УДК: 517. 927. 21
ББК 22.161.1
О – 42

# ЗАДАЧА ТИПА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ГРАНИЧНЫМИ И ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

***Олими Абдуманон Гафорзода*** *– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru,*
***Охунов Нозимджон Кобилович*** *– старший преподаватель кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: okhunov_73@mail.ru*

# МАСЪАЛАИ НАМУДИ ХАТТӢ-ҲАМРОҲШАВӢ БАРОИ МУОДИЛАИ ОПЕРАТОРӢ-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ДУ НУҚТАИ КАНОРӢ ВА ЯК НУҚТАИ ДОХИЛИИ СИНГУЛЯРӢ

***Олимӣ Абдуманон Ғафорзода*** *- номзади илмҳои физика-математика, дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru,*
***Охунов Нозимҷон Қобилович*** *- сармуаллими кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: okhunov_73@mail.ru*

# A LINEAR CONJUGATION TYPE PROBLEM FOR OPERATOR - DIFFERENTIAL EQUATION WITH TWO BOUNDARY AND ONE INTERNAL SINGULAR POINTS

***Olimi Abdumanon Gaforzoda*** *– Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor Mathematical Analysis Department named after Professor A. Muksinov under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru,*
***Okhunov Nozimjon Kobilovich*** *- Senior Lecturer Mathematical Analysis Department named after Professor A. Muksinov under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: okhunov_73@mail.ru*

***Ключевые слова:*** *обыкновенное операторно-дифференциальное уравнение, граничная и внутренняя сингулярная точки, общее решение, формулы обращения, задача линейного сопряжения.*

*В статье для обыкновенного операторно-дифференциального уравнения с двумя граничными и одной внутренней сингулярной точками с помощью известного представления общего решения и его формул обращения выясняется постановка задачи типа линейного сопряжения. При* $n=2$ *в четырёх случаях выявляется достаточное условие, при выполнении которого задача имеет единственное решение и это решение находится в явном виде.*

***Вожаҳои калидӣ:*** *муодилаи операторӣ-дифференсиалии одӣ, нуқтаи сарҳадӣ ва дохилии сингулярӣ, ҳалли умумӣ, формулаҳои баргардонӣ, масъалаи хаттӣ-ҳамроҳшавӣ.*

*Дар мақола барои муодилаи операторӣ-дифференсиалии одӣ бо ду нуқтаи сарҳадӣ ва як нуқтаи дохилии сингулярӣ бо ёрии ҳалли умумии маълум ва формулаҳои баргардонии он гузориши масъалаи хаттӣ-ҳамроҳшавӣ муайян карда мешавад. Дар вақти* $n=2$ *дар чор ҳолатҳо шарти кофие ёфта мешавад, ки ҳангоми иҷрошавии он масъала ҳалли ягона дорад ва он ҳал дар намуди ошкор ёфта мешавад.*

***Key words:*** *ordinary operator-differential equation, boundary and internal singular points, general solution, inversion formulas, linear conjugation problem.*

*In the article for an ordinary operator-differential equation with two boundary and one internal singular points using a well-known representation of the general solution and its inversion formulas the formulation of a linear conjugation type problem is clarified. In* $n=2$ *the four cases a sufficient condition is revealed under which the task has a single solution and this solution is in an explicit form.*

Задача линейного сопряжения является одной из основных граничных задач в теории аналитических функций. Впервые к решению этой задачи пришел Б.Риман в связи с вопросом построения линейного дифференциального уравнения по заданной группе подстановок (группе монодромии) [1]. Формулировка этой задачи, близкая к современному принадлежит Д.Гильберту[2]. Данная задача имеет много приложений. В монографиях [3] и [4] рассматривались приложения задачи линейного сопряжения в теории сингулярных интегральных уравнений и других вопросах, а также ее обобщения в различных направлениях. Постановке и исследованию задачи типа линейного сопряжения для решений дифференциальных уравнений с частными производными и обыкновенных дифференциальных уравнений, а также их систем посвящён ряд работ, таких как [5]-[19].

Нашей целью в данном исследовании было выяснение постановки задачи типа линейного сопряжения и нахождении ее решения для уравнения

$$A_{(b)}^{n} y = f(x) \prod_{i=1}^{3} |x-b_i|^{-1}, \; x\in \Gamma_{(b)} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \tag{1}$$

где $\Gamma_1 = (b_1, b_2)$ , $\Gamma_2 = (b_2, b_3)$ - интервалы вещественной числовой оси, $(b)=\{b_1, b_2, b_3\}$, $b_1<b_2<b_3$ , $n$ - натуральное число, $p(x)$ , $q(x)$ и $f(x)$ - известные функции, $A_{(b)} y \equiv y' + p(x)\prod_{i=1}^{3}|x-b_i|^{-1} y - q(x)\prod_{i=1}^{3}|x-b_i|^{-1}$ - дифференциальный оператор с сингулярными точками $b_i$ , $A_{(b)}^{0} y \equiv y$ , $A_{(b)}^{s} y = A_{(b)}(A_{(b)}^{s-1} y)$ , $s=\overline{1,n}$ . Для достижения поставленной цели используем результаты, полученные относительно решений уравнения (1) и кратко изложенные в работе [20], которые приводим ниже для последовательности дальнейшего изложения:

**Теорема 1.** Пусть $x_i^0$ - обозначает фиксированную точку интервала $\Gamma_i$ , которая разделяет этот интервал на промежутки $\Gamma_i^1 = (b_i , x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0 , b_{i+1})$ и для уравнения (1) выполняются следующие условия:

1) функции $p(x)$ , $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $\overline{\Gamma_{(b)}}$ за исключением, быть может, точек $b_i$ , $i=\overline{1,3}$ , в которых они допускают разрыв первого рода;

2) функции $p_i^1(x) = p(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3}|x-b_k|^{-1}$ и $p_i^2(x) = p(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{3}|x-b_k|^{-1}$ , $i=1,2$ удовлетворяют, соответственно условию Гельдера $\left|p_i^1(x) - p_i^1(b_i+0)\right| \le H_i^1 (x-b_i)^{h_i^1}$ , $H_i^1 - const. > 0$ , $0<h_i^1\le 1$ при $x\to b_i+0$, и $\left|p_i^2(b_{i+1}-0) - p_i^2(x)\right| \le H_i^2 (b_{i+1}-x)^{h_i^2}$ , $H_i^2 - const. > 0$ , $0<h_i^2\le 1$ при $x\to b_{i+1}-0$;

3) имеют место неравенства $p_i^1(b_i+0)>0$ , $p_i^2(b_{i+1}-0)<0$;

4) возможны другие комбинации знаков чисел $p_i^1(b_i+0)$ и $p_i^2(b_{i+1}-0)$ , $i=1,2$ . При этом, если $p_i^1(b_i+0)<0$ то функции $q_i^1(x) = q(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3}|x-b_k|^{-1}$ и $f_i^1(x) = f(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3}|x-b_k|^{-1}$ , а если $p_i^2(b_{i+1}-0)>0$

то функции $q_i^2(x)=q(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{3}|x-b_k|^{-1}$ и $f_i^2(x)=f(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{3}|x-b_k|^{-1}$ удовлетворяют, соответственно, асимптотическому условию

$$q_i^1(x)=o[(x-b_i)^{\beta_i^1}]\ ,\ f_i^1(x)=o[(x-b_i)^{\gamma_i^1}]\ ,\quad \beta_i^1,\gamma_i^1>-p_i^1(b_i+0)\ \text{при}\ x\to b_i+0,$$

$$q_i^2(x)=o[(b_{i+1}-x)^{\beta_i^2}],\quad f_i^2(x)=o[(b_{i+1}-x)^{\gamma_i^2}],\ \beta_i^2,\gamma_i^2>p_i^2(b_{i+1}-0)\ \text{при}\ x\to b_{i+1}-0.$$

Тогда общее решение уравнения (1) на множестве $\Gamma_{(b)}$, а также степени оператора $A_{(b)}$ от нее выражаются формулой

$$A_{(b)}^s y=\begin{cases}K_{b_i,s}^{\alpha_i,+}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C_{is}^1,...,C_{i(n-1)}^1]\ \ при\ \ x\in\Gamma_i^1\\ K_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-}[p_i^2(x),q_i^2(x),f_i^2(x),C_{is}^2,...,C_{i(n-1)}^2]\ \ при\ \ x\in\Gamma_i^2\end{cases},i=1,2,s=\overline{0,(n-1)}\ ,\quad (2)$$

где

$$K_{b_i,s}^{1,+}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C_{is}^1,C_{i(s+1)}^1,...,C_{i(n-1)}^1]=(x-b_i)^{-p_i^1(b_i+0)}\exp[-w_{p_i^1,b_i}^{1,+}(x)]\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_{b_i}^{x}\left[\sum_{j=0}^{n-s-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_i^1(\xi)+\frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}f_i^1(\xi)\right](\xi-b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1}\exp[w_{p_i^1,b_i}^{1,+}(\xi)]d\xi+\sum_{j=s}^{n-1}C_{ij}^1\frac{(x-b_i)^{j-s}}{(j-s)!}\right\},$$

$$K_{b_{i+1},s}^{1,-}[p_i^2(x),q_i^2(x),f_i^2(x),C_{is}^2,C_{i(s+1)}^2,...,C_{i(n-1)}^2]=(b_{i+1}-x)^{p_i^2(b_{i+1}-0)}\exp[-w_{p_i^2,b_{i+1}}^{1,-}(x)]\left\{(-1)^s\sum_{j=s}^{n-1}C_{ij}^2\frac{(b_{i+1}-x)^{j-s}}{(j-s)!}-\right.$$

$$\left.-\int_{x}^{b_{i+1}}\left[\sum_{j=0}^{n-s-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_i^2(\xi)+\frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}f_i^2(\xi)\right](b_{i+1}-\xi)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1}\exp[w_{p_i^2,b_{i+1}}^{1,-}(\xi)]d\xi\ \right\},$$

$$w_{p_i^1,b_i}^{1,+}(x)=\int_{b_i}^{x}\frac{p_i^1(t)-p_i^1(b_i+0)}{t-b_i}dt,\ w_{p_i^2,b_{i+1}}^{1,-}(x)=\int_{x}^{b_{i+1}}\frac{p_i^2(b_{i+1}-0)-p_i^2(t)}{b_{i+1}-t}dt,\ \text{а}\ C_{ij}^1,\ C_{ij}^2,\ j=\overline{0,(n-1)},$$

$i=1,2$ - произвольные постоянные, группы из которых, относящихся к промежутку $\Gamma_i$, $i=1,2$, однозначно связаны соответствующей треугольной системой алгебраических уравнений вида

$$K_{b_i,s}^{1,+}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C_{is}^1,C_{i(s+1)}^1,...,C_{i(n-1)}^1]_{x=x_i^0}=K_{b_{i+1},s}^{1,-}[p_i^2(x),q_i^2(x),f_i^2(x),C_{is}^2,C_{i(s+1)}^2....,C_{i(n-1)}^2]_{x=x_i^0},$$

$$s=\overline{0,(n-1)},\ i=1,2.\qquad (3)$$

**Следствие 1.** Решения уравнения (1), выражаемые формулой (2) подчиняются следующим характеристическим равенствам:

$$[(x-b_1)^{p_1^1(b_1+0)}\overset{s}{A}_{(b)}y]_{x=b_1+0}=C_{1s}^1\ ,\ s=\overline{0,(n-1)};\qquad (4)$$

$$[(b_2-x)^{-p_1^2(b_2-0)}\overset{s}{A}_{(b)}y]_{x=b_2-0}=(-1)^sC_{1s}^2\ ,\ s=\overline{0,(n-1)};\qquad (5)$$

$$[(x-b_2)^{p_2^1(b_2+0)}\overset{s}{A}_{(b)}y]_{x=b_2+0}=C_{2s}^1\ ,\ s=\overline{0,(n-1)};\qquad (6)$$

$$[(b_3-x)^{-p_2^2(b_3-0)}\overset{s}{A}_{(b)}y]_{x=b_3-0}=(-1)^sC_{2s}^2\ ,\ s=\overline{0,(n-1)}.\qquad (7)$$

Эти равенства назовём формулами обращения представления (2), они дают возможность по известному решению уравнения (1) соответствующие ему постоянные найти однозначно. Действительно, взяв две группы из равенств (4)-(7), одно относящееся к $\Gamma_1$, другое к $\Gamma_2$, однозначно находим две группы произвольных постоянных, по одному относящиеся к этим интервалам, далее подставляя их в соответствующую из систем (3), находим однозначно другие группы постоянных, относящихся к указанным интервалам.

Используя представление (2) и его формулы обращения можно исследовать задачу типа линейного сопряжения для уравнения (1) в следующей постановке:

**Задача 1.** Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям сопряжения:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj}[(x-b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(b)}^j y]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)}[(b_2-x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(b)}^j y]_{x=b_2-0} +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)}[(x-b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(b)}^j y]_{x=b_2+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)}[(b_3-x)^{-p_2^2(b_3-0)} A_{(b)}^j y]_{x=b_3-0} = \varepsilon_k\,, k=\overline{1,2n}, \quad (8)$$

где $b_{kj}$ и $\varepsilon_k, k=\overline{1,2n}$ , $j=\overline{0,(n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи 1 действуем по следующей схеме. Представление (2) подставим в условия (8) и, применяя характеристические равенства (4) - (7) приходим к следующей системе $2n$ линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} C_{1j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)}(-1)^j C_{1j}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} C_{2j}^1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)}(-1)^j C_{2j}^2 = \varepsilon_k\,,\ k=\overline{1,2n}, \quad (9)$$

с $4n$ неизвестными $C_{ij}^1, C_{ij}^2$ , $j=\overline{0,(n-1)},\ i=1,2$.

К полученной системе уравнений присоединим треугольные системы алгебраических уравнений (3). Из последних систем две группы из неизвестных $C_{ij}^1, C_{ij}^2$ , $j=\overline{0,(n-1)},\ i=1,2$, относящихся по одному к промежуткам $\Gamma_i, i=1,2$, выразим однозначно при помощи других соответствующих групп. Далее, полученный результат подставляем в систему (9), преобразуем ее к системе $2n$ уравнений относительно двух групп, состоящих всего из $2n$ неизвестных $C_{ij}^1, C_{ij}^2$ , $j=\overline{0,(n-1)}, i=1,2$ (всего можно рассмотреть четыре случая). Поставляя соответствующие условия, обеспечим определенность полученной системы, решаем ее, после полученный результат подставляем в системы (3) и находим значение всех остальных $2n$ неизвестных. Таким образом, находятся однозначно все неизвестные входящие в систему (9), поставляя значение которых в формулу (2) находим решение задачи 1.

Продолжим обсуждение в конкретном случае $n=2$. В этом случае система (9) принимает вид

$$b_{k0}C_{10}^1 + b_{k1}C_{11}^1 + b_{k2}C_{10}^2 - b_{k3}C_{11}^2 + b_{k4}C_{20}^1 + b_{k5}C_{21}^1 + b_{k6}C_{20}^2 - b_{k7}C_{21}^2 = \varepsilon_k\,,\quad k=\overline{1,4}, \quad (10)$$

а системы (3) записываются в виде

$$\begin{cases} d_i(\mu_i + C_{i0}^1 + k_i C_{i1}^1) = e_i(\lambda_i + C_{i0}^2 + r_i C_{i1}^2) \\ d_i(\nu_i + C_{i1}^1) = e_i(\eta_i - C_{i1}^2) \end{cases},\ i=1,2\,, \quad (11)$$

где $$d_i \equiv d_i(x_i^0) = (x_i^0 - b_i)^{-p_i^1(b_i+0)} \exp[-w_{p_i^1,b_i}^{1,+}(x_i^0)],$$

$$e_i \equiv e_i(x_i^0) = (b_{i+1} - x_i^0)^{p_i^2(b_{i+1}-0)} \exp[-w_{p_i^2,b_{i+1}}^{1,-}(x_i^0)]\,,$$

$$k_i \equiv k_i(x_i^0) = x_i^0 - b_i,\ r_i \equiv r_i(x_i^0) = b_{i+1} - x_i^0,\ d_i, e_i,\ k_i,\ r_i > 0\ ,$$

$$\mu_i \equiv \mu_i(x_i^0) = \int_{b_i}^{x_i^0} \left[(1+x_i^0-\xi)q_i^1(\xi) + (x_i^0-\xi) f_i^1(\xi)\right](\xi-b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1} \exp[w_{p_i^1,b_i}^{1,+}(\xi)]d\xi\,,$$

$$\lambda_i \equiv \lambda_i(x_i^0) = -\int_{x_i^0}^{b_{i+1}} \left[(1+x_i^0-\xi)q_i^2(\xi) + (x_i^0-\xi) f_i^2(\xi)\right](b_{i+1}-\xi)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp[w_{p_i^2,b_{i+1}}^{1,-}(\xi)]d\xi\,,$$

$$\nu_i \equiv \nu_i(x_i^0) = \int_{b_i}^{x_i^0} \left[q_i^1(\xi) + f_i^1(\xi)\right](\xi-b_i)^{p_i^1(b_i+0)-1} \exp[w_{p_i^1,b_i}^{1,+}(\xi)]d\xi\,,$$

$$\eta_i \equiv \eta_i(x_i^0) = -\int_{x_i^0}^{b_{i+1}} \left[q_i^2(\xi) + f_i^2(\xi)\right](b_{i+1}-\xi)^{-p_i^2(b_{i+1}-0)-1} \exp[w_{p_i^2,b_{i+1}}^{1,-}(\xi)]d\xi$$ известные числа.

Рассмотрим случай, когда из системы (11) неизвестные $C_{ij}^2$ выражаются при помощи неизвестных $C_{ij}^1$, $i=1,2$, $j=0,1$, то есть

$$\begin{cases} C_{i0}^2 = \dfrac{d_i}{e_i}[C_{i0}^1 + (k_i + r_i)C_{i1}^1] + A_i,\ C_{i1}^2 = -\dfrac{d_i}{e_i}C_{i1}^1 + \overline{A_i}\ , \quad i = 1,2. \end{cases} \tag{12}$$

где $A_i = \dfrac{d_i}{e_i}(\mu_i + r_i\nu_i) - r_i\eta_i - \lambda_i$, $\overline{A}_i = \eta_i - \dfrac{d_i}{e_i}\nu_i$. В системе (10) неизвестные $C_{i0}^2$, $C_{i1}^2$ заменяем

их выражениями через неизвестные $C_{i0}^1$, $C_{i1}^1$, $i = 1,2$ при помощи равенств (11), в полученном

результате произведем некоторые преобразования и приходим к следующей алгебраической системе относительно неизвестных $C_{i0}^1$, $C_{i1}^1$, $i = 1,2$:

$$m_{k0}^1 C_{10}^1 + m_{k1}^1 C_{11}^1 + n_{k0}^1 C_{20}^1 + n_{k1}^1 C_{21}^1 = l_k^1,\ k = \overline{1,4}, \tag{13}$$

где

$m_{k0}^1 = b_{k0} + b_{k2}\dfrac{d_1}{e_1}$, $m_{k1}^1 = b_{k1} + \dfrac{d_1}{e_1}[b_{k2}(k_1 + r_1) + b_{k3}]$, $n_{k0}^1 = b_{k4} + b_{k6}\dfrac{d_2}{e_2}$,

$n_{k1}^1 = b_{k5} + \dfrac{d_2}{e_2}[b_{k6}(k_2 + r_2) + b_{k7}]$, $l_k^1 = \varepsilon_k - b_{k2}A_1 + b_{k3}\overline{A_1} - b_{k6}A_2 + b_{k7}\overline{A_2}$ - известные вещественные числа.

Пусть в условиях (8) числа $b_{kj}$ и $\varepsilon_k$, $k = \overline{1,4}$, $j = \overline{0,7}$ такие, что детерминант

$$\begin{vmatrix} m_{10}^1 & m_{11}^1 & n_{10}^1 & n_{11}^1 \\ m_{20}^1 & m_{21}^1 & n_{20}^1 & n_{21}^1 \\ m_{30}^1 & m_{31}^1 & n_{30}^1 & n_{31}^1 \\ m_{40}^1 & m_{41}^1 & n_{40}^1 & n_{41}^1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} m_{k0}^1 & m_{k1}^1 & n_{k0}^1 & n_{k1}^1 \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix} = \Delta_{11}$$

отличен от нуля. Тогда единственное решение алгебраической системы (13), дается равенствами

$$C_{i0}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}},\ C_{i1}^1 = \frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}},\ i = 1,2, \tag{14}$$

где $\Delta_{11}^{ij}$ - есть детерминант, который получается из основного детерминанта $\Delta_{11}$, если вместо столбца, соответствующего неизвестному $C_{ij}^1$, $i = 1,2$, $j = 0,1$ поставить столбец правой части системы (13). Полученное значение неизвестных $C_{ij}^1$ из равенств (14) подставляя в соответствующую систему (12) определим значение неизвестных $C_{ij}^2$, $i = 1,2$, $j = 0,1$ следующим образом:

$$C_{i0}^2 = \frac{d_i}{e_i}\frac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}} + (k_i + r_i)\frac{d_i}{e_i}\frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + A_i\ ,\ C_{i1}^2 = -\frac{d_i}{e_i}\frac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + \overline{A}_i\ ,\ i = 1,2, \tag{15}$$

Таким образом, все неизвестные, входящие в систему (10) однозначно найдены. Их значение из равенств (14) и (15) подставляя в формулу общего решения уравнения (1), то есть формулу (2), выделим решение, удовлетворяющее условиям сопряжения (8) при $n = 2$, которое имеет вид:

$$y_1(x) = \begin{cases} K_{b_i}^{1,+}[p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), \dfrac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}}, \dfrac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}}] \ \ при\ \ x \in \Gamma_i^1 \\ K_{b_{i+1}}^{1,-}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), \dfrac{d_i}{e_i}\dfrac{\Delta_{11}^{i0}}{\Delta_{11}} + (k_i + r_i)\dfrac{d_i}{e_i}\dfrac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + A_i, -\dfrac{d_i}{e_i}\dfrac{\Delta_{11}^{i1}}{\Delta_{11}} + \overline{A}_i],\ i = 1,2. \\ при\ x \in \Gamma_i^2 \end{cases} \tag{16}$$

Докажем единственность полученного решения. Для этого допустим существование другого решения $y_2(x)$ задачи. Тогда их разность $\nu(x) = y_1(x) - y_2(x)$ в силу легко проверяемых тождеств

$A_{(b)}y_1 - A_{(b)}y_2 = B_{(b)}\nu$ , $A^2_{(b)}y_1 - A^2_{(b)}y_2 = B^2_{(b)}\nu$ , где $B_{(b)}\nu \equiv \nu' + \dfrac{p(x)}{\prod_{i=1}^{3}|x-b_i|}\nu$ , будет решением следующей задачи типа линейного сопряжения

$$\sum_{j=0}^{1} b_{kj}[(x-b_1)^{p_1^1(b_1+0)} B^j_{(b)}\nu]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{1} b_{k(n+j)}[(b_2-x)^{-p_1^2(b_2-0)} B^j_{(b)}\nu]_{x=b_2-0} +$$

$$+\sum_{j=0}^{1} b_{k(2n+j)}[(x-b_2)^{p_2^1(b_2+0)} B^j_{(b)}\nu]_{x=b_2+0} + \sum_{j=0}^{1} b_{k(3n+j)}[(b_3-x)^{-p_2^2(b_3-0)} B^j_{(b)}\nu]_{x=b_3-0} = 0,\ k=\overline{1,4} \qquad (17)$$

для уравнения

$$B^2_{(b)}\nu = 0\ . \qquad (18)$$

Покажем, что при условии $\Delta_{11} \neq 0$ такая функция тождественно равна нулю.

Уравнение (18) получается из уравнения (1) при $q(x) = f(x) \equiv 0$ и поэтому, его общее решение на основании представления (2) будет выражаться формулой

$$\nu(x) = \begin{cases} K^{1,+}_{b_i}[0,0,0,C^1_{i0},C^1_{i1}] \ \ при \ \ x \in \Gamma^1_i \\ K^{1,-}_{b_{i+1}}[0,0,0,C^2_{i0},C^2_{i1}] \ \ при \ \ x \in \Gamma^2_i \end{cases},\ i=1,2\ . \qquad (19)$$

Для оператора $B_{(b)}$ от этой функции на основании представления (2) имеем формулу

$$B_{(b)}\nu = \begin{cases} K^{1,+}_{b_i,s}[0,0,0,C^1_{i1}] \ \ при \ \ x \in \Gamma^1_i \\ K^{1,-}_{b_{i+1},s}[0,0,0,C^2_{i1}] \ \ при \ \ x \in \Gamma^2_i \end{cases},\ i=1,2\,. \qquad (20)$$

Используя формулы (19) и (20) находим решение уравнения (18), подчиняющегося условиям (17). Условия (17) являются частным случаем условий (8) и получаются из них при замене выражения $A_{(b)}$ на $B_{(b)}$, а правую часть нулем. Значит при решении задачи (18), (17) мы приходим к системе вида (13). Выясним, какой будет эта система. Для этого находим постоянные, входящие в неё и зависящие от точки $x^0_i$ с помощью вышеприведенных формул. При этом $d_i, e_i$, $k_i$, $r_i$ остаются неизменными, а $\mu_i = 0$, $\lambda_i = 0$, $\nu_i = 0$, $\eta_i = 0$, в силу чего будет $A_i = \overline{A_i} = B_i = \overline{B_i} = 0$. Из этого следует, что левая часть искомой системы будет как в системе (13), а правая часть будет нулевым. То есть для задачи (18), (17), мы получаем однородную линейную алгебраическую систему, соответствующую системе (13). Из этой системы однозначно находим $C^1_{i0} = 0$ , $C^1_{i1} = 0$ , $i = 1,2$ , используя это и учитывая $A_i = \overline{A_i} = B_i = \overline{B_i} = 0$ , из равенств (12) получим $C^2_{i0} = 0$ , $C^2_{i1} = 0$ , $i = 1,2$ . Теперь, подставляя полученное значение всех произвольных постоянных в формулу (19), находим решение задачи (18), (17) в виде $\nu(x) \equiv 0$. Из этого следует, что $y_1(x) \equiv y_2(x)$, то есть задача 1 при $n = 2$ в случае $\Delta_{11} \neq 0$ , кроме $y_1(x)$ других решений не имеет.

Доказано следующее утверждение:

**Теорема 2.** Пусть в уравнении (1) $n = 2$ и выполняются условия теоремы 1. В условиях сопряжения (8) числа $b_{kj}$ , $\varepsilon_k$ , $k = \overline{1,4}$ , $j = \overline{0,7}$ такие, что детерминант $\Delta_{11}$ не равен нулю. Тогда, задача 1 имеет единственное решение, которое выражается формулой (16).

**Замечание 1.** Аналогичные результаты получены и в случаях, когда детерминант

$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} m^1_{k0} \ m^1_{k1} \ n^2_{k0} \ n^2_{k1} \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix}$, $\Delta_{21} = \begin{vmatrix} m^2_{k0} \ m^2_{k1} \ n^1_{k0} \ n^1_{k1} \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix}$ или $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} m^2_{k0} \ m^2_{k1} \ n^2_{k0} \ n^2_{k1} \\ k = \overline{1,4} \end{vmatrix}$ не равен нулю, где

$n^2_{k0} = b_{k4}\dfrac{e_2}{d_2} + b_{k6}$ , $n^2_{k1} = \dfrac{e_2}{d_2}\left[b_{k4}(k_2+r_2) - b_{k5}\right] - b_{k7}$ , $m^2_{k0} = b_{k0}\dfrac{e_1}{d_1} + b_{k2}$ , $m^2_{k1} = \dfrac{e_1}{d_1}\left[b_{k0}(k_1+r_1) - b_{k1}\right] - b_{k3}$ - известные числа.

ЛИТЕРАТУРА


1. Риман Б. Сочинения, пер. с нем./ Б.Риман.- М.-Л., 1948. - С. 176-182.
2. Hilbert D. Grundziiqe einer allqmeinen Theorie der linearen Inteqralqleichunqen, 2 Aufl./ D.Hilbert.- Lpz.-B., 1924.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения/ Н.И.Мусхелишвили.- М.: Наука,1968. - 512с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи/ Ф.Д. Гахов. - М.: Наука, 1977. - 640с.
5. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Л.Г.Михайлов.- Душанбе, 1963.- 183с.
6. Раджабов Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной и супер сингулярной точкой/ Н. Раджабов // Докл. АН Республики Таджикистан. - 1999. - Т. XLII. - № 4. - С. 31 - 34.
7. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order ordinary sistem of linear differential equations with singular or super-singular coefficients/ N.Rajabov// Partial differential and Integral equations: proceedings of the Second ISAAC Congress. - London: Kluwer Academic Publishers, 2000. - Vol. I. - Pp.175-183.
8. Раджабов Н. Задачи типа линейного сопряжения для модельной системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной внутренней сингулярной точкой / Н.Раджабов, О.И. Меликов // Вестник Таджикского Государственного Национального Университета. - Душанбе, 2004, №1(48). - С. 102-108.
9. Кадиров Г.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с одной внутренней сверх сингулярной точкой/ Г.М. Кадиров, Н. Раджабов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100 - летию со дня рождения академика И.Н. Векуа. - Новосибирск, 2007. - С. 171-172.
10. Раджабов Н. Интегральные представления и задачи типа линейного сопряжения для модельной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной внутренней сверхсингулярной точкой/ Н.Раджабов, О.И. Меликов // Вестник Таджикского Государственного Национального Университета. - Душанбе, 2008, №1(48). - С. 19 - 31.
11. Усмонов Н. Задача линейного сопряжения решений системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с аналитическими функциями в сингулярном случае/Н. Усмонов, А. Мансуров// Вестник Таджикского технического университета.- Душанбе.- 2012.-№3(19).-С.4-6.
12. Дадоджонова М.Ё. Интегральное представление решений и задача типа линейного сопряжения для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сингулярной точкой/ М.Ё.Дадоджонова, А.Г.Олимов //Вестник педагогического университета. Издание Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни.- Душанбе.- 2014.- №5(60).- С. 23-28.
13. Дадоджонова М.Я. Интегральное представление задачи Коши-Рикье и типов линейного сопряжения для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сверхсингулярной точкой / М.Я.Дадоджонова, А.Г.Олимов// Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Сино. - 2016. - 1/1(192). - С. 88 - 93.
14. Олими А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задачи типов Коши и линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой/ А.Г. Олими// Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Сино. - 2021. - №1. - С.60 - 77.
15. Олими А.Г. Формула представления общего решения и граничные задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с внутренней сингулярной точкой/ А.Г. Олими // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б.Г.Гафурова. Естественные и экономические науки.- Худжанд: Нури маърифат.- 2021.- №4 (59). - С.13-19.
16. Джангибеков Г. Задача линейного сопряжения решений обобщенной системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами/ Г. Джангибеков, Э.Д.Бобоев// Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Сино. - 2021. - №4. - С.54 - 64.
17. Раджабов Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с тремя внутренними сингулярными точками/ Н.Раджабов, Е.Шишкина // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложения». - Худжанд, 2003. - С. 119-122.
18. Олими А.Г. Интегральное представление общего решения и граничные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя слабо сингулярными точками/ А.Г.Олими,

Н.К.Охунов// Уфимская осенняя математическая школа: Материалы международной научной конференции. Том 1. - Уфа: Аэтерна, 2021.- С.205-207.

19. Охунов Н.К. Задача типа линейного сопряжения для обыкновенного операторно-дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками/ Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященной 70 - летию со дня рождения академика НАН РТ Шабозова М. (Душанбе 25-26.06.2022).-Душанбе: ООО Эр-граф.-2022.- С.292-296.
20. Олими А.Г. Общее представление решений и задачи Коши-Рикье для одного операторно-дифференциального уравнения с тремя сингулярными точками/ А.Г.Олими, Н.К. Охунов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 28 сентября - 1 октября 2022 г.). Том 2 /отв. ред. З.Ю.Фазуллин. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. - С. 216-218.

LITERATURE

1. Riemann B. Essays, translated from German/ B.Riemann.- M.-L., 1948. - Pp. 176-182.
2. Hilbert D. Grundziiqe einer allqmeinen Theorie der linearen Inteqralqleichunqen, 2 Aufl./ D.Hilbert.- Lpz.-B., 1924.
3. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations/ N.I.Muskhelishvili.- M.: Nauka, 1968. - 512p.
4. Gakhov F.D. Boundary value problems/ F.D. Gakhov. - M.: Nauka, 1977. - 640p.
5. Mikhailov L.G. A new class of special integral equations and its applications to differential equations with singular coefficients/ L.G.Mikhailov. - Dushanbe, 1963. -183p.
6. Rajabov N. Linear conjugation types problems a linear differential equation of invasion with one singular and super singular point / N. Rajabov / / Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 1999. - Vol. XLII. - No. 4. - Pp. 31-34.
7. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order ordinary sistem of linear differential equations with singular or super-singular coefficients/ N.Rajabov// Partial differential and Integral equations: proceedings of the Second ISAAC Congress. – London: Kluwer Academic Publishers, 2000. - Vol. I. - Pp.175-183.
8. Rajabov N. Linear conjugation type problems for a model system of two linear ordinary differential equations of the first order with one internal singular point / N.Rajabov, O.I. Melikov // Bulletin of the Tajik State National University. - Dushanbe. - 2004. - No.1(48). - Pp. 102-108.
9. Kadirov G.M. Second order ordinary differential equation with one inside over a singular super - singular point / G. M. Kadirov, N. Rajabov // Materials of the international scientific conference "Differential equations, function theory and applications", devoted to the 100 anniversary since the birth of academician I. N. Vekua. - Novosibirsk, 2007. - p. 171-172.
10. Rajabov N. Integral representations and linear conjugation type problems for a model system of linear ordinary differential equations of the first order with one internal supersingular point/ N.Rajabov, O.I. Melikov // Bulletin of the Tajik State National University. - Dushanbe. - 2008. - No.1(48). - Pp. 19-31.
11. Usmanov N. The problem of linear conjugation of solutions of a system of first-order elliptic differential equations with analytical functions in the singular case/N. Usmanov, A. Mansurov// Bulletin of the Tajik Technical University.- Dushanbe.- 2012.- No.3(19).- Pp.4-6.
12. Dadojonova M.E. Integral representation of solutions and a linear conjugation type problem for a single equation obtained by iterating an ordinary first-order differential operator with an internal singular point/ M.E.Dadojonova, A.G.Olimov //Bulletin of the Pedagogical University. Publication of the Tajik State Pedagogical University named after Sadriddin Aini.- Dushanbe.- 2014.- No. 5(60).- Pp. 23-28.
13. Dadojonova M. Ya. Integral representation of the Cauchy- Ryke and linear conjugation types problem for one equation obtained by iterating an ordinary first-order differential operator with an internal supersingular point / M. Ya. Dadojonova, A. G. Olimov// Bulletin of the Tajik National University. Natural Sciences Series. - Dushanbe: Sino. - 2016. - 1/1(192). - Pp. 88-93.
14. Olimi A.G. Representation of the general solution in integral form and the Cauchy and linear conjugation types problems for a third-order linear ordinary differential equation with a supersingular point/ A.G. Olimi// Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences. - Dushanbe: Sino. - 2021. - No. 1. - Pp. 60-77.
15. Olimi A.G. The formula for representing the general solution and boundary value problems for a system of linear ordinary differential equations of the second order with an internal singular point/ A.G. Olimi // Scientific notes of the Khujand State University named after Academician B. Gafurov. Series: Natural and Economic Sciences.- Khujand: Nuri marifat, 2021.- No.4 (59).- Pp.13-19.

16. Dzhangibekov G. The problem of linear conjugation of solutions of the generalized Cauchy-Riemann system with singular coefficients/ G. Dzhangibekov, E.D.Boboev// Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. - Dushanbe: Sino. - 2021. - No. 4. - Pp.54-64.
17. Rajabov N. Linear conjugation type problems for linear ordinary differential equations of first order with three internal singular point/ N. Rajabov, E. Shishkina // Materials of the international scientific conference "Actual problems of mathematics and its applications". - Khujand, 2003. - Pp. 119-122.
18. Olimi A.G. Integral representation of a general solution and boundary value problems for an ordinary differential equation of a special type with three weakly singular points/ A.G.Olimi, N.K.Okhunov// Ufa Autumn Mathematical school: Materials of an international scientific conference. Volume 1. - Ufa: Aeterna, 2021.- Pp. 205-207.
19. Okhunov N.K. Linear conjugation type problem for an ordinary operator differential equation with three weakly singular points/ N.K. Okhunov // Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematical analysis and theory of functions" dedicated to the 70th anniversary of the birth of Academician M. Shabozov NAS RT (Dushanbe 25-26.06.2022).- Dushanbe: LLC Er-graf.-2022.- Pp.292-296.
20. Olimi A.G. General representation of solutions and the Cauchy-Riquier problem for one operator-differential equation with three singular points/ A.G.Olimi, N.K. Okhunov // Proceedings of the international scientific conference "Ufa Autumn Mathematical School" (Ufa, September 28 - October 1, 2022). Volume 2 /ed. by Z.Y.Fazullin. - Ufa: EPC Bashgu, 2022. - Pp. 216-218.