ТДУ 517.95
ТКБ 22.161

ТАДҚИҚИ ЯК СИНФИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДАИ БИСЁРЧЕНАК БО ДУ ТАҒЙИРЁБАНДАИ НОВОБАСТАИ КОМПЛЕКСӢ

Раҳимова Махсуда Аюбовна - *номзади илмҳои физикаю-математика, дотсенти кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон (Тоҷикистон, Хуҷанд),e-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru*

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ КОМПЛЕКСНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рахимова Махсуда Аюбовна - *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики (Таджикистан, Худжанд), e-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru*

INVESTIGATION OF ONE CLASS OF OVERDETERMINED SISTEM OF EQUATIONS WITH TWO COMPLEX VARIABLES

Rahimova Makhsuda Aubovna - *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Sciences, Tajik State University of Law, Business and Politics (Tajikistan, Khudjand), e-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru*

Вожаҳои калидӣ: *функсияи антианалитикӣ, вектори хос, барзиёдмуайяншуда, бисёршаклаи ҳалҳо.*

Дар мақола барои як синфи системаи муодилаҳои барзиёдмуайяншудаи бисёрченак бо ҳосилаҳои хусусии тағйирёбандааш комплексӣ шартҳои зарурии комилан ҳалшавандагӣ ва бисёршаклаи ҳалҳо муайян карда шудаанд.

Ключевые слова: *антианалитическая функция, собственный вектор, переопределенный, многообразие решений.*

В статье для одного класса переопределенных многомерных систем с частными производными комплексного переменного найдены необходимые условия полной разрешимости и многообразия решений.

Keywords: *antianalytic function, eigen vector, overdetermined, variety of solutions.*

In the paper, for one class of overdetermined multidimensional systems with two independent complex variables, necessary conditions for complete solvability and variety of solutions have been found.

Системаи муодилаҳои барзиёдмуайяншудаи бо ҳосилаҳои хусусии намуди

$$\begin{cases} w_{\bar{z}_1} = A\overline{w} \\ w_{\bar{z}_2} = B\overline{w} \end{cases} \tag{1}$$

ро тадқиқ менамоем, ки дар ин ҷо $w = w(z_1, z_2)$, A, B - матрисаҳои комплексии доимии тартиби n мебошанд. Муодилаи якуми системаи (1)-ро нисбат ба $\bar{z}_2$ ва муодилаи дуюми онро нисбат ба $\bar{z}_1$ дифференсиронида, пас аз дигаргунсозӣ ҳосил мекунем

$$\overline{B}w_{z_1} = \overline{A}w_{z_2}.$$

Бигзор $\det B \neq 0$. Он гоҳ

$$w_{z_1} = \overline{B}^{-1}\overline{A}w_{z_2}. \quad (2)$$

Аз (1) ва баробарии (2) бармеояд, ки

$$w_{\overline{z}_1 z_1} = A\overline{w}_{z_1}, \quad (3)$$

$$w_{z_1\overline{z}_1} = \overline{B}^{-1}\overline{A}\overline{w}_{z_2\overline{z}_1}. \quad (4)$$

Муодилаи якуми системаи (1)-ро истифода бурда, муносибати (4)-ро ба намуди

$$w_{z_1\overline{z}_1} = \overline{B}^{-1}\overline{A}(A\overline{w})_{z_2} \quad (5)$$

менависем. Баъдан аз муносибатҳои (3) ва (4) ҳосил мекунем

$$A\overline{w}_{z_1} = \overline{B}^{-1}\overline{A}A\overline{w}_{z_2}. \quad (6)$$

Дар ин баробарӣ ба бузургҳои ҳамроҳшуда гузашта, бо назардошти муодилаҳои системаи (1) ҳосил мекунем $\overline{A}A\overline{w} = B^{-1}A\overline{A}B\overline{w}$. Барои он ки ин баробарӣ барои ҳамагуна w иҷро гардад, зарур ва кифоя аст, ки шарти

$$B\overline{A}A = A\overline{A}B \quad (7)$$

ҷой дошта бошанд. Муодилаи дуюми системи (1)-ро нисбат ба z_1 ва баробарии (2)-ро нисбат ба $\overline{z}_2$ дифференсиронида, ҳосилаҳои $w_{z_2 z_1}$ ва $w_{z_1 z_2}$-ро баробар намуда, ҳосил мекунем

$$B\overline{w}_{z_1} = \overline{B}^{-1}\overline{A}B\overline{w}_{z_2}. \quad (8)$$

Боз дар ин баробарӣ ба бузургҳои ҳамроҳшуда гузашта, бо назардошти муодилаҳои системаи (1) муносибати $\overline{B}A\overline{w} = \overline{B}^{-1}A\overline{B}B\overline{w}$-ро ҳосил мекунем, ки аз он бар меояд

$$B\overline{B}A = A\overline{B}B. \quad (9)$$

Шартҳои (7), (9) барои пурра ҳалшавандагии системаи (1) заруранд. Ин шартҳоро дар ҳолати $\det B = 0$ низ ҳосил намудан мумкин аст. Дар оянда онҳоро иҷрогардида меҳисобем. Аз муносибатҳои (6) ва (8) нисбат ба $w_{\overline{z}_1}$ ва $w_{\overline{z}_2}$ системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро ҳосил мекунем

$$\begin{cases} B\overline{A}w_{\overline{z}_1} - A\overline{A}w_{\overline{z}_2} = 0, \\ B\overline{B}w_{\overline{z}_1} - A\overline{B}w_{\overline{z}_2} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Нишон медиҳем, ки матрисаи $M = \begin{pmatrix} B\overline{A} & -A\overline{A} \\ B\overline{B} & -A\overline{B} \end{pmatrix}$ ин система махсус аст. Дар ҳақиқат, дар асоси (8) матрисаҳои $B\overline{A}$ ва $A\overline{A}$ ҷойивазшавандаанд:

$$(B\overline{A})(A\overline{A}) = (B\overline{A}A)\overline{A} = (A\overline{A}B)\overline{A} = (A\overline{A})(B\overline{A}).$$

Бинобар ин дар асоси хосиятҳои матрисаҳо (ниг. [2]) ва баробарии (7), ҳосил мекунем

$$\det M = \det(-B\overline{A}\cdot A\overline{B} + A\overline{A}\cdot B\overline{B}) = \det[(A\overline{A}B - B\overline{A}A)\overline{B}] = 0.$$

Пас, системаи якҷинсаи (10) дорои ҳалҳои ғайринулӣ мебошад.

Бигзор $Mc = 0$, ки дар ин ҷо $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_j \in C^n$ аст. Он гоҳ ҳосил мекунем

$$\begin{cases} B\overline{A}c_1 - A\overline{A}c_2 = 0, \\ B\overline{B}c_1 - A\overline{B}c_2 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Азбаски $\det \overline{B} \neq 0$, он гоҳ аз муодилаи дуюми системаи (11) дорем

$$c_1 = (B\overline{B})^{-1}A\overline{B}c_2.$$

Бинобар ин аз системаи (1) бар меояд, ки

$$w_{\overline{z}_1} = \omega(z_1, z_2)(B\overline{B})^{-1}A\overline{B}c, \quad (12)$$

$$w_{z_2} = \omega(z_1, z_2)c\,, \tag{13}$$

ки дар ин ҷо $c \in C^n$ ва ω функсияи дилхоҳ аз синфи C^1 мебошад. Аз муодилаи дуюми системаи (1) ва (13) ҳосил мекунем

$$w = \overline{\omega}\overline{B}^{-1}\overline{c}\,.$$

Баробарии (9)-ро истифода намуда, исбот намудан мумкин аст, ки w муодилаи (12)-ро қонеъ мегардонад.

Ҳамин тавр, мо исбот намудем, ки барои пурра ҳалшавандагии системаи (1) иҷрошавии шартҳои (7) ва (9) заруранд. Инчунин ҳангоми $\det \overline{B} \neq 0$ ҳалли системаи (1) бояд намуди

$$w(z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2)\overline{B}^{-1}c, \tag{14}$$

-ро дошта бошад, ки дар ин ҷо $c \in C^n$, φ ба синфи C^1 тааллуқ дорад.

Акнун аз маҷмуи ҳалҳои (14) мо бояд ҳалҳои системаи (1)-ро ҷудо намоем. Аз (14) w-ро ба системаи (1) мегузорем:

$$\begin{cases} \varphi_{\overline{z}_1}\overline{B}^{-1}c = \overline{\varphi}AB^{-1}\overline{c}, \\ \varphi_{\overline{z}_2}\overline{B}^{-1}c = \overline{\varphi}BB^{-1}\overline{c}. \end{cases}$$

Аз ин ҷо

$$\begin{cases} \varphi_{\overline{z}_1}c = \overline{\varphi}\overline{B}AB^{-1}\overline{c}, \\ \varphi_{\overline{z}_2}c = \overline{\varphi}\overline{B}\overline{c}. \end{cases} \tag{15}$$

Аз (14) ва (2) ҳосил мекунем

$$\varphi_{z_1}\overline{B}^{-1}c = \overline{B}^{-1}\overline{A}\overline{B}\varphi_{z_2}\overline{B}^{-1}c,$$

ё ин ки

$$(\varphi_{z_1}\overline{B}^{-1} - \overline{B}^{-1}\overline{A}\overline{B}\varphi_{z_2}\overline{B}^{-1})c = 0. \tag{16}$$

Фарз мекунем, ки $c \neq 0$ ва $\varphi \neq 0$ аст. Ду ҳолатҳои имконпазирро шарҳ медиҳем:

а) $\varphi_{z_2} \neq 0$ дар ягон соҳаи Ω;

б) $\varphi_{z_2} \equiv 0$.

Ҳолати а). Муодилаи (16)-ро ба намуди

$$\left(\overline{A}\overline{B}^{-1} - \frac{\varphi_{z_1}}{\varphi_{z_2}}E\right)c = 0,\ \ (z_1, z_2) \in \Omega$$

менависем. Аз ин ҷо бар меояд, ки функсияи $\dfrac{\varphi_{z_1}}{\varphi_{z_2}}$ дар Ω бояд ба қимати хоси матрисаи $\overline{A}\overline{B}^{-1}$ баробар бошад, вектори c бояд вектори хоси ба он мувофиқ бошад. Бигзор $\lambda_1,...,\lambda_m$ ($m \le n$) қиматҳои хоси матрисаи $\overline{A}\overline{B}^{-1}$ ва $c_1,...,c_m$ векторҳои хоси ба онҳо мувоқиф бошад. Он гоҳ

$$\varphi_{z_1} = \lambda_j\varphi_{z_2}\,,\ (z_1, z_2) \in \Omega.$$

Ҳалли умумии ин муодила ҳангоми $\lambda_j \neq 0$ намуди $\varphi = \phi(\lambda_j z_1 + z_2)$-ро дорад, ки дар ин ҷо $\phi = \phi(z)$ функсияи дилхоҳи синфи C^1 мебошад. Бигзор $\lambda_j \neq 0$. Он гоҳ системаи (15) намуди

$$\begin{cases} \overline{\lambda}_j\phi_{\overline{z}}\overline{c}_j = \overline{\phi}\overline{B}AB^{-1}\overline{c}_j, \\ \phi_z c_j = \overline{\phi}\overline{B}\overline{c}_j \end{cases} \tag{17}$$

-ро мегирад. Азбаски $\overline{A}\overline{B}^{-1}c_j = \lambda_j c_j$ аст, пас $AB^{-1}\overline{c}_j = \overline{\lambda}_j\overline{c}_j$ ва муодилаи якуми системаи (17) дар намуди

$$\overline{\lambda}_j \phi_{\overline{z}} c_j = \overline{\lambda}_j \overline{\phi} \overline{B} \overline{c}_j$$

навишта мешавад, ки ба муодилаи дуюми системаи (17) эквивалент мебошад. Бинобар ин системаи (17) ба як муодилаи вектории

$$\phi_{\overline{z}} c_j = \overline{\phi} \overline{B} \overline{c}_j \qquad (18)$$

оварда мешавад. Барои он ки ин муодила ҳалли ғайринулӣ дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки векторҳои c_j ва $\overline{B}_j \overline{c}_j$ хаттӣ вобаста бошанд, яъне

$$\overline{B}_j \overline{c}_j = \mu_j c_j, \ \ \mu_j \text{ - доимии ғайринулӣ.}$$

Он гоҳ функсияи ϕ аз муодилаи $\phi_{\overline{z}} = \mu_j \overline{\phi}$ муайян карда мешавад.

Агар $\lambda_j = 0$ бошад, он гоҳ $\varphi_{z_1} = 0$ ва $AB^{-1}\overline{c}_j = 0$, яъне (16) иҷро мегардад. Аз баробарии якуми системаи (15) бар меояд, ки $\varphi_{z_1} = 0$ ва он гоҳ φ нисбат ба z_1 антианалитикӣ мебошад, зеро ки системаи (15) ба намуди (18) оварда мешавад.

Ҳолати б). Муодилаи (16) намуди

$$\varphi_{z_1} \cdot c = 0, \ \ (z_1, z_2) \in \Omega$$

-ро мегирад. Аз ин ҷо $\varphi_{z_1} \equiv 0$ дар Ω, банобар ин φ нисбат ба z_1 ва z_2 антианалитикӣ мебошад. Он гоҳ тарафҳои рости системаи (15) нисбат ба z_1 ва z_2 антианалитикӣ мебошанд, ки ин танҳо дар ҳолати $\varphi \equiv 0$ ё $c = 0$ ҷой дорад. Дар ин ҳолат ҳалли нулии системаи (11)-ро ҳосил мекунем.

Дар натиҷа тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Теорема. Бигзор шартҳои (7), (9) иҷро гардида, $\det B = 0$ бошад, он гоҳ

а) агар чунин ададҳои μ_j мавҷуд бошанд, ки

$$\overline{B}_j \overline{c}_j = \mu_j c_j,$$

дар ин ҷо c_j - вектори хоси ба қимати хоси λ_j мувофиқи матрисаи $\overline{A}\overline{B}^{-1}$ аст. Он гоҳ маҷмӯи вектор-функсияҳои намуди

$$w(z_1, \ z_2) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j (\lambda_j z_1 + z_2) \overline{B}^{-1} c_j, \qquad \alpha_j \in R,$$

ҳалли системаи (1) мешаванд, дар ин ҷо функсияҳои $\varphi_j = \varphi_j(z)$ мувофиқан ҳалҳои муодилаҳои

$$u_z = \mu_j \overline{u}$$

мебошанд;

б) агар векторҳои c_j ва $\overline{B}_j \overline{c}_j$ хаттӣ новобаста бошанд, он гоҳ системаи (1) дорои танҳо ҳалли нулӣ мебошад.

ПАЙНАВИШТ

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 351 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
3. Михайлов Л. Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 1986. – 116 с.
4. Шабат Б.Ф. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

REFERENCES

1. Bellman R. Introduction to the theory of matrices. – M.: Nauka. 1976. – 351 p.
2. Gantmakher F.R. Matrix theory. – M.: Nauka. 1967. – 576 p.
3. Mikhailov, L.G. Some overdetermined systems of partial differential equations with two unknown functions. – Dushanbe: Donish, 1986. – 116 p.
4. Shabat B.V. Introduction to complex analysis. – M.: Nauka. 1969. – 576 p.