ТДУ 517.95
ТКБ 22.162

# БАҲОИ АПРИОРИИ ҲАЛҲОИ МАҲДУДИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ КВАЗИХАТИИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ДУЮМ

***Ҷабборов Абдуқудус Абдуманнонович*** *- номзади илмҳои физикаю-математика, дотсенти кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон (Тоҷикистон, Хуҷанд),*
*e-mail: jabborov_abdu@rambler.ru*

# АПРЕОРНЫЕ ОЦЕНКИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

***Джабборов Абдукудус Абдуманнонович*** *- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики (Таджикистан, Худжанд),*
*e-mail: jabborov_abdu@rambler.ru*

# PRIORI ESTIMATES OF BOUNDED SOLUTIONS OF QUASILINEAR ELLIPTIC SYSTEMS OF EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

***Jabborov Abducudus Abdumannonovich*** *- Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Sciences, Tajik State University of Law, Business and Politics (Tajikistan, Khudjand),*
*e-mail: jabborov_abdu@rambler.ru*

***Вожаҳои калидӣ:*** *квазихаттӣ, эллиптикӣ, дудаврӣ, ҳалҳои маҳдуд, мунтазам наздикшаванда.*

*Дар мақола барои як синфи системаи муодилаҳои квазихатии эллиптикии тартиби дуюм барои ҳамаи ҳалҳои дар тамоми ҳамворӣ маҳдуд баҳои априорӣ муайян карда шудааст.*

***Ключевые слова:*** *квазилинейный, эллиптический, двоякопериодический, ограниченные решения, равномерно сходящийся.*

*В статье для одного класса квазилинейных эллиптических систем уравнений второго порядка для всех ограниченных во всей плоскости решений, установлена априорная оценка.*

***Keywords:*** *quasilinear, elliptic, doubly periodic, bounded solutions, uniformly convergent.*

*In the paper for one class of quasilinear elliptic systems of equations of the second order, for all solutions bounded in the entire plane, an a priori estimate is established.*

Оид ба муодилаҳо ва системаҳои эллиптикӣ корҳои М.А.Лаврентев, И.Н.Векуа, Л.Берс, Л.Г.Михайлов, шогирдон ва пайравони онҳо хело назаррас аст ([1, 5, 6, 9-12]). Барои муодилаҳо ва системаҳои хатӣ аз тарафи олимон И.Н.Векуа ва Л.Г.Михайлов назарияи пурраи кофӣ сохта шудааст ([6, 9-12]). Барои системаи муодилаҳои квазихатии эллиптикӣ дар ҳамворӣ бошад корҳо нисбатан кам ба чашм мерасанд. Баъзе масъалаҳо ба монандӣ: масъалаҳои канорӣ, ҳалҳои маҳдуд ва даврӣ барои муодилаҳои ғайрихаттӣ ва квазихатӣ дар ҳамворӣ дар корҳои И.Н.Векуа, Л.Г.Михайлов, В.С.Виноградов, Э.Мухамадиев, В.Тучке, Л.Вольферсдорф, А.И.Янушаускас ва дигарон ([2-4, 6-11, 13-16]) омӯхта шудааст.

Системаи квазихатии эллиптикии тартиби дуюми намуди зеринро дида мебароем:

$$\Delta w = P(z, w, w_{\bar z}) + f(z, w, w_{\bar z}) \tag{1}$$

ки дар ин ҷо *Δ* - оператори Лаплас, $P(z,u,v)$ - функсияи якҷинсаи тартиби $m$>1 аз рӯи тағирёбандаҳои $u, v$ ва дудаврӣ аз рӯи $z$ бо даврҳои $2\pi$ ва $2\pi i$, функсияи $f(z,u,v)$ бошад, шарти

$$|f(z,u,v)| \le \mu\left[(|u| + |v|)^m\right]$$

-ро бо функсияи $\mu(t)$, $t > 0$ $\mu(t) = o(t)$ ҳангоми $t \to \infty$ қаноат мекунонад; инчунин фарз мекунем, ки функсияҳои *P* и *f* шарти Гёлдерро қаноат мекунонад. Синфи функсияҳои $f$, ки шартҳои дар боло номбаршударо қаноат мекунонанд бо $F_{m,\mu}$ ишорат мекунем.

Теоремаи зерин ҷой дорад.

***Теорема.*** *Бигзор функсияҳои P и f шартҳои болоиро қаноат кунонанд. Бигзор*

1) *барои ҳаргуна* $z_0 \in \left(\overline{K} = \{(x, y : x, y \in [0, 2\pi])\}\right)$, $u_0 \in C, |u_0| = 1,$

$$P(z_0, u_0, 0) \ne 0;$$

2) *барои дилхоҳ* $z_0 \in \overline{K}, u_0 \in C, |u_0| \le 1$ *системаи*

$$v_{\bar z} = \overline{P(z_0, u_0, \bar v)} \tag{2}$$

*ҳалли ғайринулии дар тамоми ҳамворӣ маҳдуд надорад. Он гоҳ барои ҳамаи ҳалҳои дар тамоми ҳамворӣ маҳдуди системаи* (1) *баҳои априории зерин ҷой дорад*

$$\sup_z\left(|w(z)| + |w_{\bar z}(z)|\right) \le R, \tag{3}$$

*ки дар ин ҷо* $R$ *танҳо аз функсияҳои* $P$ *и* $\mu$ *вобаста аст.*

**Исбот.** Фарз мекунем, ки тасдиқоти теорема ҷой надорад, яъне барои дилхоҳ $R$>0 чунин ҳалли $f_R \in F_{m,\mu}$ ва $w_R$-и дар тамоми ҳамворӣ маҳдуди системаи (1) мавҷуд аст, ки

$$\sup_z\left(|w(z)| + |w_{\bar z}(z)|\right) > R$$

$R = n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ қабул мекунем. Он гоҳ чунин пайдарпаии функсияҳои $\{f_n\} \in F_{m,\mu}$ ва ҳалли дар тамоми ҳамворӣ маҳдуди $w_n(z)$-и системаи

$$\Delta w = P(z, w, w_{\bar z}) + f_n(z, w, w_{\bar z}) \tag{4}$$

мавҷуд аст, ки

$$\sup_z\left(|w_n(z)| + \left|\frac{\partial w_n(z)}{\partial \bar z}\right|\right) > n. \tag{5}$$

Чунин ишораҳоро дохил мекунем:

$$r_n = \sup_z\left(|w_n(z)| + \left|\frac{\partial w_n(z)}{\partial \bar z}\right|\right), \tag{6}$$

$$\omega_n(z) = \overline{\frac{\partial w_n(z)}{\partial \bar z}}. \tag{7}$$

Маълум аст, ки $r_n \to \infty$ ҳангоми $n \to \infty$. Нуқтаи $z_n$-ро чунин интихоб мекунем, ки

$$|w_n(z_n)| + \left|\frac{\partial w_n(z_n)}{\partial \bar z}\right| \ge r_n - 1. \tag{8}$$

Функсияҳои зеринро дохил мекунем:

$$u_n(z) = \frac{1}{r_n} w_n(r_n^{1-m} z + z_n), \quad v_n(z) = \frac{1}{r_n} \omega_n(r_n^{1-m} z + z_n)$$

Нишон медиҳем, ки ҷуфти функсияҳои ($u_n, v_n$) системаи зеринро қаноат мекунонанд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{r_n^{m-1}} v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{4}\left[\overline{P(r_n^{1-m}z + z_n, u, \bar{v})} + \dfrac{1}{r_n^m}\overline{f(r_n^{1-m}z + z_n, r_n u, r_n \bar{v})}\right], \end{cases} \tag{9}$$

яъне, баробарии зерин ҷой дорад

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{r_n^{m-1}} \overline{v_n(z)}, \\ \dfrac{\partial v_n}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{4}\left[\overline{P(r_n^{1-m}z + z_n, u_n(z), \overline{v_n(z)})} + \dfrac{1}{r_n^m}\overline{f(r_n^{1-m}z + z_n, r_n u_n(z), r_n \overline{v_n(z)})}\right] \end{cases} \tag{10}$$

Нишон медиҳем, ки пайдарпаии функсияхои $\{ u_n(z) \}$, $\{ v_n(z) \}$ дар ҳар як компакти ҳамворӣ мунтазам наздикшаванда аст.

$$|u_n(z)| = \frac{1}{r_n}\left|w_n(r_n^{1-m}z + z_n)\right| \le \frac{1}{r_n} \cdot r_n = 1, \tag{11}$$

яъне $u_n(z)$ - мунтазам маҳдуд. Аз баробарии

$$|v_n(z)| = \frac{1}{r_n}\left|\omega_n(r_n^{1-m}z + z_n)\right| = \frac{1}{r_n}\left|\frac{\partial w_n(r_n^{1-m}z + z_n)}{\partial \bar{z}}\right| \le \frac{1}{r_n} \cdot r_n = 1 \tag{12}$$

бармеояд, ки $v_n(z)$ - инчунин мунтазам маҳдуд аст.

Дар асоси баробарии якуми (10) ва (12) ҳосил мекунем:

$$\left|\frac{\partial u_n(z)}{\partial \bar{z}}\right| = \frac{1}{r_n^{m-1}}\left|\overline{v_n(z)}\right| \le \frac{1}{r_n^{m-1}} \tag{13}$$

Азбаски $\frac{1}{r_n^{m-1}} \to 0$, он гоҳ аз (13) бармеояд, ки $\left\{\frac{\partial u_n(z)}{\partial \bar{z}}\right\}$ мунтазам маҳдуд аст. Бинобар он пайдарпаии $\{ u_n(z) \}$ баробардараҷа бефосила мешавад. Ҳамин тавр пайдарпаии $u_n(z)$ мунтазам маҳдуд ва баробардараҷа бефосила аст.

Ба қайд мегирем, ки $\rho > 0$. Дар асоси теоремаи Арсел аз пайдарпаии $\{ u_n(z) \}$ чунин зерпайдарпаии $\{u_{n_j}(z)\}$-ро ҷудо намудан мумкин аст, ки вай дар $K_\rho = \{z : |z| \le \rho\}$ мунтазам наздикшаванда аст. Бигзор $u^{(1)}(z)$ ҳудуди ин пайдарпаӣ бошад.

Айнан ҳамин тавр аз пайдарпаии $\{u_{n_j}(z)\}$ зерпайдарпаии $\{u_{n_j}(z)\}$-ро ҷудо мекунем, ки вай дар $K_{2\rho} = \{z : |z| \le 2\rho\}$ мунтазам наздикшаванда аст. Бигзор $u^{(2)}(z)$ ҳудуди ин пайдарпаӣ бошад. Маълум аст, ки $u^{(2)}(z) \equiv u^{(1)}(z)$ ҳангоми $z \in K_\rho$.

Ҳамин тавр, чунин амал намуда, ҷадвали функсияҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{array}{l} u_{n_1}, u_{n_2}, \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n_{j1}}, u_{n_{j2},} \ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{14}$$

Пайдарпаии диагоналиро

$$u_k(z), \ \ k \in J = (n_1, n_{j_1} ......)$$

интихоб мекунем.

Нишон медиҳем, ки ин пайдарпаӣ дар ҳар як компакти ҳамворӣ мунтазам наздикшаванда аст. Бигзор $K$ компакти ихтиёрӣ бошад. $N$-ро чунин мегирем, ки $K \subset K_{\mathrm{N}}$.

Ҳангоми $k \ge N$ будан, пайдарпаии $u_k(z), k \in J$ ба сатри $N$-и ҷадвали (14) таллуқ дорад.

Бинобарин $u_k(z)$ дар $K_N$ мунтазам наздикшаванда аст, аз он ҷумла дар компакти $K$.

Ҳамин тавр, пайдарпаии диагоналии $u_k(z), k\in J$ дар ҳар як компакт ба функсияи $u(z)$ мунтазам наздикшаванда аст.

Баробарии якуми (10)–ро барои $n=k\in J,\ z\in K_R$ дар чунин намуд менависем:

$$\mathrm{u}_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}\frac{u_k(\xi)}{\xi-\mathrm{z}}d\xi-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\xi|<R}\frac{\partial u_k}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\mathrm{z}}\ ,$$

$$(\zeta=\xi+i\eta,\ z\in K_R,\ k\in J). \tag{15}$$

Аз (13) бармеояд, ки $\frac{\partial u_k}{\partial\bar\zeta}$ ҳангоми $k\to\infty$ ба нул наздик мешавад. Бинобар он дар (15) ба ҳудуд гузашта ҳосил мекунем:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}\frac{u(\xi)}{\xi-\mathrm{z}}d\xi$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки $u(z)$ дар $K_R$ аналитикӣ мебошад. Азбаски $R$ ихтиёрӣ аст, пас функсияи $u(z)$ дар тамоми ҳамворӣ аналитикӣ мешавад. Аз (11) бармеояд, ки $|u(z)|\le 1$ аст, барои дилхоҳ $z\in C$. Бинобар ин дар асоси теоремаи Лиувилл функсияи $u$ доимӣ мешавад, яъне

$$u(z)\equiv u_0 \tag{16}$$

ҳангоми $|u_0|\le 1$.

Пайдарпаии $\{v_k\},\ k\in J$ -ро дида мебароем. Ба он тарзе ки ҳангоми сохтани пайдарпаии $u_k$, $k\in J$ амал намуда будем, пайдарпаии диагоналии $v_j,\ j\in J_1\subset J$ -ро месозем, ки вай дар ҳар як компакт ба функсияи $v(z)$ мунтазам наздикшаванда аст.

Баробарии дуюми (10) –ро ҳангоми $n=j\in J_1$ будан, дар чунин намуд менависем:

$$v_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mathrm{t}|=R}\frac{v_j(t)}{t-\mathrm{z}}dt-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\zeta|<R}\Big[\overline{P(r_j^{1\text{-m}}\zeta+z_j,u_j(\zeta),\overline{v_j(\zeta)})}+$$
$$+r_j^{-\mathrm{m}}\overline{f_j(r_j^{1\text{-m}}\zeta+z_j,r_ju_j(\zeta),r_j\overline{v_j(\zeta)})}\Big]\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\mathrm{z}},\quad z\in K_R,\ j\in J_1 \tag{17}$$

Азбаски пайдарпаии $z_j$ мадуд аст, бинобар ин ба ягон нуқтаи $z_0\in\overline{K}$ наздик мешавад. Дар баробарии (17) ҳангоми $j\to\infty$ ба ҳудуд гузашта, бо назардошти хосияти функсияҳои $P,\ f, u_j(z)$, ҳосил мекунем:

$$v(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{v(t)}{t\text{-}z}dt-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\zeta|<R}\overline{P(z_0,u_0,\overline{v(\zeta)})}\frac{d\xi d\eta}{\zeta\text{-}z},\ z\in K_R$$

Дар асоси хосияти интеграли типи Кошӣ ва оператори $\mathrm{T}_G f$ маълум аст, ки

$$\frac{\partial v}{\partial\bar z}=\frac{1}{4}\overline{P(z_0,u_0,\overline{v(z)})} \tag{18}$$

Азбаски $R$ ихтиёрӣ мебошад, пас функсияи $v(z)$ дар тамоми ҳамворӣ ҳалли системаи

$$\frac{\partial v}{\partial\bar z}=\frac{1}{4}\overline{P(z_0,u_0,\bar v)} \tag{19}$$

мешавад. Дар асоси (12) $|v(z)|\le 1,\ z\in C.$ Азбаски дар асоси (8)

$$\frac{1}{r_n}|w_n(z_n)|+\frac{1}{r_n}\left|\frac{\partial w_n(z_n)}{\partial\bar z}\right|\ge 1\text{-}\frac{1}{r_n},$$

аст, пас

$$|u_n(0)| + |v_n(0)| \geq 1 - \frac{1}{r_n}, \quad n = j \in J_1.$$

Бинобар ин дар нобаробарии охирон ба ҳудуд гузашта, ҳосил мекунем:

$$|u(0)| + |v(0)| \geq 1, \qquad |u_0| + |v(0)| \geq 1 \tag{20}$$

Ду ҳолат ҷой дорад: 1) $v(z) \equiv 0$, 2) $v(z) \neq 0$

Дар ҳолати якум дар асоси (16) ва (20):

$$|u_0| = 1$$

мешавад. Аз (18) бармеояд, ки

$$0 = \frac{1}{4} P(z_0, u_0, 0),$$

яъне

$$P(z_0, u_0, 0) = 0,$$

мешавад, ки ин ба шарти 1)-и теорема зид мебошад.

Дар ҳолати дуюм бошад, функсияи $v$ ҳалли ғайринулии дар тамоми ҳамворӣ маҳдуди системаи (19) мешавад. Он гоҳ системаи (2) низ инчунин ҳалли ғайринулии дар тамоми ҳамворӣ маҳдудро дорад. Ин бошад ба шарти 2)–и теорема зид мебошад. Зиддиятҳои ҳосилшуда исботи теоремаро нишон медиҳанд.

Теорема исбот шуд.

## ПАЙНАВИШТ


1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962. 208 с.
2. Абдулвоҳиди О. Двоякопериодическое решение одного класса нелинейных эллиптических систем второго порядка на плоскости. Вестник ТНУ. Серия естественных наук, №1, 2019. – с.73-79.
3. Байзаев С. О существовании периодических решений нелинейной обобщенной системы Коши-Римана. Доклады АН ТаджССР, т.24, №2, 1981. – с.75-79.
4. Байзоев С., Раҳимова М. Об априорной оценке ограниченных решений одного класса квазилинейных эллиптических систем. Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова М.Ш. Душанбе: 2022. – с.201-204.
5. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966, 251с.
6. Векуа И.Н., Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. 1986. 508 с.
7. Виноградов В.С. Об одной задаче для квазилинейных систем уравнений на плоскости. ДАН СССР, т.121, №4. – с.579-582.
8. Дубинский Ю.А., Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка. УМН 23, I(139), 1968. – с. 45-90.
9. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. АН Тадж.ССР, отдел физики и математики, Душанбе, 1963. 13 с.
10. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.
11. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, СО Наука, 1977. 424 с.
12. Михайлов Л.Г. Краевая задача пита задачи Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и некоторые интегральные уравнение, Ученые записки. Труды физ.мат.–та Тадж.гос.ун-та. №10, 1957, с. 32-79.
13. Мухамадиев Э.М. К теории периодических решении нелинейных систем эллиптического типа. ДАН СССР 207, №5, 1973, с.1035-1037.
14. Янушаускас А.И. Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами. Вильнюс: Мокслас, 1990, 180с.

15. Wolfersdorf L., Monotonicity methode for a class of first order semilinear elliptic differential equation systems in the plane, v. “Math. Nachr.”, 100 (1981), p.187-212.
16. Wolfersdorf L., A class of nonlinear Riemann-Hilbert problems for holomorpic functions. v. “Math. Nachr.”, 1984, 116, p.89-107.

REFERENCES

1. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates for solutions of elliptic equations near the boundary. M.: IL, 1962. 208 p.
2. Abdulvokhidi O. Doubly periodic solution of a class of non-linear elliptic systems of the second order on the plane. Bulletin of TNU. Series of Natural Sciences, No. 1, 2019. - p.73-79.
3. Baizaev S. On the formulation of solutions to a nonlinear generalized Cauchy-Riemann system. Reports of the Academy of Sciences of the TajSSR, vol. 24, No. 2, 1981. - p.75-79.
4. Baizoev S., Rakhimova M. On a priori estimation of bounded solutions of one class of quasilinear elliptic systems. Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematical analysis and theory of functions", dedicated to the 70th anniversary of the academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan Shabozov M.Sh. Dushanbe: 2022. - p. 201-204.
5. Bers L., John F., Schechter M., Partial Differential Equations. M.: Mir, 1966, 251p.
6. I. N. Vekua, Generalized analytic functions. M.: Science. 1986. 508 p.
7. Vinogradov V.S. On a problem for quasilinear systems of equations in the plane. DAN USSR, vol. 121, no. 4. - p.579-582.
8. Dubinsky Yu.A., Quasilinear elliptic and parabolic equations of any order. UMN 23, I(139), 1968. - p. 45-90.
9. Mikhailov L.G. A new class of singular integral equations and its applications to differential equations with singular coefficients. Academy of Sciences of the Taj.SSR, Department of Physics and Mathematics, Dushanbe, 1963. 13 p.
10. Mikhailov L.G. Some overdetermined systems of partial differential equations with two unknown functions. Dushanbe: Donish, 1986. 116 p.
11. Monakhov V.N. Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems of equations. Novosibirsk, SO Nauka, 1977. 424 p.
12. Mikhailov L.G. Pita boundary value problem of the Riemann problem for systems of differential equations of the first order of elliptic type and some integral equations, Uchenye zapiski. Proceedings of Physics and Mathematics - Taj. State University. No. 10, 1957, - p. 32-79.
13. Mukhamadiev E.M. On the theory of periodic solutions of nonlinear systems of elliptic type. DAN USSR 207, No. 5, 1973, p.1035-1037.
14. Yanushauskas A.I. Multidimensional elliptic systems with variable coefficients. Vilnius: Mokslas, 1990, 180 p.
15. Wolfersdorf L., Monotonicity methode for a class of first order semilinear elliptic differential equation systems in the plane, v. “Math. Nachr.”, 100 (1981), p.187-212.
16. Wolfersdorf L., A class of nonlinear Riemann-Hilbert problems for holomorpic functions. v. “Math. Nachr.”, 1984, 116, p.89-107.