УДК: 517. 927. 21
ББК 22.161.1

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ЗАДАЧИ КОШИ - РИКЬЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ ВНУТРЕННЫМИ СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

Охунов Нозимджон Кобилович *– старший преподаватель кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: okhunov_73@mail.ru*

ТАСВИРИ ИНТЕГРАЛИИ ҲАЛЛИ УМУМӢ ВА МАСЪАЛАҲОИ КОШӢ-РИКЙЕ БАРОИ МУОДИЛАИ ОПЕРАТОРЇ - ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДӢ БО СЕ НУЌТАҲОИ ДОХИЛИИ ДОРОИ СИНГУЛЯРНОКИИ БАЛАНД

Охунов Нозимҷон Ќобилович *- сармуаллими кафедраи анализи математикї ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ѓафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш.Хуҷанд), e–mail: okhunov_73@mail.ru.*

INTEGRAL REPRESENTATION OF THE GENERAL SOLUTION AND THE CAUCHY - RIQUIER PROBLEM FOR AN ORDINARY OPERATOR - DIFFERENTIAL EQUATION WITH THREE INTERNAL SUPERSINGULAR POINTS

Okhunov Nozimjon Kobilovich *- Senior lecturer mathematical analysis Department named after Professor A. Muksinov under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: okhunov_73@mail.ru.*

Ключевые слова: *обыкновенное операторно - дифференциальное уравнение, внутренние сверхсингулярные точки, интегральное представление общего решения, формулы обращения представления, поведение решений, задачи Коши - Рикье.*

В статье рассмотрено операторно - дифференциальное уравнение, полученное n - кратным итерированием линейного обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с тремя внутренними сверхсингулярными точками. Получено интегральное представление общего решения уравнения, зависящее от n - произвольных постоянных. Установлены характеристические равенства для представления, являющиеся для него формулами обращения. С помощью полученного представления изучено поведение решений уравнения в окрестности особых точек. Показано, что все решения уравнения в окрестности особой точки, в зависимости от знака предельного значения определенного коэффициента оператора, стремятся к бесконечности или нулю наподобие экспоненциальной функции. Полученное представление применено для выяснения правильной постановки задач Коши - Рикье с условиями на сверхсингулярных точках и нахождения их решения в явном виде.

Вожаҳои калидӣ: *муодилаи операторӣ - дифференсиалии одӣ, нуқтаҳои дохилии дорои сингулярнокии баланд, тасвири интегралии ҳалли умумӣ, формулаҳои баргардонии тасвир, рафтори ҳалҳо, масъалаҳои Кошӣ-Рикйе.*

Дар мақола муодилаи операторӣ - дифференсиалии дар натиҷаи n - маротиба итеронидани оператори дифференсиалии одии хаттии тартиби якум бо се нуқтаҳои дохилии сингулярнокии баланд ҳосилшуда, омӯхта мешавад. Тасвири интегралии ҳалли умумии муодила *ёфта мешавад, ки аз n - доимиҳои ихтиёрӣ вобаста мебошад. Барои тасвир баробариҳои характеристикӣ ёфта шудаанд, ки барои он формулаи баргардонӣ мебошанд. Бо ёрии тасвири ҳосил кардашуда рафтори ҳалҳои муодила дар атрофи нуқтаҳои махсус омӯхта шудааст. Нишон дода шудааст, ки ҳамаи ҳалҳои муодила дар атрофи нуқтаи махсус, вобаста ба аломати қимати ҳудудии коэффитсиенти муайяни оператор, ҳамчун функсияи экспоненсиалӣ ба беохир ё нол майл мекунанд. Тасвири ҳосил кардашуда дар муайян кардани гузориши дурусти масъалаҳои Кошӣ - Рикйе бо шартҳои дар нуқтаҳои дорои сингулярнокии баланд додашуда ва дар намуди ошкор ёфтани ҳалли онҳо татбиқ карда шудааст.*

Key words: *ordinary operator - differential equation, internal supersingular points, integral representation of the general solution, inversion formulas of the representation, behavior of solutions, Cauchy - Riquier problems.*

The paper studies an operator - differential equation obtained by n - iteration of a linear ordinary differential operator of the first order with three internal super singular points. An integral representation of the general solution of the equation depending on n - arbitrary constants is obtained. The characteristic equalities for the representation, which are the conversion formulas for it, are established. With the help of the obtained representation, the behavior of solutions of the equation in the vicinity of singular points is studied. It is shown that all solutions of the equation in the vicinity of a singular point, depending on the sign of the limit value of a certain coefficient of the operator, tend to infinity or zero like an exponential function. The obtained representation is used to clarify the correct formulation of Cauchy - Riquier problems with conditions on super singular points and to find their solutions explicitly.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого, второго, более высокого порядков и их систем с одной точкой вырождения или сингулярности разного порядка исследованы в многочисленных работах, например, [1] - [8]. В монографии [1] разработан новый способ исследования линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, а также их систем со многими сингулярными точками разного порядка в зависимости от расположения особых точек. В работах [9] - [12], [14], [16] - [20] разработанная в [1] методика применена для изучения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого, второго порядков, а также обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с двумя или тремя особыми точками разного порядка. В этих работах для рассматриваемых уравнений получены формулы представления общего решения, которые применяются для изучения свойств решений, выяснения постановки и решения задач Коши, Коши - Рикье и типа линейного сопряжения.

Обыкновенные дифференциальные уравнения более высоких порядков с многими особыми точками изучены недостаточно. В связи с этим в данной работе изучается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$A^n_{(\alpha),(b)}y = \frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{3}|x-b_i|^{\alpha_i}}, \quad x \in \Gamma_{(b)} \tag{1}$$

где $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$, $\Gamma = (a,b)$, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, $a < b_1 < b_2 < b_3 < b$ - точки промежутка $\overline{\Gamma}$, $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_i > 1$ - действительные числа, n - натуральное число, $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ - известные, $y(x)$ - искомая функция точек множества $\Gamma_{(b)}$, $A_{(\alpha),(b)}y \equiv y' + \frac{p(x)}{\prod_{i=1}^{3}|x-b_i|^{\alpha_i}}y - \frac{q(x)}{\prod_{i=1}^{3}|x-b_i|^{\alpha_i}}$ - обыкновенный дифференциальный оператор, $A^0_{(\alpha),(b)}y \equiv y$, $A^s_{(\alpha),(b)}y = A_{(\alpha),(b)}(A^{s-1}_{(\alpha),(b)}y)$, $s = \overline{1,n}$, а b_i - являются сверхсингулярными (особыми) точками данного уравнения и оператора $A_{(\alpha),(b)}$. Предполагается, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $\overline{\Gamma}$, возможно кроме точек b_i, в которых могут допускать только разрыв первого рода.Понятие решения уравнения (1) вводится так же, как в работах [1], [17] - [19].

Введём обозначения $\Gamma_0=(a,b_1)$, $\Gamma_1=(b_1,b_2)$, $\Gamma_2=(b_2,b_3)$, $\Gamma_3=(b_3,b)$ и представим множество $\Gamma_{(b)}$ как объединение интервалов в виде $\Gamma_{(b)}=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$. Для построения решения уравнения (1) на множестве $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ его рассмотрим одновеременно в обеих интервалах. На интервале Γ_i, $i=1,2$. фиксируем произвольную точку x_i^0 и интервал представим в виде объединения промежутков $\Gamma_i^1=(b_i,\, x_i^0]$, $\Gamma_i^2=[x_i^0,\, b_{i+1})$, $i=1,2$. При рассмотрении уравнения (1) на промежутке Γ_i^1 функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_i доопределим с помощью их правого предельного значения и вводим новые функции равенствами

$$p_i^1(x)=p(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k},\; q_i^1(x)=q(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k},\; f_i^1(x)=f(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k}.$$

В силу условий, поставленных на функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ эти функции будут непрерывными на отрезке $\overline{\Gamma_i^1}$. Тогда уравнение (1) можно рассмотреть как уравнение левая часть которого получена в результате n - кратной итерации дифференциального оператора $y'+\dfrac{p_i^1(x)}{(x-b_i)^{\alpha_i}}\,y-\dfrac{q_i^1(x)}{(x-b_i)^{\alpha_i}}$ с левой граничной сверхсингулярной точкой b_i и с правой частью $\dfrac{f_i^1(x)}{(x-b_i)^{\alpha_i}}$. Предположим, функция $p(x)$ такова, что функция $p_i^1(x)$, определяемая с ее помощью, удовлетворяет условию

$$\left|p_i^1(x)-p_i^1(b_i+0)\right|\le L_i^1(x-b_i)^{l_i^1},\, L_i^1>0,\; l_i^1>\alpha_i-1 \text{ при } x\to b_i+0, \quad (2)$$

а также имеет место неравенство $p(b_i+0)>0$, что влечёт за собой неравенство $p_i^1(b_i+0)=p(b_i+0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3}|b_i-b_k|^{-\alpha_k}>0$. Тогда на основании формулы (1.2, с.714) из работы [3] общее решение уравнения (1) на Γ_i^1 записывается в виде

$$y_i^{b_i,+}(x)=K_{b_i}^{\alpha_i,+}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C_{i0}^1,C_{i1}^1,...,C_{i\,(n-1)}^1], \quad (3)$$

где

$$K_{b_i}^{\alpha_i,+}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C_{i0}^1,C_{i1}^1,...,C_{i\,(n-1)}^1]\equiv\exp\left[p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x)-w_{p_i^1,b_i}^{\alpha_i,+}(x)\right]\left\{\int_{b_i}^{x}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_i^1(\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f_i^1(\xi)\right](\xi-b_i)^{-\alpha_i}\exp\left[w_{p_i^1,b_i}^{\alpha_i,+}(\xi)-p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(\xi)\right]d\xi+\sum_{j=0}^{n-1}C_{ij}^1\frac{(x-b_i)^j}{j!}\right\},$$

$w_{p_i^1,b_i}^{\alpha_i,+}(x)=\int_{b_i}^{x}\dfrac{p_i^1(t)-p_i^1(b_i+0)}{(t-b_i)^{\alpha_i}}dt$, $\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x)=\left[(\alpha_i-1)(x-b_i)^{\alpha_i-1}\right]^{-1}$, а $C_{i\,j}^1$, $j=\overline{0,(n-1)}$ - произвольные постоянные. Для степеней оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от функции (3), как и в работе [3], получим формулу

$$A^{s}_{(\alpha),(b)} y_i^{b_i,+} = \exp\left[p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x) - w_{p_i^1,b_i}^{\alpha_i,+}(x)\right]\left\{\int_{b_i}^{x}\left[\sum_{j=0}^{n-s-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_i^1(\xi) + \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}f_i^1(\xi)\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(\xi-b_i)^{-\alpha_i}\exp\left[w_{p_i^1,b_i}^{\alpha_i,+}(\xi) - p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(\xi)\right]d\xi + \sum_{j=s}^{n-1}C_{ij}^1\frac{(x-b_i)^{j-s}}{(j-s)!}\right\}\equiv$$

$$\equiv K_{b_i,s}^{\alpha_i,+}[\,p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{is}^1, C_{i(s+1)}^1,\dots, C_{i(n-1)}^1\,],\ s=\overline{1,(n-1)}\ . \qquad (4)$$

Пусть, для одного или обоих значений $i=1,2$ вместо неравенства $p(b_i+0)>0$ выполняется неравенство $p(b_i+0)<0$, а функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x\to b_i+0$ стремятся к нулю и подчиняются следующему, соответствующему асимптотическому равенству:

$$\exp\left[-p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x)\right]q(x) = o[(x-b_i)^{\beta_i^1}],\ \exp\left[-p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x)\right]f(x) = o[(x-b_i)^{\gamma_i^1}], \quad (5)$$

$\beta_i^1, \gamma_i^1 > \alpha_i - 1$ при $x\to b_i+0$.

Тогда для тех же значений $i=1,2$ вместо условия $p_i^1(b_i+0)>0$ выполняется соответствующее условие $p_i^1(b_i+0)<0$, а функции $q_i^1(x)$ и $f_i^1(x)$ при $x\to b_i+0$ стремятся к нулю и подчиняются следующему, соответствующему асимптотическому равенству:

$$\exp\left[-p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x)\right]q_i^1(x) = o[(x-b_i)^{\beta_i^1}],\ \exp\left[-p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x)\right]f_i^1(x) = o[(x-b_i)^{\gamma_i^1}]\ ,$$

$\beta_i^1, \gamma_i^1 > \alpha_i - 1$ при $x\to b_i+0$, что обеспечивает существование интегралов внутри фигурных скобок в формулах (3) и (4), тем самим справедливость этих формул. Значит в рассматриваемых случаях общее решение уравнения (1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ опять выражаются формулами (3) и (4).

Отметим, что, если принять обозначение $K_{b_i,s}^{\alpha_i,+}[...]\equiv K_{b_i}^{\alpha_i,+}[...]$, то формулы (3) и (4) можно объединенно выразить единой формулой (4) положив в нем $s=\overline{0,(n-1)}$.

При рассмотрении уравнения (1) на промежутке $\Gamma_i^2=[x_i^0, b_{i+1})$, $i=1,2$ функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_{i+1} доопределим с помощью их левого предельного значения. Тогда левую часть уравнения можно считать состоящим из n - кратной итерации оператора $y' + \frac{p_i^2(x)}{(b_{i+1}-x)^{\alpha_i}}y - \frac{q_i^2(x)}{(b_{i+1}-x)^{\alpha_i}}$, а правую часть из функции $\frac{f_i^2(x)}{(b_{i+1}-x)^{\alpha_i}}$, где функции $p_i^2(x)$, $q_i^2(x)$, $f_i^2(x)$ находятся с помощью $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ следующими равенствами,

$$p_i^2(x) = p(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k}\ ;\ q_i^2(x) = q(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k}\ ;\ f_i^2(x) = f(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k}$$

и, будут непрерывными на $\overline{\Gamma_i^2}$ функциями. Поэтому, в рассматриваемом промежутке точка b_{i+1} будет единственной правой граничной сверхсингулярной точкой изучаемого уравнения. Предположим, функция $p(x)$ такова, что определяемая с ее помощью функция $p_i^2(x)$ удовлетворяет условию типа Гельдера вида

$$\left|p_i^2(b_{i+1}-0) - p_i^2(x)\right| \le L_i^2(b_{i+1}-x)^{l_i^2},\ L_i^2 - const.>0,\ l_i^2 > \alpha_{i+1}-1 \text{ при } x\to b_{i+1}-0, \quad (6)$$

а также выполняется неравенство $p(b_{i+1}-0)<0$, что приводит к неравенству $p_i^2(b_{i+1}-0) = p(b_{i+1}-0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{3}|b_{i+1}-b_k|^{-\alpha_k} < 0$. В таком случае общее решение уравнения (1) на Γ_i^2 , на основании формулы (2.2, с.716) из работы [3], можно записать в виде

$$y_i^{b_{i+1},-}(x) = K_{b_{i+1}}^{\alpha_i,-}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{i0}^2, C_{i1}^2, ..., C_{i(n-1)}^2] \ , \qquad (7)$$

где

$$K_{b_{i+1}}^{\alpha_i,-}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{i0}^2, C_{i1}^2, ..., C_{i(n-1)}^2] \equiv \exp\left[-p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x) - w_{p_i^2,b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x)\right]\left\{\sum_{j=0}^{n-1} C_{ij}^2 \frac{(b_{i+1}-x)^j}{j!} -\right.$$

$$\left. -\int_x^{b_{i+1}}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_i^2(\xi) + \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f_i^2(\xi)\right](b_{i+1}-\xi)^{-\alpha_{i+1}}\exp\left[p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(\xi) + w_{p_i^2,b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(\xi)\right]d\xi\right\},$$

$$w_{p_i^2,b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x) = \int_x^{b_{i+1}}\frac{p_i^2(b_{i+1}-0)-p_i^2(t)}{(b_{i+1}-t)^{\alpha_{i+1}}}dt\ ,\ \omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x) = \left[(\alpha_{i+1}-1)(b_{i+1}-x)^{\alpha_{i+1}-1}\right]^{-1}, \text{ а } C_{ij}^2\ ,$$

$j = \overline{0,(n-1)}$

- произвольные постоянные.

Для степеней оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от функции (6), как и в работе [3], получим следующую формулу:

$$A_{(\alpha),(b)}^s y_i^{b_{i+1},-} = \exp\left[-p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x) - w_{p_i^2,b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x)\right]\left\{(-1)^s\sum_{j=s}^{n-1}C_{ij}^2\frac{(b_{i+1}-x)^{j-s}}{(j-s)!} -\right.$$

$$\left. -\int_x^{b_{i+1}}\left[\sum_{j=0}^{n-s-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_i^2(\xi) + \frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}f_i^2(\xi)\right](b_{i+1}-\xi)^{-\alpha_{i+1}}\exp\left[p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(\xi) + w_{p_i^2,b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(\xi)\right]d\xi\right\} \equiv$$

$$\equiv K_{b_{i+1},s}^{\alpha_{i+1},-}[p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{is}^2, C_{i(s+1)}^2, ..., C_{i(n-1)}^2],\ s = \overline{1,(n-1)}\ . \qquad (8)$$

Непосредственное рассмотрение формул (7) и (8) показывает, что они выражают общее решение уравнения (1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него и в случаях, когда, для одного или обоих значений $i = 1,2$ вместо условия $p(b_{i+1}-0) < 0$ выполняется соответствующее условие $p(b_{i+1}-0) > 0$, а функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x \to b_{i+1}-0$ стремятся к нулю и подчиняются, соответственно асимптотическому равенству:

$$\exp\left[p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x)\right]q(x) = o[(b_{i+1}-x)^{\beta_i^2}],\ \exp\left[p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x)\right]f(x) = o[(b_{i+1}-x)^{\gamma_i^2}]\ , \qquad (9)$$

$\beta_i^2, \gamma_i^2 > p_i^2(b_{i+1}-0)$ при $x \to b_{i+1}-0$.

Действительно, тогда для тех же значений $i = 1,2$ вместо условия $p_i^2(b_{i+1}-0) < 0$ выполняется соответствующее условие $p_i^2(b_{i+1}-0) > 0$, а функции $q_i^2(x)$ и $f_i^2(x)$ при $x \to b_{i+1}-0$ стремятся к нулю и подчиняются, соответственно асимптотическим равенствам:

$$\exp\left[p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x)\right]q_i^2(x) = o[(b_{i+1}-x)^{\beta_i^2}],\ \exp\left[p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x)\right]f_i^2(x) = o[(b_{i+1}-x)^{\gamma_i^2}]\ ,$$

$\beta_i^2, \gamma_i^2 > p_i^2(b_{i+1}-0)$ при $x \to b_{i+1}-0$, чем обеспечивается существование интегралов внутри фигурных скобок в формулах (7) и (8). Из этого следует верность сделанного предположения.

На интервале Γ_0 уравнение (1) имеет правую граничную сверхсингулярную точку b_1, поэтому здесь для его общего решения получим следующую формулу, аналогичную формуле (7):

$$y_0^{b_1,-}(x) = K_{b_1}^{\alpha_1,-}[p_0^2(x), q_0^2(x), f_0^2(x), C_{00}^2, C_{01}^2, ..., C_{0(n-1)}^2] \qquad (10)$$

где

$$K_{b_1}^{\alpha_1,-}[p_0^2(x), q_0^2(x), f_0^2(x), C_{00}^2, C_{01}^2, ..., C_{0(n-1)}^2] \equiv \exp\left[-p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x) - w_{p_0^2,b_1}^{\alpha_1,-}(x)\right]\left\{\sum_{j=0}^{n-1}C_{0j}^2\frac{(b_1-x)^j}{j!} -\right.$$

$$-\int_x^{b_1}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_0^2(\xi)+\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f_0^2(\xi)\right](b_1-\xi)^{-\alpha_1}\exp\left[p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(\xi)+w_{p_0^2,b_1}^{\alpha_1,-}(\xi)\right]d\xi\ \Bigg\},$$

$$p_0^2(x)=p(x)\prod_{k=2}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k};\ q_0^2(x)=q(x)\prod_{k=2}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k};\ f_0^2(x)=f(x)\prod_{k=2}^{3}|x-b_k|^{-\alpha_k},$$

$w_{p_0^2,b_1}^{\alpha_1,-}(x)=\int_x^{b_1}\frac{p_0^2(b_1-0)-p_0^2(t)}{(b_1-t)^{\alpha_1}}dt$, $\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)=\left[(\alpha_1-1)(b_1-x)^{\alpha_1-1}\right]^{-1}$, а C_{0j}^2, $j=\overline{0,(n-1)}$ - произвольные постоянные. Следующая формула, аналогичная формуле (8), имеет место для степеней оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от функции (10):

$$A_{(\alpha),(b)}^s\,y_0^{b_1,-}=\exp\left[-p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)-w_{p_0^2,b_1}^{\alpha_1,-}(x)\right]\Bigg\{(-1)^s\sum_{j=s}^{n-1}C_{0j}^2\frac{(b_1-x)^{j-s}}{(j-s)!}-$$

$$-\int_x^{b_1}\left[\sum_{j=0}^{n-s-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_0^2(\xi)+\frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}f_0^2(\xi)\right](b_1-\xi)^{-\alpha_1}\exp\left[p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(\xi)+w_{p_0^2,b_1}^{\alpha_1,-}(\xi)\right]d\xi\ \Bigg\}\equiv$$

$$\equiv K_{b_1,s}^{\alpha_1,-}[p_0^2(x),q_0^2(x),f_0^2(x),C_{0s}^2,C_{0(s+1)}^2,...,C_{0(n-1)}^2],\ s=\overline{1,(n-1)}\ . \qquad (11)$$

Для справедливости формул (10) и (11) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в точке b_1 доопределим с помощью их левого предельного значения и потребуем, чтобы функция $p_0^2(x)$, определяемая при помощи $p(x)$ в точке b_1 удовлетворяла условию вида

$$\left|p_0^2(b_1-0)-p_0^2(x)\right|\le L_0^2(b_1-x)^{l_0^2},\ L_0^2-const.>0,\ l_0^2>\alpha_1-1 \text{ при } x\to b_1-0,$$

и выполнялось неравенство $p(b_1-0)<0$ из которого следует неравенство $p_0^2(b_i-0)=p(b_1-0)\prod_{k=2}^{3}|b_1-b_k|^{-\alpha_k}<0$. Если же вместо неравенства $p(b_1-0)<0$ имеет место неравенство $p(b_1-0)>0$, то для сходимости интегралов в формулах (10) и (11) дополнительно будем требовать, чтобы функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x\to b_1-0$ стремились к нулю и удовлетворяли, соответственно асимптотическому условию:

$$\exp\left[p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)\right]q(x)=o[(b_1-x)^{\beta_0^2}],\ \exp\left[p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)\right]f(x)=o[(b_1-x)^{\gamma_0^2}]\ ,$$

$\beta_0^2,\gamma_0^2>p_0^2(b_1-0)$ при $x\to b_1-0$. Тогда выполняется неравенство $p_0^2(b_i-0)>0$ и функции $q_0^2(x)$ и $f_0^2(x)$ при $x\to b_1-0$ будут стремиться к нулю и удовлетворяют, соответственно асимптотическому равенству:

$$\exp\left[p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)\right]q_0^2(x)=o[(b_1-x)^{\beta_0^2}],\ \exp\left[p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)\right]f_0^2(x)=o[(b_i-x)^{\gamma_0^2}]\ ,$$

$\beta_0^2,\gamma_0^2>p_0^2(b_1-0)$ при $x\to b_1-0$. В этом случае общее решение уравнения (1) на Γ_0 и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него опять даются формулами (10) и (11).

Теперь уравнение (1) рассмотрим на интервале Γ_3 и коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в левой сверхсингулярной точке b_3 доопределим с помощью их правого предельного значения. В этом случае для его общего решения уравнения и степеней оператора от него могут иметь место следующие интегральные представления, аналогичные представлениям (3) и (4):

$$y_3^{b_3,+}(x)=K_{b_3}^{\alpha_3,+}[p_3^1(x),q_3^1(x),f_3^1(x),C_{30}^1,C_{31}^1,...,C_{3(n-1)}^1]\ , \qquad (12)$$

где

$$K_{b_3}^{\alpha_3,+}[p_3^1(x),q_3^1(x),f_3^1(x),C_{30}^1,C_{31}^1,...,C_{3(n-1)}^1]\equiv\exp\left[p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)-w_{p_3^1,b_3}^{\alpha_3,+}(x)\right]\Bigg\{\int_{b_3}^{x}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_3^1(\xi)+\right.$$

$$+\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f_3^1(\xi)\Bigg](\xi-b_3)^{-\alpha_3}\exp\Big[w_{p_3^1,b_3}^{\alpha_3,+}(\xi)-p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(\xi)\Big]d\xi+\sum_{j=0}^{n-1}C_{3j}^1\frac{(x-b_i)^j}{j!}\Bigg\},$$

$$A_{(\alpha),(b)}^s y_3^{b_3,+}=\exp\Big[p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)-w_{p_3^1,b_3}^{\alpha_3,+}(x)\Big]\Bigg\{\int_{b_3}^{x}\Bigg[\sum_{j=0}^{n-s-1}\frac{(x-\xi)^j}{j!}q_3^1(\xi)+\frac{(x-\xi)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}f_3^1(\xi)\Bigg]\cdot$$

$$\cdot(\xi-b_3)^{-\alpha_{3i}}\exp\Big[w_{p_3^1,b_3}^{\alpha_i,+}(\xi)-p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(\xi)\Big]d\xi+\sum_{j=s}^{n-1}C_{3j}^1\frac{(x-b_3)^{j-s}}{(j-s)!}\Bigg\}\equiv$$

$$\equiv K_{b_3,s}^{\alpha_3,+}[p_3^1(x),q_3^1(x),f_3^1(x),C_{3s}^1,C_{3(s+1)}^1,...,C_{3(n-1)}^1],\ s=\overline{1,(n-1)}, \qquad (13)$$

$$p_3^1(x)=p(x)\prod_{k=1}^{2}|x-b_k|^{-\alpha_k},\ q_3^1(x)=q(x)\prod_{k=1}^{2}|x-b_k|^{-\alpha_k},\ f_3^1(x)=f(x)\prod_{k=1}^{2}|x-b_k|^{-\alpha_k},$$

$w_{p_3^1,b_3}^{\alpha_3,+}(x)=\int_{b_3}^{x}\frac{p_3^1(t)-p_3^1(b_3+0)}{(t-b_3)^{\alpha_3}}dt$, $\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)=\Big[(\alpha_3-1)(x-b_3)^{\alpha_3-1}\Big]^{-1}$, а $C_{3j}^1,\ j=\overline{0,(n-1)}$ - произвольные постоянные. Формулы (12) и (13) имеют место, если функция $p(x)$ такова, что функция $p_3^1(x)$ в окрестности точки $x=b_3$, подчиняется условию

$$\left|p_3^1(x)-p_3^1(b_3+0)\right|\le L_3^1(x-b_3)^{l_3^1},L_3^1>0,l_3^1>\alpha_3-1 \text{ при } x\to b_3+0,$$

и выполняется неравенство $p_3^1(b_3+0)=p(b_3+0)\prod_{k=1}^{2}|b_3-b_k|^{-\alpha_k}>0$. Последнее условие выполняется, если выполняется условие $p(b_3+0)>0$. Формулы (12) и (13) представляют общее решение уравнения (1) и степени оператора от него на Γ_3 и в случае, когда вместо условия $p_3^1(b_3+0)>0$ выполняется условие $p_3^1(b_3+0)<0$, если функции $q_3^1(x)$ и $f_3^1(x)$ при $x\to b_3+0$ стремятся к нулю и подчиняются следующему, соответственно асимптотическому условию: $\exp\Big[-p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)\Big]q_3^1(x)=o[(x-b_3)^{\beta_3^1}]$, $\exp\Big[-p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)\Big]f_3^1(x)=o[(x-b_3)^{\gamma_3^1}]$,

$\beta_3^1,\gamma_3^1>\alpha_3-1$ при $x\to b_3+0$. Эти требования выполняются если для функции $p(x)$ имеет место неравенство $p(b_3+0)<0$ и функции $q(x)$ и $f(x)$ при $x\to b_3+0$ стремятся к нулю и, удовлетворяют асимптотическому равенству

$$\exp\Big[-p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)\Big]q(x)=o[(x-b_3)^{\beta_3^1}],\ \exp\Big[-p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)\Big]f(x)=o[(x-b_3)^{\gamma_3^1}],$$

$\beta_3^1,\gamma_3^1>\alpha_3-1$ при $x\to b_3+0$.

Совокупность формул (10), (3), (7), (12) определяет общее решение уравнения (1) на $\Gamma_{(b)}$ в виде

$$y(x)=\begin{cases} K_{b_1}^{\alpha_1,-}[p_0^2(x),q_0^2(x),f_0^2(x),C_{00}^2,C_{01}^2,...,C_{0(n-1)}^2] \ \textit{при}\ x\in\Gamma_0 \\ K_{b_i}^{\alpha_i,+}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C_{i0}^1,C_{i1}^1,...,C_{i(n-1)}^1] \ \textit{при}\ x\in\Gamma_i^1 \\ K_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}[p_i^2(x),q_i^2(x),f_i^2(x),C_{i0}^2,C_{i1}^2,...,C_{i(n-1)}^2] \ \textit{при}\ x\in\Gamma_i^2 \\ K_{b_3}^{\alpha_3,+}[p_3^1(x),q_3^1(x),f_3^1(x),C_{30}^1,C_{31}^1,...,C_{3(n-1)}^1] \ \textit{при}\ x\in\Gamma_3 \end{cases},\ i=1,2, \qquad (14)$$

а совокупность формул (11), (4), (8) и (13) степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от этой функции в виде

$$A^{s}_{(\alpha),(b)}y=\begin{cases} K^{\alpha_1,-}_{b_1,s}[p_0^2(x),q_0^2(x),f_0^2(x),C^2_{0s},C^2_{0(s+1)},...,C^2_{0(n-1)}] \ \textit{при}\ x\in\Gamma_0 \\ K^{\alpha_i,+}_{b_i,s}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C^1_{is},C^1_{i(s+1)},...,C^1_{i(n-1)}] \ \textit{при}\ x\in\Gamma_i^1 \\ K^{\alpha_{i+1},-}_{b_{i+1},s}[p_i^2(x),q_i^2(x),f_i^2(x),C^2_{is},C^2_{i(s+1)},...,C^2_{i(n-1)}] \ \textit{при}\ x\in\Gamma_i^2 \\ K^{\alpha_3,+}_{b_3,s}[p_3^1(x),q_3^1(x),f_3^1(x),C^1_{3s},C^1_{3(s+1)},...,C^1_{3(n-1)}] \ \textit{при}\ x\in\Gamma_3 \end{cases},\quad i=1,2, \qquad (15)$$

$s=\overline{1,(n-1)}$ (их можно выразить одной формулой (15), полагая в нём $s=\overline{0,(n-1)}$), если мы, в соответствии с определением решения уравнения, обеспечим непрерывность выражений $A^{s}_{(\alpha),(b)}y$, $s=\overline{0,(n-1)}$ в точках x_i^0 , $i=1,2$, то есть потребуем выполнение равенств $[A^{s}_{(\alpha),(b)}y]_{x=x_i^0+0}=[A^{s}_{(\alpha),(b)}y]_{x=x_i^0-0}$, $i=1,2$, $s=\overline{0,(n-1)}$. Это приводит нас к следующим двум системам линейных алгебраических уравнений, имеющих треугольную форму:

$$K^{\alpha_i,+}_{b_i,s}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C^1_{is},C^1_{i(s+1)},...,C^1_{i(n-1)}]_{x=x_i^0}=K^{\alpha_{i+1},-}_{b_{i+1},s}[p_i^2(x),q_i^2(x),f_i^2(x),C^2_{is},C^2_{i(s+1)},....,C^2_{i(n-1)}]_{x=x_i^0},$$

$$s=\overline{0,(n-1)},\ i=1,2 \qquad (16)$$

Каждая из систем (16) относительно одной группы произвольных постоянных C^1_{ij} и C^2_{ij}, $j=\overline{0,(n-1)}$ относящихся к промежутку Γ_i , $i=1,2$ имеет единственное решение, если другую группу считать известной. Потому что, в этих системах основная матрица, соответствующая каждой из этих групп переменных имеет положительную главную диагональ. Так что с помощью систем (16) каждую из вышеназванных групп произвольных постоянных можно выразить однозначно через другую, соответствующую группу. Это позволяет записать формулы (14) и (15) в четырёх равносильных формах, в связи с расположением и взаимосвязи произвольных постоянных в их второй - пятой строках, в соответствии со следующими правилами:

а). Произвольные постоянные C^1_{1j} и C^1_{2j} , $j=\overline{0,(n-1)}$, расположенные во второй и четвёртой строках формул считаются основными, а постоянные C^2_{1j} и C^2_{2j} , $j=\overline{0,(n-1)}$, расположенные в третьей и пятой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (16);

б). Произвольные постоянные C^1_{1j} и C^2_{2j}, $j=\overline{0,(n-1)}$, расположенные во второй и пятой строках формул считаются основными, а постоянные C^2_{1j} и C^1_{2j} , $j=\overline{0,(n-1)}$, расположенные в третьей и четвёртой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (16);

в). Произвольные постоянные C^2_{1j} и C^1_{2j} , $j=\overline{0,(n-1)}$, расположенные в третьей и четвёртой строках формул считаются основными, а постоянные C^1_{1j} и C^2_{2j} , $j=\overline{0,(n-1)}$, расположенные во второй и пятой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (16);

г). Произвольные постоянные C^2_{1j} и C^2_{2j}, $j=\overline{0,(n-1)}$, расположенные в третьей и пятой строках формул считаются основными, а постоянные C^1_{1j} и C^1_{2j} , $j=\overline{0,(n-1)}$, расположенные во второй и четвёртой строках, определяются с их помощью из соответствующей системы (16).

Во всех этих случаях представление (14), выражающее общее решение уравнения (1) зависит от n - произвольных постоянных, различным образом обозначенных в промежутках Γ_i , $i=0,1,2,3$.

Из проведенных выше рассуждений вытекает, что формулы (14) и (15) выражают общее решение уравнения (1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него при любых комбинациях знаков чисел $p(b_i+0)$, $i=1,2,3$ и $p(b_{i+1}-0)$, $i=0,1,2$, если функции $q(x)$ и $f(x)$ подчиняются следующим дополнительным требованиям: в случае $p(b_i+0)<0$ при $x\to b_i+0$ обращаются в нуль и подчиняются соответственно условию (5), а в случае $p(b_{i+1}-0)>0$ при $x\to b_{i+1}-0$ обращаются в нуль и подчиняются условиям (9).

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть сверхсингулярные точки уравнения (1) расположены в виде* $a<b_1<b_2<b_3<b$, *далее* $\Gamma_{(b)}=\bigcup\limits_{i=0}^{3}\Gamma_i$, $\Gamma_0=(a,b_1)$ $\Gamma_i=(b_i,b_{i+1})$, $i=1,2$, $\Gamma_3=(b_3,b)$ *а* x_i^0 *- обозначает фиксированную точку интервала* Γ_i, $i=1,2$, *которая разделяет этот*

интервал на промежутки $\Gamma_i^1=(b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2=[x_i^0, b_{i+1})$. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) функции $p(x)$, $q(x)$ *и* $f(x)$ *непрерывны на отрезке* $\overline{\Gamma}$, *за исключением, быть может, точек* b_i, $i=1,2,3$. *В самих этих точках они могут иметь лишь разрыв первого рода и для функции* $p(x)$ *выполняются неравенства* $p(b_i+0)\neq 0$, $p(b_i-0)\neq 0$, $i=1,2,3$*;*

2) функции $p_i^1(x)$, $i=1,2,3$, *определяемые при помощи функции* $p(x)$ *удовлетворяют, соответственно, условию (2);*

3) функции $p_i^2(x)$, $i=0,1,2$, *определяемые при помощи функции* $p(x)$ *удовлетворяют соответственно, условию (6);*

4) выполняется следующая комбинация знаков чисел $p(b_i+0)>0$, $p(b_i-0)<0$, $i=1,2,3$*;*

5) могут выполняться другие всевозможные комбинации знаков чисел $p(b_i+0)$, $i=1,2,3$, $p(b_{i+1}-0)$, $i=0,1,2$. *При этом требуется, чтобы функции* $q(x)$ *и* $f(x)$, *в случае* $p(b_i+0)<0$ *при* $x\to b_i+0$ *обращались в нуль и подчинялись, соответственно, условию (5), а в случае* $p(b_{i+1}-0)>0$ *при* $x\to b_{i+1}-0$ *обращались в нуль и подчинялись, соответственно условию (9).*

Тогда общее решение уравнения (1) на множестве $\Gamma_{(b)}$ *выражается при помощи формулы (14), для степеней оператора* $A_{(\alpha),(b)}$ *от него имеет место формула (15), где* C_{ij}^1, $i=1,2,3$, C_{ij}^2, $i=0,1,2$, $j=\overline{0,(n-1)}$ *- произвольные постоянные, группы из которых соответствующие промежутку* Γ_i, $i=1,2$ *однозначно связаны соответствующей треугольной системой алгебраических уравнений (16).*

Следствие 1. Непосредственная проверка показывает, что по известному решению уравнения (1), выражаемому по формуле (14) соответствующие ему постоянные находятся однозначно с помощью следующих равенств, которые, подобно [1], [3] называем характеристическими:

$$\left\{\exp\left[p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)\right]A_{(\alpha),(b)}^s y\right\}_{x=b_1-0}=(-1)^s C_{0s}^2,\ s=\overline{0,(n-1)};\qquad(17)$$

$$\left\{\exp\left[-p_1^1(b_1+0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,+}(x)\right]A_{(\alpha),(b)}^s y\right\}_{x=b_{1+0}}=C_{1s}^1,\ s=\overline{0,(n-1)};\qquad(18)$$

$$\left\{\exp\left[p_1^2(b_2-0)\omega_{b_2}^{\alpha_2,-}(x)\right]A_{(\alpha),(b)}^s y\right\}_{x=b_{2-0}}=(-1)^s C_{1s}^2,\ s=\overline{0,(n-1)};\qquad(19)$$

$$\left\{\exp\left[-p_2^1(b_2+0)\omega_{b_2}^{\alpha_2,+}(x)\right]A_{(\alpha),(b)}^s y\right\}_{x=b_{2+0}}=C_{2s}^1,\ s=\overline{0,(n-1)};\qquad(20)$$

$$\left\{\exp\left[p_2^2(b_3-0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,-}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_{3-0}}=(-1)^s C^2_{2s}\ ,\ s=\overline{0,(n-1)}; \qquad (21)$$

$$\left\{\exp\left[-p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_{3+0}}=C^1_{3s}\ ,\ s=\overline{0,(n-1)}; \qquad (22)$$

Процесс нахождения постоянных C^1_{ij}, C^2_{ij}, $i=1,2$, $j=\overline{0,(n-1)}$ можно можно проделать и следующим способом, которым воспользуемся в дальнейшем: взяв две группы из равенств (18) - (21), одно относящееся к Γ_1, другое к Γ_2, однозначно находим две группы произвольных постоянных, по одному относящиеся к этим интервалам, далее подставляя их в соответствующую из систем (16) находим однозначно другие группы постоянных, относящиеся к указанным интервалам. Характеристические равенства (17) - (22) являются формулами обращения представления (14).

Следствие 2. Непосредственной проверкой заключаем, что все решения уравнения (1), выражаемые формулой (14) в окрестности сверхсингулярных точек ведут себя как экспоненциальная функция и точно это характеризуется знаками предельных значений функции $p(x)$ в этих точках. При $x\to b_i+0$, $i=1,2,3$, если $p(b_i+0)>0$, то все решения уравнения стремятся к бесконечности и удовлетворяют асимптотическому равенству $y(x)=O\left\{\exp\left[p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x)\right]\right\}$, если же $p(b_i+0)<0$, то все решения стремятся к нулю с поведением $y(x)=o\left\{\exp\left[p_i^1(b_i+0)\omega_{b_i}^{\alpha_i,+}(x)\right]\right\}$. При $x\to b_{i+1}-0$, $i=0,1,2$, если $p(b_{i+1}-0)<0$, то все решения данного уравнения стремятся к бесконечности с асимптотическим поведением $y(x)=O\left\{\exp\left[-p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x)\right]\right\}$, если же $p(b_{i+1}-0)>0$, то все они стремятся к нулю с поведением $y(x)=o\left\{\exp\left[-p_i^2(b_{i+1}-0)\omega_{b_{i+1}}^{\alpha_{i+1},-}(x)\right]\right\}$. Из проведенных рассуждений вытекает, что общая картина поведения решений уравнения (1) в окрестности сверхсингулярных точек характеризуется комбинацией знаков шести чисел $p(b_i+0)$, $i=1,2,3$ и $p(b_{i+1}-0)$, $i=0,1,2$.

Интегральное представление общего решения уравнения (1) и степеней оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него, то есть формула (15), а также её характеристическое свойство, выражаемое равенствами (17) - (22), дают возможность выяснить правильную постановку граничных задач Коши - Рикье и найти их решение в явном виде.

Задача 1. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее двум группам условий вида*

$$\left\{\exp\left[p_0^2(b_1-0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,-}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_1-0}=a^2_{0s}\ ,\ \left\{\exp\left[-p_3^1(b_3+0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,+}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_{3+0}}=d^1_{3s}\ , \qquad (23)$$

$s=\overline{0,(n-1)}$,

а также одному из следующих двух групп условий:

$$\left\{\exp\left[-p_1^1(b_1+0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,+}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_1+0}=a^1_{1s}, \left\{\exp\left[-p_2^1(b_2+0)\omega_{b_2}^{\alpha_2,+}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_2+0}=a^1_{2s}; \qquad (24)$$

$$\left\{\exp\left[-p_1^1(b_1+0)\omega_{b_1}^{\alpha_1,+}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_1+0}=b^1_{1s}, \left\{\exp\left[p_2^2(b_3-0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,-}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_3-0}=b^2_{2s}; \qquad (25)$$

$$\left\{\exp\left[p_1^2(b_2-0)\omega_{b_2}^{\alpha_2,-}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_2-0}=c^2_{1s}, \left\{\exp\left[-p_2^1(b_2+0)\omega_{b_2}^{\alpha_2,+}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_2+0}=c^1_{2s}; \qquad (26)$$

$$\left\{\exp\left[p_1^2(b_2-0)\omega_{b_2}^{\alpha_2,-}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_2-0}=d^2_{1s}, \left\{\exp\left[p_2^2(b_3-0)\omega_{b_3}^{\alpha_3,-}(x)\right]A^s_{(\alpha),(b)}y\right\}_{x=b_3-0}=d^2_{2s}, \qquad (27)$$

$s=\overline{0,(n-1)}$, *где* $a^2_{0s}, a^1_{is}, b^k_{is}, c^k_{is}$, d^2_{is}, d^1_{3s} $i,k=1,2$, $s=\overline{0,(n-1)}$ - *заданные вещественные числа.*

Решение задачи 1. Пусть, для уравнения (1) выполнены все условия теоремы 1. Формулу (15) подчиним условиям (23). Тогда на основании характеристических равенств (17) и (22) значение произвольных постоянных C^2_{0s} и C^1_{3s}, $s=\overline{0,(n-1)}$ однозначно находим следующими равенствами:

$$C_{0s}^{2}=a_{0s}^{2}\ ,\ C_{3s}^{1}=d_{3s}^{1}\,,\ s=\overline{0,(n-1)}\,. \tag{28}$$

Далее формулу (15) подставляем в условия (24). Тогда в силу характеристических равенств (18) и (20) имеем:

$$C_{1s}^{1}=a_{1s}^{1}\ ,\ C_{2s}^{1}=a_{2s}^{1}\,,\ s=\overline{0,(n-1)}\,. \tag{29}$$

Теперь в системах (16) постоянные C_{1s}^{1} и C_{2s}^{1} , $s=\overline{0,(n-1)}$ заменим их значениями из последних равенств. Тогда приходим к следующим треугольным системам линейных алгебраических уравнений:

$$K_{b_2,s}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x),q_1^2(x),f_1^2(x),C_{1s}^2,...,C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}=K_{b_1,s}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),a_{1s}^1,...,a_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}\,,$$
$$K_{b_3,s}^{\alpha_3,-}[p_2^2(x),q_2^2(x),f_2^2(x),C_{2s}^2,...,C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}=K_{b_2,s}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x),q_2^1(x),f_2^1(x),a_{2s}^1,...,a_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}\,,$$
$$s=\overline{0,(n-1)} \tag{30}$$

относительно произвольных постоянных C_{1s}^{2} и C_{2s}^{2} , $s=\overline{0,(n-1)}$, соответственно, из которых последние определяются однозначно. Значение постоянных C_{0s}^{2} , C_{3s}^{1} , C_{1s}^{1} , C_{2s}^{1} , $s=\overline{0,(n-1)}$ из равенств (28), (29), а C_{1s}^{2} , C_{2s}^{2} из систем (30), соответственно, подставляя в формулу (15), получим единственное решение задачи 1 с условиями (23), (24).

При требовании выполнения других условий задачи 1 выводы делаем аналогичным образом. Тогда: в случае условий (23), (25) опять имеем равенства (28) для нахождения C_{0s}^{2}, C_{3s}^{1} , $s=\overline{0,(n-1)}$, а в силу равенств (18), (21) произвольные постоянные C_{1s}^{1} , C_{2s}^{2} находим равенствами:

$$C_{1s}^{1}=b_{1s}^{1}\ ,\ C_{2s}^{2}=(-1)^{s}b_{2s}^{2}\,,\ \ s=\overline{0,(n-1)} \tag{31}$$

и подставляя найденные значения из равенств (31) в соответствующую систему (16), для нахождения постоянных C_{1s}^{2} , C_{2s}^{1} приходим к следующим определённым треугольным алгебраическим системам:

$$K_{b_2,s}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x),q_1^2(x),f_1^2(x),C_{1s}^2,...,C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}=K_{b_1,s}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),b_{1s}^1,...,b_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}\,,$$
$$K_{b_2,s}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x),q_2^1(x),f_2^1(x),C_{2s}^1,...,C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}=K_{b_3,s}^{\alpha_3,-}[p_2^2(x),q_2^2(x),f_2^2(x),(-1)^s b_{2s}^2,...,(-1)^{n-1}b_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}\,,$$
$$s=\overline{0,(n-1)}\,; \tag{32}$$

в случае условий (23), (26) имеем равенства (28), а на основании характеристических равенств (19) и (20) произвольные постоянные C_{1s}^{2}, C_{2s}^{1} находим так:

$$C_{1s}^{2}=(-1)^{s}c_{1s}^{2}\,,\ C_{2s}^{1}=c_{2s}^{1}\ ,\ \ s=\overline{0,(n-1)} \tag{33}$$

и подставляя последние значения в соответствующую систему (16), получим следующую систему для определения C_{1s}^{1} , C_{2s}^{2} , соответственно:

$$K_{b_1,s}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),C_{1s}^1,...,C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0}=K_{b_2,s}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x),q_1^2(x),f_1^2(x),(-1)^s c_{1s}^2,...,(-1)^{n-1}c_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0}\,,$$
$$K_{b_3,s}^{\alpha_3,-}[p_2^2(x),q_2^2(x),f_2^2(x),C_{2s}^2,...,C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0}=K_{b_2,s}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x),q_2^1(x),f_2^1(x),c_{2s}^1,...,c_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0}\,,$$
$$s=\overline{0,(n-1)}\,; \tag{34}$$

в случае условий (23), (27) кроме формул (28) на основании характеристических формул (19), (21) для определения произвольных постоянных C_{1s}^{2} , C_{2s}^{2} получим равенства

$$C_{1s}^{2}=(-1)^{s}d_{1s}^{2}\,,\ C_{2s}^{2}=(-1)^{s}d_{2s}^{2}\ ,\ \ s=\overline{0,(n-1)} \tag{35}$$

и подставляя эти их значения в соответствующую систему из (16), для нахождения постоянных C_{1s}^{1} , C_{2s}^{1} имеем следующую систему уравнений, соответственно:

$$K^{1,+}_{b_1,s}[p^1_1(x),q^1_1(x),f^{\,1}_1(x),C^1_{1s},...,C^1_{1(n-1)}]_{x=x^0_1}=K^{1,-}_{b_2,s}[p^2_1(x),q^2_1(x),f^{\,2}_1(x),(-1)^s d^2_{1s},...,(-1)^{n-1}d^2_{1(n-1)}]_{x=x^0_1},$$
$$K^{1,+}_{b_2,s}[p^1_2(x),q^1_2(x),f^{\,1}_2(x),C^1_{2s},...,C^1_{2(n-1)}]_{x=x^0_2}=K^{1,-}_{b_3,s}[p^2_2(x),q^2_2(x),f^{\,2}_2(x),(-1)^s d^2_{2s},...,(-1)^{n-1}d^2_{2(n-1)}]]_{x=x^0_2},$$
$$s=\overline{0,(n-1)}. \qquad (36)$$

В каждом из этих случаев, также выписываем соответствующее решение уравнения (1).

Следовательно, имеет место утверждение: **Теорема 2.** *Пусть для уравнения (1) выполняются все условия теоремы 1. Тогда задача 1 имеет единственное решение. Решение, подчиняющееся группе условий (23) и одному из групп условий (24) - (27), получается из формулы (14) путем замены в нём произвольных постоянных их значением, соответственно, из следующих формул и систем: (28), (29), (30); (28), (31), (32); (28), (33), (34) и (28),(35), (36).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. - Dushanbe: TSNU, 1998. - 160p.
2. Раджабов Н. Интегральные представления и задачи типа линейного сопряжения для модельной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной внутренней сверхсингулярной точкой/ / Н.Раджабов, О.И. Меликов // Вестник Таджикского Государственного Национального Университета. – Душанбе. - 2008. - №1(48). - С. 19 - 31.
3. Дадоджонова М.Ё. Интегральные представления решений и задачи типа Коши - Рикье для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка со сверхсингулярной точкой/ М.Ё. Дадоджонова, А.Г. Олимов, Н.Р. Раджабов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2014. - т. 57. - №9-10. - С. 713-719.
4. Дадоджонова М.Я. Интегральное представление задачи Коши-Рикье и типов линейного сопряжения для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сверхсингулярной точкой / М.Я.Дадоджонова, А.Г.Олимов// Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Сино. - 2016. - 1/1(192). - С. 88 - 93.
5. Олимов А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка общего вида со сверхсингулярной точкой / А.Г. Олимов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – Душанбе: Сино. - 2016. - 1/1(192). - С. 62-65.
6. Меликов О.И. Исследование общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с левой граничной сингулярной точкой/ О.И Меликов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – Душанбе. - 2017. - №1/1. - С.19-25.
7. Абдуллаев А.Р. О задаче Коши для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка/ А.Р.Абдуллаев, Я.Н. Крохалева //Евразийское Научное Объединение. - 2018.-№12 - (46).- С.1- 3.
8. Олими А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задачи типов Коши и линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой/ А.Г. Олими// Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Сино. - 2021. - №1. - С.60 - 77.
9. Раджабов, Н. Системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с n сингулярной точкой / Н. Раджабов // Международная конференция «Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». - Душанбе. - 1996. - С.69.
10. Раджабов Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с тремя внутренними сингулярными точками/ Н.Раджабов, Е.Шишкина // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложения». - Худжанд. - 2003. - С. 119 - 122.
11. Раджабов Н. Решение немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными сингулярными точками / Н. Раджабов, С.К. Зарипов //Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - 2009. - №1 (49). - С. 3 - 14.

12. Раджабов Н. К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения n - го порядка с двумя граничными сингулярными точками / Н. Раджабов, С.К. Зарипов // Известия АН Республики Таджикистан. - 2010.- №2 (139). - С. 7-17.
13. Михайлов Л.Г. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя сингулярными точками/ Л.Г.Михайлов, Х.С. Хидиров // Доклады АН Республики Таджикистан. - 2009. -Т. 52. - №7. - С.507 - 512.
14. Олимов А.Г. Свойства решений и задачи типа Коши - Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с двумя граничными сингулярными точками/А.Г.Олимов, Ш.Э.Мирзоева // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки.- Худжанд: Нури маърифат. - 2019. - №1(48).- С. 11 - 18.
15. Исраилов С.В. О свойствах решений дифференциального уравнения с двумя точками сингулярностей специальной структуры/ С.В.Исраилов, А.Л.Джабраилов, Х.Л. Гасаева //Format. Техника и технология. - 2019. - №1(1). - С. 11 - 16.
16. Олими А.Г. Формула представления общего решения и задачи типа Коши - Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с граничной и внутренней слабо сингулярной точкой/А.Г.Олими, М.Я.Дадоджанова, Н.К.Охунов, С.А.Толибов // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки.- Худжанд: Нури маърифат. - 2021. - №1(56). - С. 22 - 33.
17. Олими А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и граничные задачи для одного обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками/ А.Г.Олими, Н.К.Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – Душанбе: Сино. – 2022. - №3.- С.141-159.
18. Охунов Н.К. Задача типа линейного сопряжения для обыкновенного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками/ Н.К.Охунов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященной 70 – летию со дня рождения академика НАН РТ Шабозова М. (Душанбе 25-26.06.2022).-Душанбе: ООО Эр - граф. - 2022.- С.292 - 296.
19. Олими А.Г. Общее представление решений и задачи Коши-Рикье для одного операторно - дифференциального уравнения с тремя сингулярными точками/ А.Г.Олими, Н.К.Охунов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022 г.). Том 2 /отв. ред. З.Ю.Фазуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ. - 2022. – С. 216-218.
20. Охунов Н.К. Пример задачи типа линейного сопряжения для одного операторно - дифференциального уравнения с тремя слабо особыми точками/ Н.К.Охунов // Современные проблемы математики и её приложения. Материалы международной научно-практической конференции, посвященной 20 - летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы(Душанбе 20-21 октября 2022 г.). - Душанбе. - 2022. - С. 144 -149.

LITERATURE

1. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. - Dushanbe: TSNU, 1998. - 160p.
2. Rajabov N. Integral representations and linear conjugation type problems for a model system of linear ordinary differential equations of the first order with one internal supersingular point/ N.Rajabov, O.I. Melikov // Bulletin of the Tajik State National University. – Dushanbe. - 2008. - No.1(48). - Pp. 19-31.
3. Dadojonova M.E. Integral representations of solutions and problems of the Cauchy-Riquier type for one equation obtained by iterating an ordinary first-order differential operator with a supersingular point/ M.E. Dadojonova, A.G. Olimov, N.R. Rajabov // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2014. - vol. 57. - No.9-10. - Pp. 713-719.
4. Dadojonova M.Ya. Integral representation of the Cauchy-Riquier type problem and types of linear conjugation for one equation obtained by iterating an ordinary first-order differential operator with an internal supersingular point / M.Ya.Dadojonova, A.G.Olimov// Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. - Dushanbe: Sino. - 2016.-No.1/1(192).- Pp. 88-93.
5. Olimov A.G. Linear ordinary differential equation of the third order of a general form with a supersingular point / A.G. Olimov, N. Rajabov // Bulletin of the Tajik National University. Series of

Natural Sciences. - Dushanbe: Sino. - 2016. - No.1/1(192). - Pp. 62-65.
6. Melikhov O. I. Investigation of a general system of first-order ordinary differential equations with a left boundary singular point// Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. - Dushanbe. - 2017. - No. 1/1. - Pp.19-25.
7. Abdullaev A.R. On the Cauchy problem for a singular differential equation of the second order/ A.R.Abdullaev, Ya.N. Krokhaleva //Eurasian Scientific Association. - 2018.- No.12 - (46).- Pp.1-3.
8. Olimi A.G. Representation of the general solution in integral form and problems of Cauchy types and linear conjugation for a linear ordinary differential equation of the third order with a supersingular point/ A.G. Olimi// Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. - Dushanbe: Sino. - 2021. - No. 1. - Pp.60-77.
9. Rajabov, N. Systems of two ordinary differential equations of the first order with n singular point / N. Rajabov // International conference "Differential equations with singular coefficients". - Dushanbe. - 1996. - P.69.
10. Rajabov N. Linear conjugation type problems for linear ordinary differential equations of first order with three internal singular point/ N. Rajabov, E. Shishkina // Materials of the international scientific conference "Actual problems of mathematics and its applications". - Khujand, 2003. - Pp. 119 - 122.
11. Rajabov N. Solution of a non-model linear ordinary differential equation of the second order with two boundary singular points / N. Rajabov, S.K. Zaripov //Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. -2009. - No.1 (49). - Pp. 3-14.
12. Rajabov N. To the theory of one class of a non-model linear ordinary differential equation of the n - th order with two boundary singular points / N. Rajabov, S.K. Zaripov // News of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2010.- No.2 (139). - Pp. 7-17.
13. Mikhailov L.G. Linear systems of ordinary differential equations with two singular points/ L.G.Mikhailov, H.S. Khidirov // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2009. -Vol. 52. - No. 7. - Pp. 507 - 512.
14. Olimov A.G. Properties of solutions and problems of the Cauchy-Riquier type for an ordinary differential equation of a special type with two boundary singular points/A.G.Olimov, Sh.E.Mirzoeva // Scientific notes of the Khujand State University named after academician B. Gafurov. Series: Natural and Economic Sciences.- Khujand: Nuri marifat. - 2019. - No.1(48).- Pp. 11-18.
15. Israilov S.V. On the properties of solutions of a differential equation with two points of singularities of a special structure/ S.V.Israilov, A.L.Dzhabrailov, H.L. Gasaeva //Format. Technique and technology. - 2019. - No.1(1).- Pp.11-16.
16. Olimi A.G. Formula for the representation of a general solution and a Cauchy-Riquier type problem for an ordinary differential equation of a special type with a boundary and internal weakly singular point/A.G.Olimi, M.Ya.Dadojanova, N.K.Okhunov, S.A.Tolibov // Scientific notes of the Khujand State University named after Academician B. Gafurov. Series: Natural and Economic Sciences.- Khujand: Nuri marifat. - 2021.-No.1(56). - Pp. 22 - 33.
17. Olimi A.G. Representation of the general solution in integral form and boundary value problems for one ordinary operator-differential equation with three weakly singular points/ A.G.Olimi, N.K.Okhunov // Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences. – Dushanbe: Sino. – 2022. - No. 3.- Pp.141-159.
18. Okhunov N.K. The linear conjugation type problem for an ordinary operator-differential equation with three weakly singular points/ N.K.Okhunov // Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematical analysis and theory of functions" dedicated to the 70th anniversary of the birth of Academician M. Shabozov NAS RT (Dushanbe 25-26.06.2022).- Dushanbe: LLC Er - graf. - 2022.- Pp.292 - 296.
19. Olimi A.G. General representation of solutions and the Cauchy-Riquier problem for one operator-differential equation with three singular points/ A.G.Olimi, N.K.Okhunov // Proceedings of the international scientific conference "Ufa Autumn Mathematical School" (Ufa, September 28 – October 1, 2022). Volume 2 /ed. by Z.Y.Fazullin. – Ufa: EPC Bashgu. - 2022. – Pp. 216-218.
20. Okhunov N.K. An example of a linear conjugation type problem for a single operator-differential equation with three weakly singular points/ N.K.Okhunov // Modern problems of mathematics and its applications. Materials of the international scientific and practical conference dedicated to the 20th anniversary of the development of natural, exact and mathematical sciences 2020-2040 (Dushanbe, October 20-21, 2022). - Dushanbe. - 2022. - pp. 144 -149.