int_{|t|\ge N} |g(t)|^2 dt \tag{4}$$

на некоторых классов функций $f \in L_2(\mathbb{R})$. Это задача рассмотрена в работе В.А.Абилова, Ф.В.Абиловой и М.К.Керимова [2] и полученные нами результаты в этом направлении являются дополнением к этой работе. В частности, здесь вычислена точная верхняя грань оценка интеграла (4) на классах функций, определяемые обобщённым модулем непрерывности m-го порядка в $L_2(\mathbb{R})$, при помощи оператора Стеклова

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\tau) d\tau, x \in \mathbb{R},\ h > 0.$$

Следуя обозначениями [3], определим разности первого и высших порядков

$$\Delta_h^1(f; x) = S_h(f; x) - f(x) = (S_h - I) f(x),$$

$$\Delta_h^m(f; x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot); x) = (S_h - I)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_h^k(f;x), m \in \mathbb{N},$$

где $S_h^0(f;x) := f(x), S_h^k(f;x) = S_h(S_h^{k-1}(f;\cdot);x),\ k = 1,2,\dots,m,$ а I – единичный оператор в $L_2(\mathbb{R})$.

Определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ равенством

$$\Omega_m(f;\delta) = \sup\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|:\ |h| \le \delta\}. \tag{5}$$

Отметим, что некоторые вопросы наилучшего приближения функций $f \in L_p(\mathbb{R})$ посредством целых функций экспоненциального типа и получение точных неравенств типа Джексона – Стечкина, а также вычисления средних ν-поперечников некоторых классов функций, где структурные свойства функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le \infty)$ характеризуется при помощи модуля непрерывности (5), были рассмотрены в работах [4-8].

Символом $L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)}(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R}))$ обозначим множество функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}$, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$.

Если – некоторый класс функций, принадлежащей пространству $L_2(\mathbb{R})$, то задача состоит в отыскания следующей величины

$$_N()_{L_2(\mathbb{R})} = \sup\{(\ \int_{|t|\ge N} |g(t)|^2)^{1/2}:\quad g \in \}. \tag{6}$$

Всюду, далее полагаем, что для всех рассматриваемых функций $f \in L_2^{(r)}$, производная $f^{(r)} \ne const$, а также

$$sinc\ \ t := \{\frac{\sin t}{t},\ \text{ если }\ t \ne 0,\ \ 1,\ \text{если}\ \ t = 0\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, N > 0$ *– произвольное достаточно большое число,* $0 < p \le 2$. *Тогда для любого* $h \in (0, \pi/N]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{N^{r-1/p}(\ \int_{|t|\ge N} |g(t)|^2 dt)^{1/2}}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},u)du\right)^{1/p}} = \left(\int_0^{Nh} (1 - \operatorname{sinc} u)^{mp} du\right)^{-1/p}. \tag{7}$$

Существует функция $f_1 \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, *которая реализует верхнюю грань в равенстве (7).*

Доказательство. Прежде всего заметим, что при любом $N > 0$ для произвольной $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ имеем

$$\Omega_m^2(f^{(r)},h) \ge \|\ \Delta_h^m(f^{(r)},\cdot)\ \|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \ge \int_{|t|\ge N} t^{2r}(1 - \operatorname{sinc} ht)^{2m}|g(t)|^2\, dt. \tag{8}$$

Применяя схему доказательства теоремы 1 из [8], приходим к неравенству

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge \left(\ \int_{|t|\ge N} |g(t)|^2 \left(t^{rp} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{mp}\, d\tau\right)^{2/p} dt\right)^{1/2}, \tag{9}$$

где $0 < p \le 2$. Докажем, что при всех $0 < p \le 2, r \in \mathbb{Z}_+$ функция

$$\psi(t) = t^{rp} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{mp}\, d\tau \tag{10}$$

в области $Q = \{\,t:\ |t| \ge N\}$ является монотонно возрастающей. В самом деле, дифференцируя функцию (10), получаем

$$\psi'(t) = rp\, t^{rp-1} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp}\, d\tau + t^{rp} \int_0^h \frac{d}{dt}(1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp}\, d\tau. \tag{11}$$

Воспользовавшись легко проверяемым тождеством

$$\frac{d}{dt}(1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp} = \frac{\tau}{t}\frac{d}{d\tau}(1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp}$$

и выполнив интегрирование по частям во втором интеграле (11), имеем

$$\psi'(t) = rp\, t^{rp-1} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp}\, d\tau +$$

$$+t^{rp-1} \int_0^h \tau \frac{d}{d\tau} (1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp}\, d\tau = rp\, t^{rp-1} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp}\, d\tau +$$

$$+t^{rp-1} h (1 - \operatorname{sinc} th)^{mp} - t^{rp-1} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp}\, d\tau.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, приходим к следующему неравенству

$$\psi'(t) = rp\, t^{rp-1} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} t\tau)^{mp}\, d\tau +$$

$$+t^{rp-1} h \{(1 - \operatorname{sinc} ht)^{mp} - (1 - \operatorname{sinc} \xi t)^{mp}\} \geq 0, \quad 0 \leq \xi \leq h,$$

которое означает, что функция $\psi(t)$ на множестве Q является монотонно возрастающей, а потому

$$\min\{\, \psi(t):\ t \in Q\, \} = \psi(N) := N^{rp} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} N\tau)^{mp} d\tau. \tag{12}$$

Теперь с учётом (12) из (9) следует, что

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, \tau)\, d\tau \right)^{1/p} \geq$$

$$\geq N^r \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} N\tau)^{mp} d\tau \right)^{1/p} \left(\int_{|t| \geq N} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \tag{13}$$

Так как неравенство (13) имеет место для произвольной $f \in L_2^{(r)}$, то из этого неравенства получаем оценку сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{N^r \left(\int_{|t| \geq N} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}}{\left(\int_0^h \Omega_m(f^{(r)}, h) d\tau \right)^{1/p}} \leq \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} N\tau)^{mp} d\tau \right)^{-1/p}. \tag{14}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части (14), возведём обе части неравенства (14) из [8] степень $p/2$ $(0 < p \leq 2)$ и проинтегрируем обе стороны по переменному τ в пределах от $\tau = 0$ до $\tau = h$, а затем снова обе части полученного неравенства возведём в степень $1/p$. В итоге получаем

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_\varepsilon^{(r)}, \tau)\, d\tau \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq (N + \varepsilon)^r \left(\int_{|t| \geq N} |g_\varepsilon(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} (N + \varepsilon)\tau)^{mp} d\tau \right)^{1/p}. \tag{15}$$

Учитывая неравенство (15), получаем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{N^r \left(\int_{|t| \geq N} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, h) d\tau \right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{N^r \left(\int_{|t| \geq N} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}}{(N+\varepsilon)^r \left(\int_{|t| \geq N} |g_\varepsilon(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} (N+\varepsilon)\tau)^{mp} d\tau \right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\frac{N}{N+\varepsilon} \right)^r \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} (N + \varepsilon)\tau)^{mp} d\tau \right)^{-1/p} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow}$$

$$\overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} N\tau)^{mp} d\tau \right)^{-1/p}. \tag{16}$$

Требуемое равенство (7) вытекает из сопоставления оценки сверху (14) и оценки снизу (16) чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда при* $p = 1/m, m \in \mathbb{N}, r \geq m$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{N^{r-m}\left(\int_{|t|\geq N} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}}{\left(\int_0^h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, u) du\right)^m} = \left\{\frac{1}{Nh - Si(Nh)}\right\}^m, \tag{17}$$

где $Si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$ – интегральный синус.

В частности из (17) при $h = \pi/N$ имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{N^{r-m}\left(\int_{|t|\geq N} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}}{\left(\int_0^{\pi/N} \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, u) du\right)^m} = \frac{1}{(\pi - Si(\pi))^m}.$$

Пусть $F(t)$ – непрерывная монотонно возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция такая, что $F(0) = 0$. Через $W_m^{(r)}(F)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производная r-го порядка $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$ при любых $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \leq \pi/N,\ N > 0$ удовлетворяет ограничение

$$\Omega_m(f^{(r)}, h) \leq F(h).$$

Аналогичным образом, через $W_{m,p}^{(r)}(F)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производная r-го порядка $f^{(r)}$ при любых $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p \leq 2$ и $0 < h \leq \pi/N, N > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, u) du\right)^{1/p} \leq F(h).$$

Теорема 2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, N > 0$ *– произвольное число и* $0 < h \leq \pi/(2N)$. *Тогда справедливы равенства*

$$_N(W_m^{(r)}(F)) := \sup_{f \in W_m^{(r)}(F)} \frac{\left(\int_{|t|\geq N} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}}{\Omega_m(f^{(r)}, h)} =$$

$$= N^{-r}(1 - \operatorname{sinc} Nh)^{-m} F(h). \tag{18}$$

Если же $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq 2, N > 0$ *– произвольное число и* $0 < h \leq \pi/N$, *то имеет место равенство*

$$_N(W_{m,p}^{(r)}(F)) := \sup_{f \in W_{m,p}^{(r)}(F)} \frac{\left(\int_{|t|\geq N} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, u) du\right)^{1/p}} =$$

$$= N^{-r+1/p}\left(\int_0^{Nh} (1 - \operatorname{sinc} u)^{mp} du\right)^{-1/p} F(h). \tag{19}$$

Доказательство. Соотношение (18) и (19) доказываются одним и тем же методом, поэтому, не нарушая общности, приводим доказательство равенства (18).

Оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (18), получаем из неравенства (14) из [8], согласно которому для любых $0 < h \leq \pi/N$ имеем

$$_N(W_m^{(r)}(F)) = \sup\left\{\left(\int_{|t|\geq N} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} :\ f \in W_m^{(r)}(F)\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{N^{-r}(1 - \operatorname{sinc} Nh)^{-m}\Omega_m(f^{(r)}, h):\ f \in W_m^{(r)}(F)\right\} \leq$$

$$\leq N^{-r}(1 - \operatorname{sinc} Nh)^{-m} F(h). \tag{20}$$

Для получения оценки снизу вводим в рассмотрение функцию $f_{1,\varepsilon}(x) := f_\varepsilon(x)F(h)$, где функция $f_\varepsilon(x)$ определена равенством [4]

$$f_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(N+\varepsilon)x}{x} - \frac{\sin Nx}{x}\right), \qquad (21)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Простые вычисления приводят к неравенству

$${}_N(W_m^{(r)}(F)) = \sup\left\{\left(\int_{|t|\geq N} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}: \ f \in W_m^{(r)}(F)\right\} \geq$$

$$\geq \left(\int_{|t|\geq N} |g_\varepsilon(t)|^2 dt\right)^{1/2} \geq (N+\varepsilon)^{-r}(1 - \operatorname{sinc}(N+\varepsilon)h)^{-m}F(h) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} N^{-r}(1 - \operatorname{sinc} Nh)^{-m}F(h). \qquad (22)$$

Сопоставляя неравенства (20) и (22), получаем равенство (18), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Plancherel M. Contribution a l'etude de la representetion d'une fonction arbitraire par des integrales definies — Rend. Circolo Matem. di Palermo. 1910, t.30, p.289-335.
2. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Несколько замечаний о преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ — Журнал вычислительной матем. и матем. физики, 2008, т.48, 6, с.939-945.
3. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем. заметки. 2013. Т.94, 6. С. 908-917.
4. Тухлиев К. О некоторых экстремальных задачах наилучших приближений целыми функциями // Вестн.Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin), 2015, Вып. 2(155), С. 213-220.
5. Тухлиев К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. I // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2013, 3(152), С.19-29.
6. Тухлиев К. О некоторых экстремальных задачах наилучших приближений целыми функциями // Вестн.Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin), 2015, Вып. 2(155), С. 229-231.
7. Тухлиев К. Точные значения средних ν -поперечников классов целых функций экспоненциального типа // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки, 2018, 4 (47), с. 8-15.
8. Тухлиев К. Точные оценки остатка преобразования Фурье на всей оси в пространстве Гильберта // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки, 2020, 1(52), с. 3-8.

REFERENCES

1. Plancherel M. Contribution a l'etude de la representetion d'une fonction arbitraire par des integrales definies — Rend. Circolo Matem. di Palermo. 1910, t.30, pp.289-335.
2. Abilov V.A., Abilova F.V., Kerimov M.K. A few notes about the Fourier transform in the space L_2 (R) - Journal of Computational Mathematics. and math. Physics, 2008, vol. 48, 6, pp. 939-945.
3. Shabozov M.Sh., Tukhliev K. Best polynomial approximations and widths of some functional classes in L_2 // Matem. notes. 2013. T.94, 6. pp. 908-917.
4. Tukhliev K. On some extremal problems of best approximations by entire functions // Tomsk State Journal. ped. University (TSPU Bulletin), 2015, Vol. 2(155), pp. 213-220.
5. Tukhliev K. On the best approximations by entire functions in the space L_2 (R). I // Izv. AN RT. Dept. Phys.-Math., Chem., Geol. and tech. n., 2013, 3(152), pp.19-29.
6. Tukhliev K. On some extremal problems of best approximations by entire functions // Tomsk State Journal. ped. University (TSPU Bulletin), 2015, Vol. 2(155), pp. 229-231.
7. Tukhliev K. Exact values of the average ν-widths of classes of entire functions of exponential type // Academic notes of KhSU im. B. Gafurova, Series of natural and economic sciences, 2018, 4 (47), pp. 8-15.
8. Tukhliev K. Accurate estimates of the remainder of the Fourier transform on the entire axis in Hilbert space // Academic notes of KhSU im. B. Gafurova, Series of natural and economic sciences, 2020, 1(52), pp. 3-8.