1. ИЛМҲОИ ТАБИАТШИНОСӢ
1. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
1. THE NATURAL SCIENCES

1.1. МАТЕМАТИКА ВА МЕХАНИКА
1.1. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
1.1.MATHEMATICS AND MECHANICS

1.1.2.Муодилаҳои дифференсиалӣ ва физикаи математикӣ
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
1.1.2.Differential equations and mathematical physics

УДК 517.9
ББК 22.161.1

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

Байзаев Саттор *– доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики. (Республика Таджикистан, Худжанд).*
Баротов Рузибой Нумонжонович *– докторант (PhD) кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова, ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд), e-mail: ruzmet.tj@mail.ru.*

БАҲОҲОИ АПРИОРӢ БАРОИ ОПЕРАТОРҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ДУЮМ ДАР ФАЗОИ ГЁЛДЕР

Байзаев Саттор *– доктори илмҳои физика-математика, профессори кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосир, Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон. (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд)*
Баротов Рӯзибой Нӯмонҷонович *– докторанти (PhD) кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: ruzmet.tj@mail.ru.*

A PRIORI ESTIMATES FOR SECOND-ORDER ELLIPTIC OPERATORS IN HOLDER SPACES

Baizaev Sattor *- Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science, Tajik State University of Law, Business and Politics (Tajikistan Republic, Khujand).*
Barotov Ruziboy Numonjonovich *- Doctoral Student (PhD) of the Mathematical Analysis Department named after Professor A. Muksinov under Khujand State University named after academician B.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: ruzmet.tj@mail.ru.*

Ключевые слова: *эллиптический оператор, пространства Гёльдера, априорные оценки.*

В работе рассматривается эллиптический оператор, главной частью которого является оператор Бицадзе, а младший член состоит из произведения матрицы-функции на сопряжение вектор-функции. Оператор изучается в банаховом пространстве вектор-функций, ограниченных и равномерно непрерывных по Гёльдеру во всей комплексной плоскости. Оказывается, что оператор в указанном пространстве может быть не нётеровым, приведен пример оператора, имеющий бесконечномерное ядро. Для случая слабо осциллирующих на бесконечности коэффициентов найдены условия при которых имеет место априорная оценка. Эти условия выписываются на языке спектра предельных матриц, образуемых по частичным пределам матрицы коэффициентов на бесконечности.

Вожаҳои калидӣ: *оператори эллиптикӣ, фазоҳои Гёлдерӣ, баҳодиҳиҳои априорӣ.*

Дар мақола оператори эллиптикӣ муоина мешавад, ки қисми асосии он оператори Битсадзе буда, аъзои хурд аз ҳосили зарби матритса-функсия ба вектор-функсияи ҳамроҳшуда иборат аст. Оператор дар фазои банахи вектор-функсияҳои дар тамоми ҳамвории комплексӣ маҳдуд ва ба таври Гёлдерӣ мунтазам бефосила омӯхта мешавад. Ин оператор дар фазои мазкур нётерӣ нашуданаш мумкин аст. Мисоли чунин оператор бо ядрои беохирченака оварда шудааст. Барои ҳолати коэффитсиентҳо бо лаппиши суст дар беохирӣ шартҳои ҷой доштани баҳои априорӣ ёфта шудаанд. Ин шартҳо аз рӯи спектри матритсаҳои ҳудудӣ, ки тавассути ҳудудҳои хусусии матритсаи коэффитсиентҳо дар беохирӣ сохта шудаанд, тасвир мегарданд.

Key words: *elliptic operator, Holder spaces, a priori estimates.*

The paper considers an elliptic operator, the main part of which is the Bitsadze operator, and the junior term consists of the product of a given matrix function by the conjugation of a vector function. The operator is studied in the Banach space of vector functions bounded and uniformly continuous by Helder in the entire complex plane. It turns out that the operator in the specified space may not be Noetherian, an example of an operator with infinite-dimensional kernel is given. For the case of coefficients weakly oscillating at infinity, conditions are found, written out in the language of the spectrum of limit matrices formed by partial limits of the matrix of coefficients at infinity, at which an a priori estimate takes place.

В работе рассматриваются эллиптические операторы вида

$$Lw = w_{\bar{z}\bar{z}} + A(z)\bar{w}, \#(1)$$

где $w \in C^n$, $A(z) - n \times n$-матрица-функция. В 1948 году А.В. Бицадзе (см. [1, 2] установлено, что задача Дирихле для системы $w_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ не является нётеровой. Оказывается, что ядро операторов вида (1) в гёльдеровых пространствах вектор-функций C_α (см. ниже) может быть бесконечномерным [3]. Примером может быть оператор L с $A = E -$ единичная $n \times n$-матрица. Вектор-функции

$$w = cv + \bar{c}e^{2i\gamma}\bar{v},$$

где $v = \exp\{2iRe(e^{i\gamma}z)\}$, $\gamma \in [0, 2\pi)$, $c \in C^n$, принадлежат ядру этого оператора.

Вообще справедлива

Теорема 1. *Пусть матрица A постоянная и спектр матрицы $A\bar{A}$ не пересекается с полуосью $R_+ = [0, +\infty)$. Тогда однородная система $Lw = 0$ в пространстве Шварца S' имеет только нулевое решение.*

В условиях этой теоремы ядро оператора $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является нулевым. Для исследования операторов вида (1) в гёльдеровых пространствах используются ряд априорных оценок, которым посвящается настоящая статья.

Гёльдеровые пространства определяются следующим образом [4]:

$C_\alpha -$ банахово пространство вектор-функций $w(z)$, ограниченных на C и равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$ с нормой

$$\|w\|_\alpha = \|w\|_0 + \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} \|w(z_1) - w(z_2)\|, \#(3)$$

здесь $\|w\|_0 = \sup_z \|w(z)\|$, $\|\cdot\| -$ норма в C^n;

$C^1_\alpha -$ банахово пространство вектор-функций $w(z)$ таких, что w, $w_{\bar z}$, $w_z \in C_\alpha$ с нормой

$$\|w\|_{\alpha,1} = \|w\|_\alpha + \|w_{\bar z}\|_\alpha + \|w_z\|_\alpha. \#(4)$$

Аналогично определяется банахово пространство C^2_α с нормой

$$\|w\|_{\alpha,2} = \|w\|_{\alpha,1} + \|w_{\bar z}\|_{\alpha,1} + \|w_z\|_{\alpha,1}. \#(5)$$

$C(D_{r,z_0}) -$ банахово пространство вектор-функций $w(z)$, определенных и непрерывных в круге $D_{r,z_0} = \{z: |z - z_0| \le r\}$ с нормой

$\|w\|_{C(D_{r,z_0})} = \sup\limits_z \|w(z)\|$;

$C_\alpha(D_{r,z_0}) -$ банахово пространство вектор-функций $w(z)$, определенных в круге D_{r,z_0} и непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0,1)$ с нормой аналогичной (3).

Таким же образом определяются банаховы пространства $C^1_\alpha(D_{r,z_0})$ и $C^2_\alpha(D_{r,z_0})$ с нормами $\|w\|_{C^1_\alpha(D_{r,z_0})}$ и $\|w\|_{C^2_\alpha(D_{r,z_0})}$ аналогичными (4) и (5) соответственно.

Аналогично внутренним оценкам шаудеровского типа для эллиптических уравнений [5, 6], когда столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α, имеет место оценка вида

$$\|w\|_{C^2_\alpha(D_{1,z_0})} \le M\left(\|Lw\|_{C_\alpha(D_{r,z_0})} + \|w\|_{C(D_{r,z_0})}\right), \#(6)$$

где $w \in C^2_\alpha(D_{r,z_0}),\ r > 2$, $M -$ постоянная, не зависящая от w.

Используя эту оценку и теорему Банаха об обратном операторе можно установить справедливость следующей оценки

$$\|w\|_{\alpha,2} \le M_1(\|Lw\|_\alpha + \|w\|_0), \#(7)$$

где $w \in C^2_\alpha,\ M_1 -$ постоянная, не зависящая от w.

Ограниченная функция $a(z)$ называется слабо осциллирующей на бесконечности, если она удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{z\to\infty} \sup_{|\xi - z|<1} \|a(\xi) - a(z)\| = 0.$$

Например, функция $a(z) = sin\sqrt{|z|}$ и функция $a(z) = e^{i\varphi},\ \varphi = \arg z, |z| \ge 1$, непрерывно продолженная при $|z| < 1$, будут слабо осциллирующими на бесконечности. Функции $a(z)$, принадлежащие C_α и слабо осциллирующиеся на бесконечности обладают следующим свойством: последовательность $\{a(z + h_k)\}$, здесь $h_k \to \infty$, имеет подпоследовательность, которая равномерно сходится на каждом круге к некоторой постоянной функции.

В дальнейшем будем считать, что столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат пространству C_α и все его элементы являются слабо осциллирующими на бесконечности. Последовательность $\{A(z + h_k)\},\ h_k \to \infty$ содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом круге к некоторой постоянной матрице $\tilde A$. Выбирая всевозможные последовательности $\{h_k\},\ h_k \to \infty$, получим множество предельных матриц $\tilde A$, которого обозначим символом $H(A)$.

Для операторов вида (1) с выше указанными коэффициентами имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

А) для произвольной вектор-функции $w \in C^2_\alpha$ *имеет место априорная оценка вида*

$$\|w\|_{\alpha,2} \le M\left(\|Lw\|_\alpha + \max_{|t|\le 1}|w(t)|\right), \#(8)$$

где $M -$ *постоянная, независящая от* w;

В) для любой предельной матрицы $\tilde A \in H(A)$ *спектр матрицы* $\tilde A\bar{\tilde A}$ *не пересекается с полуосью* R_+.

Доказательство импликации $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$. Пусть имеет место априорная оценка (8). Тогда для произвольной вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ с компактным носителем и последовательности $\{h_k\}$, $h_k \to \infty$, имеем

$$\left\|S_{-h_k}w\right\|_{\alpha,2} \le M\left(\left\|L\left(S_{-h_k}w\right)\right\|_\alpha + \max_{|t|\le 1}\left|S_{-h_k}w(t)\right|\right),$$

здесь $S_{-h_k}w(z) = w(z-h_k)$ – оператор сдвига, который не меняет норму вектор-функции в гёльдеровых пространствах. Из последней оценки следует

$$\|w\|_{\alpha,2} \le M\left(\left\|S_{h_k}L\left(S_{-h_k}w\right)\right\|_\alpha + \max_{|t|\le 1}\left|S_{-h_k}w(t)\right|\right). \#(9)$$

Так как

$S_{h_k}L\left(S_{-h_k}w\right) = w_{\bar z\bar z}(z) + A(z+h_k)\overline{w(z)}$,

$h_k \to \infty$ и $w(z)$ имеет компактный носитель, то переходя в неравенстве (9) к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\|w\|_{\alpha,2} \le M\left\|\tilde L w\right\|_\alpha. \#(10)$$

Пусть теперь $w(z)$ произвольная вектор-функция из C_α^2, а $\theta(z)$ такая бесконечно дифференцируемая функция, что $\theta(z) = 1$ при $|z| \le 1$, $\theta(z) = 0$ при $|z| \ge 2$ и $0 \le \theta(z) \le 1$ $\forall z \in C$. Тогда вектор-функция $\theta_k(z)w(z)$, здесь $\theta_k(z) = \theta\left(\frac{z}{k}\right)$, будет принадлежать C_α^2 и имеет компактный носитель, поэтому из (10) следует

$$\|\theta_k w\|_{\alpha,2} \le M\left\|\tilde L(\theta_k w)\right\|_\alpha. \#(11)$$

Далее учитывая соотношения

$$\tilde L(\theta_k w) = \theta_k w_{\bar z\bar z} + 2(\partial_{\bar z}\theta_k)w_{\bar z} + (\partial_{\overline{zz}}\theta_k)w + \theta_k\tilde A\bar w,$$

$$\partial_{\bar z}\theta_k = \frac{1}{k}\theta_{\bar z}\left(\frac{z}{k}\right), \quad \partial_{\overline{zz}}\theta_k = \frac{1}{k^2}\theta_{\overline{zz}}\left(\frac{z}{k}\right),$$

из (11) имеем

$$\|\theta_k w\|_{\alpha,2} \le M^*\left(\left\|\tilde L w\right\|_\alpha + \frac{2}{k}\|w_{\bar z}\|_\alpha + \frac{1}{k^2}\|w\|_\alpha\right), \#(12)$$

здесь постоянная M^* не зависит от w.

Нетрудно показать, что левая часть неравенства (12) при $k \to \infty$ стремится к $\|w\|_{\alpha,2}$. Поэтому предельный переход в (12) показывает, что неравенство (10) справедливо для любой вектор-функции $w(z)$ из C_α^2 с постоянной M^*, не зависящей от w. Тогда из (10) получаем, что ядро любого предельного оператора $\tilde L$: $C_\alpha^2 \to C_\alpha$ нулевое и поэтому в силу теоремы 1 спектр матрицы $\tilde A\bar{\tilde A}$ не пересекается с полуосью R_+. Импликация $A \Rightarrow B$ доказана.

Доказательство импликации $\boldsymbol{B \Rightarrow A}$. Доказательство проведем от противного. Если бы априорная оценка (8) не выполнялась, то нашлась бы такая последовательность $\{w_k\}$ из C_α^2 , что $\|w_k\|_{\alpha,2} = 1$ и

$$\|Lw_k\|_\alpha + \max_{|t|\le 1}|w_k(t)| < \frac{1}{k} \quad \forall k \in N. \#(13)$$

Из неравенства (7) имеем

$$\|Lw_k\|_\alpha + \|w_k\|_0 \ge \frac{1}{M_1} \qquad \forall k \in N. \#(14)$$

Так как в силу (13) $\|Lw_k\|_\alpha \to 0$ при $k \to \infty$, то из (14) следует, что $\|w_k\|_0 > \frac{1}{2M_1}$ при достаточно больших k. Поэтому для таких k найдутся точки z_k, что

$$\|w_k(z_k)\| > \frac{1}{2M_1}. \#(15)$$

Возможны два случая: 1) последовательность $\{z_k\}$ ограниченная; 2) последовательность $\{z_k\}$ неограниченная.

Случай 1. В этом случае можно считать, что последовательность $\{z_k\}$ сходится к некоторой точке z_0.

Общее решение неоднородного уравнения $w_{\bar{z}\bar{z}} = f(z)$ имеет вид

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) - T_R(\bar{z}f) + \bar{z}T_R(f),$$

где $T_R -$ оператор Векуа (см. [7]) по кругу $|z| < R,\ \varphi(z), \psi(z) -$ произвольные аналитические функции. Учитывая это, функции $w_k(z)$ представим в виде

$$w_k(z) = \varphi_k(z) + \bar{z}\psi_k(z) - T_R(\bar{z}f_k) + \bar{z}T_R(f_k), \#(16)$$

здесь $R -$ произвольное, φ_k и ψ_k аналитические функции, $f_k = Lw_k - A\overline{w}_k$. Отсюда согласно свойствам оператора T_R имеем

$$\frac{\partial w_k}{\partial \bar{z}} = \psi_k(z) - T_R(f_k). \#(17)$$

Так как $\|w_k\|_{\alpha,2} = 1$, то привлекая теорему Арцеля без ограничения общности можно считать, что последовательности $w_k, \frac{\partial w_k}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial^2 w_k}{\partial \bar{z}^2}$ равномерно сходятся на каждом круге. Тогда из (17) следует, что последовательность ψ_k на круге $|z| \le r,\ r < R$, будет равномерно сходящимся и из (16) заключаем, что это свойство сохраняется и для последовательности φ_k.

Пусть w, φ, ψ пределы последовательностей $\{w_k\}, \{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ соответственно. Переходя в (16) к пределу, получим

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + T_R(\bar{z}A\overline{w}) - \bar{z}T_R(A\overline{w}), \qquad |z| \le r.$$

Отсюда

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = -A\overline{w},$$

причем в силу произвольности R это соотношение выполняется при всех z.

Таким образом, $Lw = 0$ и в силу (13) $w(z) \equiv 0$ при $|z| < 1$. Поэтому учитывая эллиптичность оператора L, имеем $w(z) \equiv 0$, $z \in C$. Но, из (15) следует, что $w(z_0) \neq 0$. Получили противоречие.

Случай 2. В этом случае можно считать, что $z_k \to \infty$. Для последовательности $\omega_k(z) = w_k(z + z_k)$ имеем

$$\frac{\partial^2 \omega_k(z)}{\partial \bar{z}^2} + A(z + z_k)\overline{\omega_k(z)} = h_k(z + z_k), \#(18)$$

$$\|\omega_k\|_{\alpha,2} = 1, \qquad \|\omega_k(0)\| > \frac{1}{2M_1}, \#(19)$$

где $h_k(z) = Lw_k(z)$.

Опять привлекая теорему Арцеля без ограничения общности можно считать, что последовательности $\omega_k(z)$ и $A(z + z_k)$ равномерно сходятся на каждом круге к некоторой вектор-функции $\omega(z)$ и матрице $\tilde{A} \in H(A)$ соответственно. Тогда из (18) и (19) путем предельного перехода, получим

$$\omega_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{A}\overline{\omega} = 0,$$

$$|\omega(0)| \ge \frac{1}{M_1}.$$

Отсюда получаем, что предельное уравнение

$$\tilde{L}w \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{A}\overline{w} = 0 \ \#(20)$$

в пространстве C_α^2 имеет ненулевое решение $\omega(z)$. Но, в силу утверждения B) из теоремы 1 следует, что уравнение (20) в пространстве S', тем более в C_α^2, имеет только нулевое решение. Опять пришли к противоречию. Следовательно, справедлива априорная оценка (8). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. Москва. 1959. Итоги науки 2, физ.-мат. науки, С. 67-74.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, – 1981. – 448 с.

3. Байзаев С. О решениях умеренного роста систем, обобщающих уравнение Бицадзе // Материалы межд. научно-прак. конф. «Комплексный анализ и его приложения». Бохтар. 2022. – С. 27 – 28.
4. Байзаев С., Мухамадиев Э. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, №5. – С. 818 – 827.
5. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, – 1966. – 351 с.
6. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. – 576 с.
7. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, – 1988. – 509 с.

REFERENCES

1. Bitsadze A.V. Mixed type equations. Moscow. 1959. Results of science 2, physical and mathematical sciences, pp. 67-74.
2. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations. M.: Nauka, - 1981. – 448 p.
3. Baizaev S. On solutions of moderate growth of systems generalizing the Bitsadze equation // Materials of International scientific and practical. conf. "Complex analysis and its applications". Bokhtar. 2022. – pp. 27 – 28.
4. Baizaev S., Mukhamadiev E. On the index of elliptic operators of the first order on the plane // Differential equations. - 1992. – Vol. 28, No. 5. – pp. 818 – 827.
5. Bers L., John F., Schechter M. Partial differential equations. M.: Mir, - 1966. – 351 p.
6. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. Linear and quasi-linear equations of elliptic type. M.: Nauka, 1973– - 576 p.
7. Vekua I.N. Generalized analytical functions. M.: Nauka, - 1988. – 509 p.