1. ИЛМҲОИ ТАБИАТШИНОСӢ
1. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
1. THE NATURAL SCIENCES

1.1. МАТЕМАТИКА ВА МЕХАНИКА
1.1. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
1.1.MATHEMATICS AND MECHANICS

1.1.2.Муодилаҳои дифференсиалӣ ва физикаи математикӣ
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
1.1.2.Differential equations and mathematical physics

УДК – 517.95
ББК –22.311

О МНОГООБРАЗИЯХ РЕШЕНИЙ УМЕРЕННОГО РОСТА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БИЦАДЗЕ

Байзаев Саттор *– доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП (Республика Таджикистан, г.Худжанд),*
Воситова Дилором Абдурасуловна *– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, Худжанд),*
e–mail: vositova.dilorom@mail.ru

ДАР БОРАИ НАВЪҲОИ ҲАЛЛИ АФЗОИШИ МУЪТАДИЛИ СИСТЕМАИ ЭЛЛИПТИКИИ ЧОР МУОДИЛА ВА МУОДИЛАҲО БО ОПЕРАТОРИ БИТСАДЗЕ

Байзаев Саттор *– доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири ДДҲБСТ (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд)*
Воситова Дилором Абдурасуловна *– номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Муҳсинов МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд),*
e–mail: vositova.dilorom@mail.ru

ON MANIFOLDS OF SOLUTIONS OF MODERATE GROWTH OF AN ELLIPTIC SYSTEM OF FOUR EQUATIONS AND EQUATIONS WITH THE BITSADZE OPERATOR

Bayzaev Sattor *– Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science, Tajik State University of Law, Business and Politics (Tajikistan Republic, Khujand)*
Vositova Dilorom Abdurasulovna *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent of the Department of Mathematical Analysis named after professor A.Mukhsinov, State Educational Instituon "KhSU named after academician B.Gafurov" (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: vositova.dilorom@mail.ru*

Ключевые слова: *уравнения с частными производными, эллиптическая система, бианалитические функции, метааналитические функции, решения полиномиального роста, пространства Шварца.*

В статье рассматриваются вещественная эллиптическая система четырех уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными первого порядка

$$LU \equiv U_x + AU_y + BU = 0, \quad U \in R^4, \tag{1}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 -$*единичная матрица второго порядка,* $B = (b_{ij}) -$*вещественная постоянная матрица четвёртого порядка и уравнение с постоянными комплексными коэффициентами вида*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw + c\overline{w} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) является обобщением системы уравнений Бицадзе, для которой задача Дирихле не является нётеровой. Оказалось, что для систем вида (1) и уравнений вида (2) задача об ограниченных на всей плоскости решениях может быть не нётеровой. В статье приведены примеры систем видов (1) и (2), имеющие бесконечное число линейно независимых ограниченных на всей плоскости решений. Этот факт указывает на то, что исследование систем вида (1) и (2) в пространствах функций, определенных на всей плоскости является актуальным.

Для систем (1) и (2) изучаются задачи о решениях, определенных во всей плоскости и принадлежащих пространству распределений умеренного роста, в частности пространству $P_N -$ *функций, растущих на бесконечности не быстрее чем* $(|x| + |y|)^N$. *Предложены схемы нахождения решений этих систем из соответствующих пространств. Описаны структуры носителей образа Фурье решений, которые могут быть точечными или состоять из непрерывных замкнутых кривых. Для уравнения (2) установлено, что пространство решений умеренного роста при любых коэффициентах* a, b, c *является ненулевым и пространство решений, растущих на бесконечности не быстрее чем* $|z|^N$ *при* $a = 0$ *является бесконечномерным, а при* $a \neq 0$ *– конечномерным.*

Вожаҳои калидӣ: *муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, системаи эллиптикӣ, функсияҳои бианалитикӣ, функсияҳои метааналитикӣ, ҳалли афзоиши полиномӣ, фазои Шварц.*

Дар мақола системаи чор муодилаҳои эллиптикӣ бо ҳосилаҳои хусусии ду тағирёбандаи мустақили ҳақиқии тартиби якум

$$LU \equiv U_x + AU_y + BU = 0, \quad U \in R^4, \tag{1}$$

ки $A = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 -$*матритсаи воҳидии тартиби дуюм,* $B = (b_{ij}) -$*матритсаи ҳақиқии доимии тартиби чорум ва муодила бо коффитсиентҳои комплексии намуди*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw + c\overline{w} = 0, \tag{2}$$

дида баромада шудааст. Муодилаи (2) муодилаи умумикардашудаи системаи муодилаҳои Битсадзе мебошад, ки барои онҳо масъалаи Дирихле нётерӣ нест. Маълум шуд, ки барои системаҳои намуди (1) ва муодилаи намуди (2) масъала оид ба ҳалҳои дар тамоми ҳамворӣ маҳдуд буда, нётерӣ набуданаш мумкин аст. Дар мақола мисолҳои системаи намуди (1) ва (2), оварда шудаанд, ки ҳаллҳои бешумори хаттӣ новобастаи дар ҳамворӣ маҳдудро доранд. Ин далел нишон медиҳад, ки омӯзиши системаҳои намуди (1) ва (2) дар фазои функсияҳои дар тамоми ҳамворӣ муайяншуда муҳим аст.

Барои системаҳои намуди (1) ва (2) масъалаи ҳалли дар тамоми ҳамворӣ муайянбуда ва дар фазои мӯътадилафзуншаванда тааллуқ дошта, аз ҷумла фазои $P_N -$ *функсияҳое, ки дар беохирӣ на тезтар аз* $(|x| + |y|)^N$ *меафзоянд, омӯхта шуддааст. Схемаи ёфтани ҳалли ингуна системаҳо аз фазоҳои мувофиқ оварда шудааст. Сохтори барандаи табдилдиҳии Фурйе тавсиф карда шудааст, ки кадоме метавонад нуқта ё аз каҷхаттаҳои бефосилаи сарбаста иборат бошад. Барои муодилаи (2) нишон дода шудааст, ки фазои ҳалҳои мӯътадилафзуншаванда барои дилхоҳ коэффитсиентҳои* a, b, c *ғайринулӣ буда, фазои ҳалҳо, ки дар беохирӣ на тезтар аз* $|z|^N$ *меафзоянд, ҳангоми* $a = 0$ *будан беохирченака ва ҳангоми* $a = 0$ *будан охирченака мебошад.*

Key words: *partial differential equations, elliptic system, bianalytic functions, metaanalytic functions, solutions of polynomial growth, Schwartz spaces.*

The article considers a real elliptic system of four partial differential equations with two first-order independent variables

$$LU \equiv U_x + AU_y + BU = 0, \quad U \in R^4, \tag{1}$$

where is a second-order $A = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$, E_2 *– identity matrix,* $B = (b_{ij})$ *– a real constant matrix of the fourth order, and an equation with constant complex coefficients of the form*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw + c\overline{w} = 0, \tag{2}$$

Equation (2) is a generalization of the system of Bitsadze equations for which the Dirichlet problem is not Noetherian. It turned out that for systems of the form (1) and equations of the form (2), the problem of solutions bounded on the entire plane may not be Noetherian. The article gives examples of systems of types (1) and (2) that have an infinite number of linearly independent solutions bounded on the entire plane. This fact indicates that the study of systems of the form (1) and (2) in spaces of functions defined on the whole plane is relevant.

For systems (1) and (2), we study problems of solutions defined in the whole plane and belonging to the space of distributions of moderate growth, in particular, to the space of P_N *– functions growing at infinity no faster than* $(|x|+|y|)^N$. *Schemes for finding solutions to these systems from the corresponding spaces are proposed. The structures of supports of the Fourier image of solutions, which can be point like or consist of continuous closed curves, are described. For equation (9), it is established that the space of solutions of moderate growth for any coefficients* a, b, c *is nonzero, and the space of solutions growing at infinity* $|z|^N$ *no faster than at* $a = 0$ *is infinite-dimensional, and at* $a \neq 0$ *- finite-dimensional.*

Задачи о решениях уравнений с частными производными и систем таких уравнений в неограниченных областях представляют большой интерес. Такие ситуации встречаются в ряде прикладных задач, когда влияние граничных условий несущественно и ими можно пренебречь. Тогда приходят к задаче в неограниченных областях (см., например, [1]).

В настоящей статье рассматриваются вещественные и комплексные уравнения с частными производными эллиптического типа во всей плоскости. Для таких уравнений изучаются задачи о решениях, определенных во всей плоскости и принадлежащих пространству распределений умеренного роста, в частности пространству ограниченных функций.

1. Вещественные системы уравнений.

Рассмотрим систему четырех уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными, записанную в векторной форме

$$LU \equiv U_x + AU_y + BU = 0, \quad U \in R^4, \tag{1}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$, E_2 – единичная матрица второго порядка, $B = (b_{ij})$ – вещественная постоянная матрица четвёртого порядка.

Так как у матрицы A собственные значения равны $\pm i$ (i – мнимая единица), то система (1) является эллиптической (см. [2]).

В работах [3], [4] для двумерных систем вида (1) с матрицей A, не имеющей вещественных собственных значений, исследованы задачи о решениях из пространства S' – умеренно растущих распределений на плоскости R^2 и из пространства P_N – решений, растущих на бесконечности не быстрее чем $(|x|+|y|)^N$ и, в частности, установлено равенство

$$\dim P_N = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \det B < 0. \\ N+1 \ \text{при} \ \det B = 0, \ B \neq 0, \\ 2(N+1) \quad \text{при} \ \ B = 0, \\ 2(N+1) \quad \text{при} \ \det B > 0. \end{cases}$$

В работе [5] для общих систем вида (1) при условии, что матрицы A и B являются перестановочными установлено, что в эллиптическом случае $\dim P_N = n(N+1)$, а в гиперболическом случае пространство P_N либо нулевое, либо бесконечномерное.

Ниже для системы (1) будем исследовать задачу о решениях из пространства S'. Отметим, что в отличие от двумерного случая для четырехмерной системы пространство P_N может быть бесконечномерным.

В системе (1) произведя преобразование Фурье, с учетом свойств этого преобразования (см. [6]), приходим к системе функциональных уравнений вида

$$(i\xi E_4 + i\eta A + B)\hat{U}(\xi, \eta) = 0, \qquad (2)$$

где $\hat{U}$ – образ Фурье распределения U, E_4 – единичная матрица четвертого порядка. Решения системы (2) зависят от матрицы

$$P(\xi, \eta) = i\xi E_4 + i\eta A + B,$$

которую называют символом оператора L (см. [7]). Например, если $R(\xi, \eta) \equiv \det P(\xi, \eta) \neq 0$ $\forall(\xi, \eta) \in R^2$, то система (2) и тем самым и система (1) в пространстве S' имеют только нулевое решение. Такая ситуация очень важна при изучении систем вида (1) с переменными коэффициентами в гёльдеровых пространствах C_α^1 (см. [8]).

Вычислим определитель

$$\det P(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} i\xi + b_{11} & b_{12} & -i\eta + b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & i\xi + b_{22} & b_{23} & -i\eta + b_{24} \\ i\eta + b_{31} & b_{32} & i\xi + b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & i\eta + b_{42} & b_{43} & i\xi + b_{44} \end{vmatrix}$$

матрицы $P(\xi, \eta)$:

$$P(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^2 + a_{20}\xi^2 + 2a_{11}\xi\eta + a_{02}\eta^2 + a_{00} + \\ + i(a_{30}\xi^3 + a_{21}\xi^2\eta + a_{12}\xi\eta^2 + a_{03}\eta^3 + a_{10}\xi + a_{01}\eta), \qquad (3)$$

где коэффициенты a_{kj} определяются следующим образом:

$$a_{20} = -\sum_{1 \le j_1 < j_2 \le 4} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix},$$

$B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}$ – главные миноры второго порядка (см. [9]) матрицы B;

$$a_{11} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} b_{32} & b_{33} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{31} & b_{34} \\ b_{41} & b_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} - \right. \\ \left. - \begin{vmatrix} b_{23} & b_{24} \\ b_{33} & b_{34} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{21} & b_{24} \end{vmatrix} \right),$$

$$a_{02}=\begin{vmatrix} b_{21} & b_{24}\\ b_{31} & b_{34}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{22} & b_{24}\\ b_{42} & b_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13}\\ b_{42} & b_{43}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ b_{31} & b_{33}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b_{13} & b_{14}\\ b_{23} & b_{24}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b_{31} & b_{32}\\ b_{41} & b_{42}\end{vmatrix},$$

$$a_{00}=\det B,$$

$$a_{30}=a_{12}=-SpB,\ \ SpB-\text{след матрицы } B,$$

$$a_{21}=a_{03}=b_{13}+b_{24}-b_{31}-b_{42},$$

$a_{10}=\sum\limits_{1\le j_1<j_2<j_3\le 4} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ j_1 & j_2 & j_3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ j_1 & j_2 & j_3\end{pmatrix}$ – главные миноры третьего порядка матрицы B, $a_{01}=B_{31}^{(3)}+B_{42}^{(3)}-B_{13}^{(3)}-B_{24}^{(3)}$, $B_{kj}^{(3)}$ – миноры третьего порядка матрицы B, полученные вычеркиванием строки k и столбца j.

Из (3) и определения коэффициентов видно, что соотношение $P(\xi,\eta)=0$ эквивалентно двум уравнениям:

$$(\xi^2+\eta^2)^2+a_{20}\xi^2+2a_{11}\xi\eta+a_{02}\eta^2+a_{00}=0, \tag{4}$$

$$(\xi^2+\eta^2)(a_{30}\xi+a_{03}\eta)+a_{10}\xi+a_{01}\eta=0.. \tag{5}$$

Пусть Γ_1 и Γ_2 множество точек (ξ,η), удовлетворяющих уравнению (4) и (5) соответственно. Множество Γ_1, если непустое, будет замкнутой кривой (может быть две замкнутые кривые), симметричной относительно начало координат $O=(0,0)$, в случае $a_{11}=0$ симметричной относительно осей координат. Множество Γ_2 непустое и будет состоять из двух кривых, одна из которых может быть замкнутой, а другая – неограниченной, проходящей через точку O, также возможен случай $\Gamma_2=R^2$.

Носитель распределения $\hat{U}(\xi,\eta)$ принадлежит множеству $\Gamma=\Gamma_1\bigcap\Gamma_2$. Множество Γ может быть пустым, тогда $\hat{U}=0$, т.е. $U(x,y)\equiv 0$, может состоять из одной или четного числа точек, симметричных относительно точки O, а также может быть замкнутой кривой, в частности окружности, с центром в начале координат. Определяя Γ и используя теорему о структуре распределений с точечным носителем (см. [6]) или с носителем на окружности (см. [10]), можно найти $\hat{U}(\xi,\eta)$ и далее с помощью обратного преобразования Фурье определить $U(x,y)$.

Рассмотрим один пример. Пусть

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0\\ b_{12} & -b_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

и числа b_{11}, b_{12} одновременно не равны нулю. Находим коэффициенты a_{kj}:

$$a_{00}=-b_{11}^2-b_{12}^2,\ \ a_{10}=b_{11},\ \ a_{01}=-2b_{11}b_{12},$$

$$a_{20}=1-b_{11}^2-b_{12}^2,\ \ a_{11}=(1+b_{11})/2,\ a_{02}=2b_{11}+b_{12},$$

$$a_{30}=a_{21}=a_{12}=a_{03}=0.$$

Тогда уравнения (4) и (5) имеют вид:

$$(\xi^2+\eta^2)^2+\left(1-b_{11}^2-b_{12}^2\right)\xi^2+\left(1+b_{11}\right)\xi\eta+\left(2b_{11}+b_{12}\right)\eta^2-b_{11}^2-b_{12}^2=0, \tag{6}$$

$$b_{11}\xi - 2b_{11}b_{12}\eta = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (6) определяет замкнутую кривую, симметричную относительно начало координат (при $b_{11} = -1$ относительно осей координат). Если $b_{11} = 0$, то уравнение (7) превращается в тождество и поэтому $\Gamma = \Gamma_1$. Возьмем произвольно две симметричные точки $(\pm\xi_0, \pm\eta_0)$ на Γ и положим

$$\hat{U}(\xi,\eta) = \sum_{k,\, j\ge 0, k+j\le m} \frac{\partial^{k+j}}{\partial\xi^k \partial\eta^j}\left[c_{kj}\delta(\xi-\xi_0,\, \eta-\eta_0) + d_{kj}\delta(\xi+\xi_0,\, \eta+\eta_0)\right], \qquad (8)$$

здесь $m-$ произвольное неотрицательное число, c_{kj}, d_{kj} $-$ комплексные постоянные, $\delta-$ функция Дирака. В (8) совершив обратное преобразование Фурье, находим

$$U(x,y) = e^{i(\xi_o x+\eta_o y)}P(x,y) + e^{-i(\xi_o x+\eta_o y)}Q(x,y),$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ многочлены порядка не выше m, коэффициенты которых определяются через коэффициенты системы (1).

В случае $b_{11} \ne 0$ уравнение (7) определяет прямую $\xi = 2b_{11}\eta$, которая пересекает кривую Γ_1 в двух симметричных точках. В этом случае можно использовать формулу вида (8).

2. Комплексные уравнения.

Рассмотрим уравнение с частными производными вида

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw + c\bar{w} = 0, \qquad (9)$$

где $a, b, c-$комплексные постоянные. Это уравнение является обобщением уравнений Бицадзе (см. [1]) и метааналитических функций (см. [11]). Уравнение (9) будем изучать в пространстве Шварца $S' = S'(C), C-$комплексная плоскость.

Уравнение (9) в пространстве S' эквивалентно следующему функциональному уравнению

$$(-\zeta^2 + 2ia\xi + 4b)\hat{w}(\zeta) + 4c\hat{\bar{w}}(\zeta) = 0, \qquad (10)$$

где $\hat{w}(\zeta)-$ образ Фурье функции $w(z)$. Из (10) заменой ζ на $-\zeta$ и взятием операции комплексного сопряжения, с учетом равенства $\overline{\hat{w}(-\zeta)} = \hat{\bar{w}}(\zeta)$, получаем функциональное уравнение

$$4\bar{c}\hat{w}(\zeta) + (-\bar{\zeta}^2 + 2i\bar{a}\bar{\zeta} + 4\bar{b})\hat{\bar{w}}(\zeta) = 0. \qquad (11)$$

Уравнения (10) и (11) будем изучать как систему линейных алгебраических уравнений в $S' \times S'$ с неизвестным $\omega = \begin{pmatrix}\hat{w}\\ \hat{\bar{w}}\end{pmatrix}$. Определитель этой системы равен

$$\Delta(\zeta) = |\zeta|^4 - 4|a|^2|\zeta|^2 - 8\,\mathrm{Re}(\bar{b}\zeta^2) + 16(|b|^2 - |c|^2) + 2i\,\mathrm{Re}\left[\xi(\bar{a}|\zeta|^2 - 4a\bar{b})\right].$$

Пусть $\Gamma-$ множество решений уравнения $\Delta(\zeta) = 0$. Ниже будет показано, что Γ является непустым. Носитель распределения $\omega(\zeta)$ принадлежит Γ. Зная Γ можно определить $\omega(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Лемма. *Множество Γ является непустым.*

Доказательство. Уравнение $\Delta(\zeta) = 0$ при $ab \ne 0$ в полярных координатах (r,φ) эквивалентно системе функциональных уравнений

$$f(r,\varphi) \equiv r^4 - 4\left[|a|^2 + 2|b|\cos(2\varphi - \beta)\right]r^2 + 16(|b|^2 - |c|^2) = 0, \qquad (12)$$

$$g(r,\varphi) \equiv r^3\cos(\varphi - \alpha) - 4|b|\cos(\varphi + \alpha - \beta)\cdot r = 0, \qquad (13)$$

здесь $\alpha = \arg a,\ \beta = \arg b$. Случай $ab = 0$ будем рассматривать отдельно.

Через Γ_1 и Γ_2 обозначим множество решений уравнений (12) и (13) соответственно. Так как при $\varphi = \beta/2$ выражения $\varphi - \alpha$ и $\varphi + \alpha - \beta$ отличаются знаком и функция $\cos\varphi$ чётная, то точка $M = (2\sqrt{|b|}; \beta/2)$ принадлежит множеству Γ_2. Вычислим значение функции $f(r,\varphi)$ в точке M:

$$f(2\sqrt{|b|}, \beta/2) = 16|b|^2 - 4\left(|a|^2 + 2|b|\right) \cdot 4|b| + 16\left(|b|^2 - |c|^2\right) = -16\left(|a|^2|b| + |c|^2\right). \quad (14)$$

Это значение отрицательное, поэтому точка M находится внутри кривой Γ_1. Заметим, что Γ_1 в зависимости от знака числа $|b| - |c|$ состоит из двух или одной замкнутых симметричных относительно точки $O(0,0)$ кривых, расположенных одна внутри другой или пересекающихся, содержащих внутри точку O или расположенных симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через точку O (см. рис. 1); Γ_2 может состоят из двух компонент: неограниченная кривая симметричная относительно точки O и объединение замкнутой кривой, симметричной относительно точки O и прямой (см. рис. 2), а также может совпадать и с плоскостью.

Таким образом, точка M находится на кривой Γ_2 и внутри замкнутой кривой Γ_1. Поэтому, кривые Γ_1 и Γ_2 пересекаются и следовательно, $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим случай $ab = 0$. Если $a = b = 0$, то при $c = 0$ множество Γ состоит из единственной точки O, а при $c \neq 0$ – из окружности $\left\{z : |z| = 2\sqrt{|c|}\right\}$. Если $a = 0,\ b \neq 0,$ то $\Gamma_2 = R^2$ и в силу (14) $f(2\sqrt{|b|}, \beta/2) = -16|c|^2 \leq 0$. Тогда $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_1 \neq \varnothing$. Если же $a \neq 0,\ b = 0,$ то уравнение Γ_1 имеет вид

$$f(r,\varphi) \equiv r^4 - 4|a|^2 r^2 - 16|c|^2 = 0, \quad (15)$$

а уравнение Γ_2 –

$$r^3 \cos(\varphi - \alpha) = 0. \quad (16)$$

Из (15) имеем

$$r^2 = 2\left(|a|^2 + \sqrt{|a|^4 + 4|c|^2}\right),$$

т.е. Γ_1 – окружность с центром в точке O. Из (16) следует, что $r = 0$ или $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2} + \alpha$, т.е. Γ_2 – прямая, проходящая через точку O. Поэтому $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ состоит из двух точек.

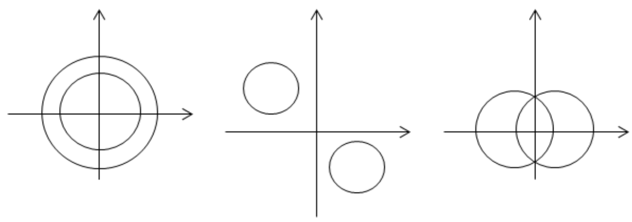

Рис. 1.

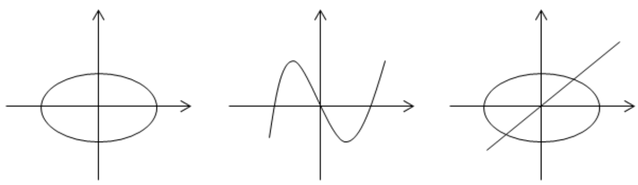

Рис. 2.

Резюмируя выше сказанное о структуре множеств Γ_1 и Γ_2, и сравнивая рис. 1 и рис. 2 заключаем, что при $a=0$ множество Γ может иметь вид как в рис. 1, а при $a \neq 0$ может состоят из одной точки O, четного числа точек, симметричных относительно O.

Справедлива следующая

Теорема. *а) Пространство решений умеренно роста уравнения (9) при любых коэффициентах* a, b, c *является ненулевым.*

б) Пространство решений уравнения (9), растущих на бесконечности не быстрее чем $|z|^N$ *при* $a=0$ *является бесконечномерным, а при* $a \neq 0$ *– конечномерным.*

Действительно, справедливость утверждения а) следует из леммы, утверждение б) следует из того что при $a=0$ множество Γ состоит из континиума точек, а при $a \neq 0$ состоит из конечного числа точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Берс Л. Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. М.: Мир, 1966. – 351 с.
3. Байзаев С., Воситова Д.А. О решениях одной эллиптической системы в пространстве функций умеренного роста. Вестник Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики. - 2009. №1. - С. 92-96.
4. Воситова Д.А. О решениях умеренного роста одной эллиптической системы. Доклады Академии наук Республики Таджикистан. - 2012. - Т. 55. №1. - С. 23-29.
5. Байзаев С., Воситова Д. А. О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными. Уфимский математический журнал. - 2013. Т. 5 , № 2 . – С. 12-17
6. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике / В.С. Владимиров. М.: Наука, 1976. – 280 с.
7. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / Л. Хёрмандер. М.: Мир, 1986. - 455 с.
8. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости / С. Байзаев. Новосибирск. НГУ, 1999. - 74 с.
9. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. М.: Наука, 1978, - 280 с.
10. Байзаев С., Рахимова М.А. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях. Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. №1. С. 3 – 13.
11. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения / М.Б. Балк // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1991. Том 85. – С. 187–246.

REFERENCES

1. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations / A.V. Bitsadze. M.: Nauka, 1981. - 448 p.
2. Bers L. Partial Differential Equations / L. Bers, F. John, M. Shekhter. M.: Mir, 1966. - 351 p.
3. Baizaev S., Vositova D.A. On solutions of an elliptic system in the space of functions of moderate growth. Bulletin of the Tajik State University of Law, Business and Politics. - 2009. No. 1. - P. 92-96.
4. Vositova D.A. On solutions of moderate growth of one elliptic system. Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2012. - V. 55. No. 1. - pp. 23-29.
5. Baizaev S., Vositova D. A. On solutions of one system of partial differential equations with two independent variables. Ufa Mathematical Journal. - 2013. Vol. 5, No. 2. – pp. 12-17
6. Vladimirov V.S. Generalized functions in mathematical physics / V.S. Vladimirov. M.: Nauka, 1976. - 280 p.
7. Hormander L. Analysis of linear differential operators with partial derivatives. T. 2. Differential operators with constant coefficients / L. Hörmander. M.: Mir, 1986. - 455 p.
8. Baizaev S. Elliptic systems with bounded coefficients on the plane / S. Baizaev. Novosibirsk. NSU, 1999. - 74 p.
9. Lancaster P. Matrix theory / P. Lancaster. M.: Nauka, 1978, - 280 p.
10. Baizaev S., M.A. Rakhimova. On some functional equations in Schwartz spaces and their applications. Ufa Mathematical Journal. 2018. Vol. 10. No. 1. pp. 3 - 13.
11. Balk M.B. Polyanalytic functions and their generalizations / M.B. Balk // Itogi nauki i tekhniki. Series: Modern problems of mathematics. Fundamental directions, 1991. Volume 85. - pp. 187–246.