УДК 517.5
ББК 32.973

СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ЕЁ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ЧЕБЫШЕВА В $L_{2,\mu}$

Тухлиев Камаридин - *доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и вычислительной математики, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru*
Туйчиев Анваржон Махмуджонович - *старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии ХГУ имени академика Б.Гафурова (Республика Таджикистан, г. Худжанд), e-mail: t-87yil@mail.ru*

НАЗДИККУНИИ ҲАМҶОЯИ ФУНКСИЯҲО ВА ҲОСИЛАҲОИ МОБАЙНИИ ОНҲО БО ЁРИИ СУММАҲОИ ХУСУСИИ ҚАТОРИ ФУРЕ – ЧЕБИШЕВ ДАР $L_{2,\mu}$

Тухлиев Қамаридин - *доктори илмҳои физика-математика, профессори кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарор, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru*
Тӯйчиев Анварҷон Махмудҷонович - *муаллими калони кафедраи алгебра ва геометрияи ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: t-87yil@mail.ru*

JOINT APPROXIMATION OF A FUNCTION AND ITS INTERMEDIATE DERIVATIVES BY PARTIAL SUMS OF THE FOURIER-CHEBYSHEV SERIES IN $L_{2,\mu}$

Tukhliev Kamaridin - *Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Informatics and Computational Mathematics, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru*
Tuychiev Anvarzhon Makhmudzhonovich - *Teacher of the Department of Algebra and Geometry, Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e-mail: t-87yil@mail.ru*

Ключевые слова: *оператор обобщённого сдвига, модуль непрерывности m -го порядка, совместные приближения, ряд Фурье-Чебышева, дифференциальный оператор.*

В работе найдены точные значения верхней грани наилучших полиномиальных совместных приближений функций и их промежуточных производных суммами Фурье – Чебышева и их соответствующими производными в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышёва $\mu(x):=1/\sqrt{1-x^2}$.

Калимаҳои калидӣ: *оператори умумикардашудаи, модули бефосилагии тартиби m -ум, наздиккунии ҳамҷоя, қатори Фурйе-Чебишев, оператори дифференсиалӣ.*

Дар мақола ёфтани қиматҳои аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии беҳтарини ҳамҷояи полиномалии функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайнии онҳо бо суммаҳои Фуре – Чебишев ва бо ҳосилаҳои мувофиқи онҳо дар фазои гилбертии $L_{2,\mu}[-1,1]$ бо вазни Чебишеви $\mu(x):=1/\sqrt{1-x^2}$ ёфта шаванд.

Key words: *generalized shift operator, m-th order modulus of continuity, joint approximations, Fourier-Chebyshev series, differential operator.*

The exact values of the upper bound of the best polynomial joint approximations of functions and their intermediate derivatives by the Fourier-Chebyshev sums and their corresponding derivatives in the Hilbert space $L_{2,\mu}[-1,1]$ *with the Chebyshev weight* $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$.

В задачах математической физики, квантовой механике и современной прикладной математики, чаще всего используются ряды Фурье по классическим ортогональным системам Чебышева, Чебышева - Эрмита, Чебышева - Лагерра и общие многочлены Чебышева - Якоби. При этом требуется выяснить условия разложения функций в ряды Фурье по указанным классическим ортогональным системам, образующим на заданном отрезке полную ортогональную систему. В последнее время появляются всё новые возможности применения классических ортогональных многочленов при решении различных технических задач вариационного содержания. В связи с этим, классическим ортогональным многочленам уделяется больше внимания.

Следует отметить, что в весовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ обычные вопросы полиномиальных приближений функций суммами Фурье – Чебышева, структурные характеристики которых определялись специальными модулями непрерывности, рассмотрены в работах [1-5]. Вопросы совместного приближения функций и их производных суммами Фурье – Чебышева не были рассмотрены в вышеуказанных работах. Данная работа посвящена изучению некоторых экстремальных задач совместных приближений функций.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $L_2 := L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1; 1])$ – пространства суммируемых с квадратом функций $f: [-1; 1] \to \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ с весом Чебышёва $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ и конечной нормой

$$\| f \| := \| f \|_{L_2} = \left(\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \right)^{1/2}.$$

Через $L_2^{(r)}$ $(r = 0,1,2,\dots; L_2^{(0)} = L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2.

Следуя работе [1], в пространстве L_2 введём оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}[f(x\cosh + \sqrt{1-x^2}\sinh) + f(x\cosh - \sqrt{1-x^2}\sinh)], \qquad (1)$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига.*

В [1] введён специальный модуль непрерывности следующим образом. Пусть

$$\Delta_h(f; x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - I) f(x),$$

$$\Delta_h^m(f; x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot); x) = (F_h - I)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x))$, $k = 1,2,\dots,m; m \in \mathbb{N}$ и I – единичный оператор в пространстве L_2.

Определим модуль непрерывности m-го порядка равенством

$$\Omega_m(f; t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f; \cdot)\|: |h| \le t\}.$$

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k\arccos x), \qquad k = 1,2,\dots$$

– ортонормированная система многочленов Чебышёва в пространстве L_2. Тогда, как хорошо известно,

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)T_k(x), \tag{2}$$

$c_k(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, T_k(x)dx$ – есть ряд Фурье-Чебышева функции $f \in L_2$, а

$$S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)T_k(x)$$

– частичные суммы ряда (2). Известно [2], что

$$\| f \| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2}, \quad \| f - S_{n-1}(f) \| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Пусть теперь $D = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор второго порядка. В работе [1] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2$ коэффициенты Фурье-Чебышева ряда (3) удовлетворяют соотношения

$$c_k(f) = (-1)\, k^{-2r}\, c_k(D^r f), \ k = 1,2,..., \tag{4}$$

где $D^0 f = f,\ D^r f = D(D^{r-1}f), r = 1,2,\ldots$. Там же доказано, что для указанных коэффициентов также имеют место равенства

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f), \qquad k = 1,2,...,$$

где функция $F_h f$ – определёна равенством (1). Применением равенства Парсеваля в [1] для произвольной функции $f \in L_2^{(2r)}$ получено соотношение

$$\| \Delta_h^m(D^r f) \|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f).$$

Введём далее обозначение

$$\mathcal{E}_{\,n-1}(f) = \| f - S_{n-1}(f) \|,$$

и если – некоторый класс функций, принадлежащий L_2, то положим

$$\mathcal{E}_{\,n-1}(\mathfrak{M}) = \sup\{\mathcal{E}_{\,n-1}(f) \colon f \in \mathfrak{M}\}.$$

Так как наряду с функцией f все операторные производные вида $\mathcal{D}^s f$ $(s = 0,1,\ldots,r)$ также принадлежат пространству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, то имеет смысл найти наилучшее приближение некоторого множества $\mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}$, принадлежащего множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, то есть требуется найти точное значение верхней грани

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}) := \sup\{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \colon f \in \mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}\}.$$

Имеет место следующая

Лемма. *Для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ при всех $s = 0,1,\ldots,r$ справедливо точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le n^{-2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(D^{2r} f)_{2,\mu}, \tag{5}$$

которая для функции $f_0(x) = T_n(x)$ обращается в равенство.

Доказательство. Легко убедиться, что

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} = \sum_{k=n}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f).$$

Пользуясь равенствами (3) и (4) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ при любом $s = 0,1,\ldots,r$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(\mathcal{D}^s f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k^{-4(r-s)} k^{4r} c_k^2(f) \le n^{-4(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f) =$$

$$= n^{-4(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}^2(D^r f)_{2,\mu},$$

откуда сразу следует неравенство (5). Знак равенства в (5) реализует функция $f_0(x) = T_n(x)$, очевидно принадлежащая классу $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ и для которой

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_0) = 1, \quad \mathcal{E}_{n-1}(D^r f_0) = n^{2r}. \tag{6}$$

Кроме того,

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_0) = n^{2s} = n^{-2(r-s)} \cdot n^{2r} = n^{-2(r-s)} \cdot \mathcal{E}_{n-1}(D^r f_0).$$

Лемма доказана.

В работе М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [2] доказано, что для любых $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\, \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin ntdt\right)^m} = 1.$$

Следующая теорема обобщает результаты М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+$ $n \geq s$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \cdot \sin nhdh\right)^m} = 1. \tag{7}$$

Доказательство. Используя результат теоремы 1 из [3] будем иметь

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f) \leq \left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nhdh\right)^m.$$

Применив к последнему неравенству леммы, приходим к следующему неравенству:

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f) \leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nhdh\right)^m.$$

Отсюда следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (7)

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \cdot \sin nhdh\right)^m} \leq 1. \tag{8}$$

Для функции $f_0(x) = T_n(x)$, для которой, кроме равенств (6), ещ ё имеет место равенство

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; t)_{2,\mu} = n^{2r/m}(1 - \cos nt),$$

$$\left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; t)_{2,\mu} \cdot \sin ntdt\right)^m = n^{2r},$$

запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \cdot \sin nhdh\right)^m} \geq$$

$$\geq \frac{n^{2(r-s)} n^{2s}}{\left(\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h)_{2,\mu} \cdot \sin nhdh\right)^m} = \frac{n^{2r}}{n^{2r}} = 1. \tag{9}$$

Сопоставляя оценку сверху (8) с оценкой снизу (9), получаем требуемое равенство (7), чем и завершаем доказательство теоремы.

Из теоремы сразу вытекают ряд следствий.

Следствие 1. *В утверждении теоремы имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(D^r f; t)_{2,\mu} \sin nt\, dt\right)^m} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m.$$

В свою очередь, из следствие 1 вытекает

Следствие 2. *В условиях следствия 1 справедливо экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, \pi/(2n))_{2,\mu}} = 1.$$

Через $W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$ $\quad (r \in \mathbb{Z}_+, W^{(0)}L_{2,\mu}(\mathcal{D}) = L_{2,\mu}(\mathcal{D}))$ — обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, у которых $\| \mathcal{D}^r f \|_{2,\mu} \le 1$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r}} = 1. \tag{10}$$

Доказательство. В силу определения класса $W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$ имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \le \| \mathcal{D}^r f \|_{2,\mu} \le 1,$$

а потому из неравенства типа Колмогорова [2] для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$ следует, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu})^{s/r} \le$$

$$\le (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r},$$

откуда получаем

$$\frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r}} \le 1.$$

Переходя к верхней грани по всем функциям $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$ в последнем неравенстве приходим к следующей оценке сверху:

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r}} \le 1. \tag{11}$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу, введём в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}}\, T_n(x).$$

Так как

$$\mathcal{D}^r f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}}\, \mathcal{D}^r T_n(x) = \frac{1}{n^{2r}} \cdot (-1)^r n^{2r} T_n(x) = (-1)^r T_n(x)$$

$$\| \mathcal{D}^r f_1 \|_{2,\mu} = \| (-1)^r\, T_n(x) \|_{2,\mu} = 1,$$

то функция $f_1 \in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$.

С другой стороны, при всех $s = 0,1,\dots,r$

$$\mathcal{D}^s f_1(x) = \frac{(-1)^s}{n^{2(r-s)}}\, T_n(x),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2(r-s)}} \quad (s = 0,1,\dots,r),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_1)_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2r}}.$$

Учитывая эти равенства, запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{1-s/r}} \ge \frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu}}{(\mathcal{E}_{n-1}(f_1)_{2,\mu})^{1-s/r}} =$$

$$= \frac{n^{-2(r-s)}}{(n^{-2r})^{1-s/r}} = \frac{n^{-2(r-s)}}{n^{-2(r-s)}} = 1. \tag{12}$$

Требуемое равенство (10) сразу следует из сравнения неравенств (11) и (12), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле // Журнал выч. мат. и мат. физ., 2002, т.42, 4. С. 451-458.
2. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона - Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций. // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2015, т.21, 4, С. 292-308.
3. Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении функций суммами Фурье – Чебышева в $L_{2,\mu}[-1,1]$ // ДАН РТ. – 2014. – Т.57. – 3. – С.177–183.
4. Тухлиев К. О верхних гранях отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье – Чебышева в пространстве L_2 // ДАН РТ. 2013, т.56, 8, С.606-611.
5. Туйчиев А.М. Наилучшие среднеквадратические приближения функций суммами Фурье – Чебышева // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2020. – 4 (55). – С.8–13.

REFERENCES

1. Abilov V.A., Abilova F.V. On one quadrature formula // Zhurnal Vychisl. mat. and mat. Fiz., 2002, vol. 42, 4, pp. 451-458.
2. Shabozov M.Sh., Tukhliev K. Jackson - Stechkin inequalities with generalized moduli of continuity and widths of some classes of functions. - Proceedings of the IMM UB RAS, 2015, v.21, 4, pp. 292-308.
3. Tukhliev K., Beknazarov J.Kh. On the best approximation of functions by Fourier-Chebyshev sums in L_(2,μ) [-1,1] // DAN RT. - 2014. - T.57. - 3. - pp.177-183.
4. Tukhliev K. On the upper bounds of the deviation of some classes of functions from their partial sums of the Fourier – Chebysheva series in the space L_2 // DAN RT. 2013, vol. 56, 8, pp. 606-611.
5. Tuychiev A.M. The best root-mean-square approximations of functions by Fourier-Chebyshev sums // Uchenye zapiski KhGU im. B. Gafurov. Series natural and economic sciences. - 2020. - 4 (55). – pp. 8–13.