1. ИЛМҲОИ ТАБИАТШИНОСӢ
1. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
1. THE NATURAL SCIENCES

1.1. МАТЕМАТИКА ВА МЕХАНИКА
1.1. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
1.1.MATHEMATICS AND MECHANICS

1.1.2.Муодилаҳои дифференсиалӣ ва физикаи математикӣ
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
1.1.2.Differential equations and mathematical physics

УДК 517.926
ББК 22.161.6

БАҲОИ ҲАЛЛИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ДАР ФАЗОИ ФУНКСИЯҲОИ ДАР ПОРЧАИ ОХИРНОК СУММИРОНИДАШАВАНДА

Зиёмидинов Баҳодур Мирзомидинович *- номзади илмҳои физикаю-математика, дотсенти кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон, e-mail: ziemidinov67@mail.ru.*

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЙ

Зиёмидинов Баходур Мирзомидинович *- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики, e-mail: ziemidinov67@mail.ru*

EVALUATION OF DECISIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE SPACE SUMMED ON FINITE CUT OF FUNCTIONS

Ziyomidinov Bahodur Mirzomidinovich *- Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Sciences. Tajik State University of Law, Business and Politics.*

Калимаҳои калидӣ: *системаи муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби олӣ, фазои функсияҳои суммиронидашаванда, баҳои ҳалҳо, масъалаи Коши.*

Дар мақолаи мазкур масъалаи оид ба баҳоҳои нормаи ҳалҳои системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби m *дар фазои функсияҳои суммиронидашаванда дар порчаи охирнок омӯхта шудааст. Исбот карда шудааст, ки нормаи ҳалро дар фазои функсияҳои* $m-1$ *маротиба дифференсиронидашаванда бо ҳосилаи тартиби* $m-1$ *мутлақ бефосила бо ёрии суммаи нормаи ҳал ва тарафи рост дар фазои функситяҳои суммиронидашаванда, баҳо додан мумкин аст.*

Ключевые слова: *система линейных дифференциальных уравнений высшего порядка, пространство суммируемых функций, оценки решений, задача Коши.*

В данной статье изучается задача об оценки норм решений системы дифференциальных уравнений

m - го порядка в пространстве суммируемых на конечном отрезке функций. Доказано, что норма решения в пространстве $m-1$ раз дифференцируемых функций, у которых производная $m-1$ - го порядка абсолютно непрерывна, можно оценить через сумму норм решения и правой части в пространстве суммируемых функций.

***Key words:** linear system of higher order differential equations, spaces of summable functions estimates of solutions, Cauchy problem.*

This article studies the problem of estimating the norms of solutions of a system of differential equations of the mth order in the space of functions summable over a finite interval. It is proved that the norm of a solution in the space m-1 of differentiable functions for which the derivative of the m-1st order is absolutely continuous can be estimate in terms of the sum of the norms of the solution and the right-hand side in the space of summable functions.

Системаи муодилаҳои тартиби олии $x^{(m)}+A_1x^{(m-1)}+\cdots+A_mx=f(t), \quad 0\le t\le 1,\ x\in R^n,$ 1) -ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $A_j=A_j(t)-$ матрисаҳои квадратии тартиби n, ки элементҳояш аз фазои $L=L_1[0,1]$ буда, компонентаҳои вектор-функсияи $f(t)$ аз L аст.

Баҳои априории барои ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ ҳосил карда шуда, ки аз рӯи нормаи фазои нисбатан тангтари $E\subset F$ нисбат ба фазои коэффитсиентҳо ва тарафи рост F бо ёрии нормаҳои ҳалҳо ва тарафи рост дар F масъалаи муҳим ба шумор меравад. Чунин баҳои априориро ҳангоми тадқиқи масъалаҳо дар бораи нормалӣ ҳалшавандагии муодилаҳои дифференсиалӣ истифода бурдан мумкин аст (ниг., масалан ба [1]).

Дар мақола барои системаи намуди (1), масъалаҳои дар боло қайдкардашуда, барои ҳолати $E=C^{m-1}-$ фазои Банах, ки вектор-функсия $m-1$ маротиба дар порчаи $[0,1]$ бефосила дифференсиронидашаванда буда [2], $F=L$ аст, омӯхта шудааст.

Қайд менамоем, ки ҳалли ситемаи намуди (1) гуфта вектор-функсияи $x(t)\in C^{m-1}$ –ро дар назар дорем, ки барои он ҳосилаи $x^{(m-1)}(t)$ дар порчаи $[0,1]$ мутлақ бефосила аст. Бинобар, мувофиқи теоремаи Лебег (ниг., масалан ба [3]) ҳосилаи $x^{(m)}(t)$ дар порчаи $[0,1]$ суммиронидашаванда мешавад.

Аввал системаи муодилаҳои дифференсиалии якҷинсаи

$$x^{(m)}+A_1x^{(m-1)}+\cdots+A_mx=0, \qquad 0\le t\le 1 \qquad (2)$$

ситемаи намуди (1)-ро дида мебароем.

Зерин ҷой дорад

Теоремаи 1. *Барои дилхоҳ ҳалли* $x(t)$ *- и муодилаи якҷинсаи намуди (2) баҳои*

$$\|x\|_{C^{m-1}}\le M\|x\|_L, \qquad (3)$$

$$\left\|x^{(m)}\right\|_L\le M\|x\|_L, \qquad (4)$$

дуруст аст, ки дар ин ҷо M ададест, ки фақат аз доимии M_0 боваста буда, аз формулаи

$$M_0=\sum_{j=1}^{m}\int_0^1\left|A_j(t)\right|dt\,.$$

муайян карда мешавад.

Исбот. Аз системаи муодилаҳои тартиби олии намуди (2) ба системаи муодилаҳои тартиби якум мегузарем. Бигзор $x=(x_1,\ldots,x_n)$ бошад. Фарз мекунем, ки $u=(u_1,\ldots,u_m)$

аст, ки дар ин ҷо

$$u_1 = (x_1, \dots, x_n),\;\; u_2 = (x'_1, \dots, x'_n), \dots,\;\; u_m = \left(x_1^{(m-1)}, \dots x_n^{(m-1)}\right)$$

бошад. Онгоҳ аз системаи намуди (2) системаи зеринро ҳосил менамоем:

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = 0, \qquad (5)$$

ки дар ин ҷо

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ A_m(t) & A_{m-1}(t) & A_{m-2}(t) & \cdots & A_1(t) \end{pmatrix}$$

мебошад. Ҳалли $u(t)$ —и системаи намуди (5), ҳалли бефосилаи муодилаи интегралии намуди

$$u(t) = u(s) - \int_s^t A(\tau)\, u(\tau) d\tau, \qquad 0 \le t \le 1$$

аст, ки дар ин ҷо $s \in [0, 1]$ нуқтаи додашуда буда, $u(s)$ вектори дар R^{nm} додашуда мебошад. Бинобар, нормаи $|u(t)|$ — ҳалли $u(t)$, нобаробарии интегралии зеринро қаноат мекунад:

$$|u(t)| \le |u(s)| + \int_s^t |A(\tau)||u(\tau)|\, d\tau.$$

Аз ин ҷо, дар асоси леммаи Гронуолл-Беллман (ниг., масалан ба [4]) ҳосил менамоем:

$$|u(t)| \le C|u(s)|, \quad \forall\, t, s \in [0, 1], \qquad (6)$$

ки дар ин ҷо

$$C = \exp \int_0^1 |A(\tau)|\, d\tau.$$

Ба ҳалли муодилаи (2) баргашта, дар асоси нобаробариҳои (6) ва Коши-Буняковский [3] ҳосил мекунем:

$$\left|x^{(i)}(t)\right| \le C \sum_{k=0}^{m-1} \left|x^{(k)}(s)\right|, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad t, s \in [0, 1]. \qquad (7)$$

Ишораҳо дохил менамоем:

$$a_i = \left\|x^{(i)}\right\|_L, \quad S_i = a_0 + a_1 + \dots + a_i, \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Нобаробарии (7)-ро нисбат ба s дар порчаи $[0, 1]$ интегронида, ҳосил менамоем:

$$\left|x^{(i)}(t)\right| \le CS_{m-1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \qquad (8)$$

Аз нобаробарии (8) ва системаи (2) баҳои зеринро ҳосил менамоем:

$$a_m \le C_1 S_{m-1}, \quad C_1 = M_0 C$$

ё ин ки

$$S_m \le (C_1 + 1) S_{m-1}. \qquad (9)$$

Аз тарафи дигар, соҳиб мешавем:

$$S_i - a_0 \le \frac{3}{h} S_{i-1} + h S_{i+1} - h(a_0 + a_1), \quad i = 1, 2, \dots\;,\; 0 < h \le \frac{1}{2}.$$

Аз баски $a_0 \le S_{i-1} \le \frac{1}{h} S_{i-1}$ аст, пас дар нобаробарии болоӣ гузориши $h = h_i$ — ро ичро намуда, ҳосил менамоем:

$$S_i \leq \frac{4}{h_i} S_{i-1} + h_i S_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad 0 < h_i$$

$$\leq \frac{1}{2}. \qquad (10)$$

Ададҳои $h_i -$ ро пайдарпай аз шартҳои зерин интихоб менамоем:

$$h_{m-1}(1 + C_1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{h_{m-2}}{h_{m-1}} \cdot 8 = \frac{1}{2}, \dots, \frac{h_1}{h_2} \cdot 8 = \frac{1}{2}.$$

Онгоҳ аз системаҳои нобаробариҳои (9) ва (10) баҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$S_{m-1} \leq 4^{m(m-1)}(1 + C_1)^{m-1} \cdot S_0.$$

Аз ин ҷо ва нобаробариҳои (8) ва (9) баҳои матлуб ҳосил мегардад:

$$\|x\|_{C^{m-1}} \leq M_1 \|x\|_L ,$$

ки дар ин ҷо

$$M_1 = mCM_0(1 + C)^{m-1} \cdot 4^{m(m-1)}.$$

Аз (10) ва системаи (2) чунин натиҷа бармеояд:

$$\left\|x^{(m)}\right\|_L$$

$$\leq CM_1 \|x\|_L. \qquad (11)$$

Қайд менамоем, ки аз баҳои

$$|B(\tau)| \leq 1 + \sum_{j=1}^{m} \left|A_j(\tau)\right|$$

натиҷа мебарояд, ки доимии $C -$ ро аз (11) бо ёрии M_0 чунин баҳо додан мумкин аст:

$$C \leq e^{1+M_0}.$$

Ба сифати M адади CM_1 –ро қабул намуда, баҳоҳои (3) ва (4) -ро ҳосил менамоем.

Теоремаи 1 исбот шуд.

Акнун системаи муодилаҳои ғайриякҷинсаи намуди (1) -ро дида мебароем. Барои ин система зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2. *Барои ҳалли дилхоҳи* $x(t)$*- и* системаи муодилаҳои ғайриякҷинсаи намуди (1) баҳои зерин дуруст аст:

$$\|x\|_{C^{m-1}} \leq M_2(\|x\|_L + \|f\|_L),$$

$$\left\|x^{(m)}\right\|_L \leq M_3(\|x\|_L + \|f\|_L),$$

ки дар ин ҷо M_2 *аз формулаи зерин муайян карда мешавад:*

$$M_2 = max\{M, \ (\bar{M} + m)C\}$$

ки барои ин

$$\bar{M} = CM_1 \qquad C = exp \int_0^1 |A(\tau)| d\tau,$$

$$M_1 = mCM_0(1 + C)^{m-1} \cdot 4^{m(m-1)}, \qquad M_3 = 1 + M_0 M_2.$$

Исбот. Ҳалли хусусии $x_1(t)$ –и системаи намуди (1), ки шартҳои аввалаи

$$x(t_0) = 0, \dots, x^{(m-1)}(t_0) = 0$$

-ро қаноат мекунад, ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$x_1(t)$$

$$= \int_{t_0}^{t} V_m(t, s) f(s) ds , \qquad (12)$$

ки дар ин ҷо матриса-функсияи $V_m(t, s) -$ ҳалли масъалаи Коши:

$$V^{(m)} + A_1 V^{(m-1)} + \cdots + A_m V = 0, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

$$V^{(i-1)}(s) = \delta_{im} \cdot I_n, \quad i = 1, 2, \dots, m\,,$$

аст ва I_n – матрисаи воҳидии тартиби n ва $\delta_{im} = \begin{cases} 1, & i = m, \\ 0, & i \ne m. \end{cases}$

Вектор-функсияи

$$U(t) = \left(V_m(t,s)z, \frac{\partial V_m}{\partial t}(t,s)z, \dots, \frac{\partial^{m-1} V_m}{\partial t^{m-1}}(t,s)z \right), \quad z \in R^n$$

системаи намуди (2) ва шарти аввалаи $U(s) = (0, \dots, 0,\ z)$ –ро қаноат мекунад. Бинобар, аз нобаробарии намуди (3) ҳосил менамоем:

$$\left| \frac{\partial^i V_m}{\partial t^i}(t,s)z \right| \le C|z|, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad 0 \le t$$
$$\le 1. \qquad (13)$$

Аз шарти (13) баҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$max \left| \frac{\partial^i V_m}{\partial t^i}(t,s)z \right| \le C, \quad i$$
$$= 0, 1, \dots, m-1. \qquad (14)$$

Дар навбати худ аз (13) ва (14) чунин натиҷа мебарояд:

$$\left\| x_1^{(i)} \right\|_C = max \left| \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^i V_m}{\partial t^i}(t,s) f(s) ds \right| \le C \left| \int_{t_0}^{t} |f(s)| ds \right| \le C \|f\|_L.$$

Ҳамин тавр, баҳои зерин дуруст аст:

$$\|x_1\|_{C^{m-1}} \le mC \cdot \|f\|_L, \quad \|x_1\|_L$$
$$\le C \cdot \|f\|_L\,. \qquad (15)$$

Акнун ҳалли умумии системаи намуди (1)-ро баҳо медиҳем. ҳалли умумии системаи намуди (1)-ро ба намуди $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ менависем, ки дар ин ҷо $x_0(t)$ –ҳалли умумии системаи намуди (1) буда, $x_1(t)$ –ҳалли хусусии намуди (12) мебошанд. Аз (3) ва (15) соҳиб мешавем:

$$\|x\|_{C^{m-1}} \le \|x_0\|_{C^{m-1}} + \|x_1\|_{C^{m-1}} \le M\|x_0\|_L + mC\|f\|_L \ \le$$

$$\le M(\|x\|_L + \|x_1\|_L) + mC\|f\|_L \le M\|x\|_L + (M+m)C\|f\|_L \ \le$$

$$\le M_2(\|x\|_L + \|f\|_L). \qquad (16)$$

Аз системаи (1) ҳосил менамоем:

$$\left\| x^{(m)} \right\|_L \le \|f\|_L + \sum_{j=1}^{m} \left\| A_j x^{(m-j)} \right\|_L \le \|f\|_L +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left\|A_j\right\|_L \cdot \max_{0\le t\le 1}\left|x^{(m-j)}(t)\right| \le \|f\|_L + M_0\|x\|_{C^{m-1}} \ .$$

Инак, баҳои (16)-ро ба назар гирифта, ҳосил мекунем:

$$\left\|x^{(m)}\right\|_L \le \|f\|_L + M_0M_2(\|x\|_L + \|f\|_L) \le M_3(\|x\|_L + \|f\|_L).$$

Теоремаи 2 исбот шуд.

ПАЙНАВИШТ

1. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Красносельский М.А. Нелинейные почти периодические колебания / М.А.Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов – М.: Наука, 1970. – 352 с.
3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М.: Наука, 1972. – 496 с.
4. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П.Демидович – М.: Наука, – 1967. – 472 с.

REFERENCES

1. Naimark, M.A. Linear differential operators / M.A. Naimark - Moscow: Nauka, 1969. - 528 p.
2. Krasnoselsky M.A. Nonlinear almost periodic oscillations / M.A. Krasnoselsky, V.Sh. Burd, Yu.S. Kolesov - M.: Nauka, 1970. - 352 p.
3. Kolmogorov, A. N. Elements of the theory of functions and functional analysis Kolmogorov, S. V. Fomin - M.: Nauka, 1972. - 496 p.
4. Demidovich, B.P. Lectures on the mathematical theory of stability / B.P. Demidovich - M.: Nauka, - 1967. - 472 p.