УДК 517.5
ББК 32.973

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n-ПОПЕРЕЧНИКОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Тухлиев Дилшод Камаридинович *- преподаватель кафедры информатики и вычислительной математики ХГУ имени академика Б.Гафурова (Республика Таджикистан, г. Худжанд), e-mail:* dtukhliev@mail.ru

ҚИМАТИ n-ҚУТРҲОИ АНИҚ БАРОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲО ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН

Тухлиев Дилшод Қамаридинович *- омӯзгори кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарор ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail:* dtukhliev@mail.ru

EXACT VALUES OF n-CROSS-SECTIONS FOR SOME CLASSES OF FUNCTIONS IN THE BERGMAN SPACE

Tukhliev Dilshod Kamaridinovich *- Teacher of the Department of Informatics and Computational Mathematics Science of Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e-mail:* dtukhliev@mail.ru

Ключевые слова: *ряд Маклорена, точные константы, наилучшее приближение, комплексные алгебраические полиномы, поперечники, банахово пространство, пространство Бергмана.*

В работе найдены точные значения n-поперечников для некоторых классов функций в теоремах теории приближения аналитических в единичном круге функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Бергмана.

Калимаҳои калидӣ: *қатори Маклорен, доимиҳои аниқ, наздикшавии беҳтарин, полиномҳои комплексии алгебравӣ, қутрҳо, фазои банахи, фазои Бергман.*

Дар мақола қимати n-қутрҳои аниқ барои баъзе синфи функсияҳо дар теоремаҳои назарияи наздиккунии функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ ба воситаи бисёрузваҳои алгебравии комплексӣ ва баъзе дар фазои Бергман ёфта шудааст.

Key words*: Maclaurin row, exact constants, best approximation, complex algebraic polynomials, cross-sections, banach space, Bergman space.*

In this paper, we find the exact values of n-cross-sections for some classes of functions in the theorems of the approximation theory of analytic functions in the unit circle by complex algebraic polynomials in the Bergman space..

Теория приближения функций является одной из центральных ветвей математического анализа, занимающегося вопросами приближенного представления сложных функций с помощью более простых и удобных функций. Теория приближения в своём развитии прошла три этапа. Она берёт своё начало с мемуаров великого русского математика П.Л.Чебышева, опубликованных в 50-годы 19 века, где он доказал существования полинома, наименее уклоняющегося от заданной непрерывной функции. Основная задача первого этапа -приближение конкретных функций при помощи тригонометрических и алгебраических многочленов.

В 1885 году немецкий математик К. Вейерштрасс доказал теоремы, утверждающие, что произвольную непрерывную функцию можно приблизить с любой наперед заданной точностью алгебраическими или тригонометрическими полиномами. С появлением теорем К.Вейерштрасса возникла общая проблема: как по структурным свойствам функции узнать, с какой скоростью функция приближается полиномами. Изучая эту проблему, Д.Джексон и С.Н.Бернштейн установили, что определенная гладкость функций обеспечивает соответствующий порядок убывания наилучших приближений, и наоборот. Основная тематика второго этапа -приближение классов функций заданной гладкости алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

Третий этап теории приближения функций связан с именем А.Н. Колмогорова, который в 1936 г. ввёл в теорию приближений понятие поперечника множества, известного теперь как поперечник по Колмогорову. Отыскание точного значения колмогоровского поперечника связано с указанием наилучшего приближающегося подпространства заданной размерности - это подпространство, которое реализует поперечник по Колмогорову.

Кроме поперечника Колмогорова, в теории приближений используется ряд других поперечников: Бернштейна, Гельфанда, линейный, проекционный, тригонометрический и информационный.

В нахождение точного значения различных поперечников некоторые результаты окончательного характера получены в работах М.Ш.Шабозова и его учеников [1-8]. Полученные в данной работе результаты являются своеобразным развитием идей, изложенных в цитированных выше работах, то есть, изложены отыскание точных значений n-поперечников в теоремах теории приближения аналитических в единичном круге функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Бергмана.

Приведем нужные нам в дальнейшем определения и обозначения.

Пусть $U:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. $\mathrm{A}(U)$ – множество аналитических в круге U функций комплексного переменного

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k,\quad z=\rho e^{i\varphi},\quad 0<\rho\le 1,\quad 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{1}$$

Будем говорить, что функция $f\in\mathrm{A}(U)$ принадлежит пространству $B_q:=B_q(0)\quad(1\le q<\infty)$, если $f(z)$ – суммируемая по Лебегу в области U функция, причём

$$\frac{1}{\pi}\iint_{(U)}|f(z)|^q\,d\sigma=\frac{1}{\pi}\iint_{(U)}|f(x+iy)|^q\,dxdy<\infty. \tag{2}$$

Совокупность всех функций $f(z)\in\mathrm{A}(U)$, для которых имеет место ограничение (2), образует *банахово* пространство, которое называется пространством *Бергмана* B_q, $(1\le q<\infty)$ [9].

Мы в данной работе рассмотрим случай $q=2$, то есть когда B_2 есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_{B_2}=\frac{1}{\pi}\iint_{(U)}f(z)\overline{g}\,d\sigma$$

и соответствующей нормой

$$\|f\|_2:=\|f\|_{B_2}=\left(\frac{1}{\pi}\iint_{(U)}|f(z)|^2\,d\sigma\right)^{1/2}<\infty, \tag{3}$$

где $d\sigma$ – элемент площади.

Очевидно, что, переходя к полярным координатам, норму (3) можно записать следующим образом

$$\|f\|_2=\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\varphi})|^2\,\rho d\rho d\varphi\right)^{1/2}<\infty. \tag{4}$$

Учитывая разложение в ряд Маклорена (1) и применяя равенство Парсеваля, из (4) получаем

$$\|f\|_2=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{1/2}.$$

Обозначим через P_n – множество комплексных алгебраических полиномов степени не более n:

$$\mathrm{P}_n:=\left\{p_n(z):p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k,\quad a_k\in\mathbb{C}\right\}.$$

Равенством

$$E_{n-1}(f)_2:=E(f,\mathrm{P}_{n-1})_2=\inf\left\{\|f-p_{n-1}\|_2:p_{n-1}(z)\in\mathrm{P}_{n-1}\right\}$$

определим величину наилучшего приближения функции $f\in B_2$ элементами множества P_{n-1} в метрике пространства B_2.

В этой работе вычислим точные значения различных n-поперечников классов $W_2^{(m)}, W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h)$ и $W_2^{(m)}(\omega_r, h)$ в пространстве B_2. Для этих классов функций мы доказали следующие равенства [см. 2]

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_{B_2} = \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}},$$

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = 2^{-r/2} n^{-(m-\nu)} \left\{\int_0^h (1-\cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt\right\}^{-1/2},$$

$$\mathcal{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{1}{2^{r/2}} \cdot \left\{\int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt\right\}^{-1/2}.$$

Эти равенства означали верхние грани наилучших совместных приближений на классах функций $W_2^{(m)}, W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h)$ и $W_2^{(m)}(\omega_r, h)$. Из этих равенств при $\nu = 0$ получаем наилучшие приближения указанных классов функций:

$$E_{n-1}(W_2^{(m)})_{B_2} = \mathcal{E}_{n,0}(W_2^{(m)})_{B_2} = \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}, \quad (5)$$

$$E_{n-1}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \mathcal{E}_{n,0}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2} \cdot n^m} \cdot \left\{\int_0^h (1-\cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt\right\}^{-1/2}, \quad (6)$$

$$E_{n-1}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \mathcal{E}_{n,0}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2} \cdot \alpha_{n,m}} \cdot \left\{\int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt\right\}^{-1/2}. \quad (7)$$

Равенства (5)-(7) дают оценку сверху при вычислении n-поперечников. Напомним ряд определений и обозначений, которыми будем пользоваться в этой работе. Пусть S – единичный шар в пространстве B_2; $\Lambda_n \subset B_2 - n$-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset B_2$ –подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}: B_2 \to \Lambda_n$ –линейный непрерывный оператор; $\mathcal{L}^{\perp}: B_2 \to \Lambda_n$ –непрерывный оператор линейного проектирования; Q –выпуклое центрально–симметричное подмножество из B_2. Величины

$$b_n(Q, B_2) = sup\{sup\{\varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\}: \Lambda_{n+1} \subset B_2\},$$

$$d_n(Q, B_2) = inf\{sup\{inf\{\| f - g \|_2 : g \in \Lambda_n\}: f \in Q\}: \Lambda_n \subset B_2\},$$

$$\delta_n(Q, B_2) = inf\{inf\{sup\{\| f - \mathcal{L}f \|_2 : f \in Q\}: \mathcal{L}B_2 \subset \Lambda_n\}: \Lambda_n \subset B_2\},$$

$$d^n(Q, B_2) = inf\{sup\{\| f \|_2 : f \in Q \cap \Lambda^n\}: \Lambda^n \subset B_2\},$$

$$\Pi_n(Q, B_2) = inf\{inf\{sup\{\| f - \mathcal{L}^{\perp} f \|_2 : f \in Q\}: \mathcal{L}^{\perp}B_2 \subset \Lambda_n\}: \Lambda_n \subset B_2\},$$

Называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным *n-поперечниками множества* Q в пространстве B_2. Вышеперечисленные n-поперечники монотонны по n и между ними в гильбертовом пространстве B_2 выполняются соотношения [10, 11]:

$$b_n(Q, B_2) \le d^n(Q, B_2) \le d_n(Q, B_2) = \delta_n(Q, B_2) = \Pi_n(Q, B_2). \quad (8)$$

Сначала в качестве Q рассмотрим класс $W_2^{(m)}$ функций $f \in B_2^{(m)}$, для которых $\| f^{(m)} \|_{B_2} \le 1$. Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. Для любых $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ справедливы равенства

$$\lambda_n\left(W_2^{(m)}, B_2\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(m)}\right)_2 =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-m+1)} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}}, \quad (9)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n- поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Оценку сверху всех рассматриваемых n-поперечников класса $W_2^{(m)}$ получаем из равенство (5) в силу которого имеем:

$$\lambda_n\left(W_2^{(m)}, B_2\right) \le E_{n-1}\left(W_2^{(m)}\right)_2 \le \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}. \quad (10)$$

Для получения оценки снизу всех вышеперечисленных n-поперечников, равных правой части равенства (9), в (n+1)-мерном подпространстве комплексных алгебраических полииномов степени $\leq n$ вида

$$\mathcal{P}_n := \{p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}\} \tag{11}$$

введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n(z) \in \mathcal{P}_n : \| p_n \|_2 \leq \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}} \right\},$$

$n > m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+$, и покажем, что шар $S_{n+1} \subset W_2^{(m)}$. В самом деле, для произвольного полинома $p_n \in S_{n+1}$ в силу определения класса $W_2^{(m)}$ имеем:

$$\| p_n^{(m)} \|_2 = \sum_{k=m}^{n} \alpha_{k,m}^2 |a_k|^2 \cdot \frac{1}{k-m+1} = \sum_{k=m}^{n} \alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{k+1}{k-m+1} \cdot \frac{|a_k|^2}{k+1} \leq$$

$$\leq \alpha_{n,m}^2 \cdot \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \sum_{k=m}^{n} \frac{|a_k|^2}{k+1} \leq \alpha_{n,m}^2 \cdot \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \| p_n \|_2^2 \leq$$

$$\leq \alpha_{n,m}^2 \cdot \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \frac{n-m+1}{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,\mathrm{m}}^2} = 1,$$

откуда и следует включение $S_{n+1} \subset W_2^{(m)}$. Но тогда, согласно определению бернштейновского n-поперечника и соотношения (8), между n-поперечниками запишем оценку снизу

$$\lambda_n(W_2^{(m)}, B_2) \geq b_n(W_2^{(m)}, B_2) \geq b_n(S_{n+1}, B_2) \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,\mathrm{m}}} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-m+1)} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}}. \tag{12}$$

Требуемое равенство (9) получаем из сопоставления оценки сверху (10) и оценки снизу (12). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для любых $n, r \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+$ *и* $h \in (0, \pi/n$ имеют место равенства

$$\lambda_n(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h), B_2) = E_{n-1}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2}} \cdot \frac{1}{n^m} \cdot \left\{ \int_0^h (1 - \cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}, \tag{13}$$

где λ_n – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Теорема 3. При любых $n, r \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ *и* $h \in (0, \pi/(n-m)]$ имеют место равенства

$$\lambda_n(W_2^{(m)}(\omega_\mathrm{r}, h), B_2) = E_{n-1}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}} \cdot \left\{ \int_0^h (1 - \cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}. \tag{14}$$

Приводим доказательство теоремы 3, поскольку теорема 2 доказывается аналогичным образом.

Доказательство теоремы 3. Пользуясь соотношениями (9) и равенством (8), запишем оценку сверху n-поперечников:

$$\lambda_n(W_2^{(m)}(\omega_r, h), B_2) \leq E_{n-1}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{r/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}} \cdot \left\{ \int_0^h (1 - \cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}. \tag{15}$$

Для получения оценки снизу всех вышеперечисленных n-поперечников, равной выражению в правой части неравенств (15) в (n+1)-мерном подпространстве комплексных алгебраических полиномов степени n вида (11), введём в рассмотрение шар

$$\sigma_{n+1} := \{p_n(z) \in P_n : \| p_n \|_{B_2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2^{r/2} \cdot \alpha_{n,m}} \cdot \{\int_0^h (1 - \cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt\}^{-1/2}\},$$

где $n > m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+$, и докажем включение $\sigma_{n+1} \subset W_2^{(m)}(\omega_r, h)$. Для этого мы должны доказать, что для произвольного полинома $p_n \in \sigma_{n+1}$ выполняется неравенство

$$\int_0^h \omega_r^2(p_n^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \le 1.$$

С этой целью из равенства (14) получаем

$$\omega_r^2(p_n^{(m)};t)_{B_2} = 2^r\sup_{|h|\le t}\sum_{k=m}^n \frac{\alpha_{k,m}^2}{k+1}|c_k(f)|^2\cdot(1-\cos(k-m)t)^r \le$$

$$\le 2^r\cdot\alpha_{n,m}^2\cdot(1-\cos(n-m)t)^r\cdot\sum_{k=m}^n\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\le$$

$$\le 2^r\cdot\alpha_{n,m}^2\cdot(1-\cos(n-m)t)^r\cdot\sum_{k=0}^n\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}=$$

$$= 2^r\cdot\alpha_{n,m}^2\cdot(1-\cos(n-m)t)^r\cdot\| p_n\|_{B_2}^2.$$

Итак, мы доказали, что для произвольной $p_n\in\sigma_{n+1}$ имеет место неравенство

$$\omega_r^2(p_n^{(m)};t)_{B_2}\le 2^r\cdot\alpha_{n,m}^2\cdot(1-\cos(n-m)t)^r\cdot\| p_n\|_{B_2}^2.$$

Умножив обе части полученного неравенства на функцию $\sin\frac{\pi}{h}t$ и интегрируя по отрезку $[0,h]$, получаем

$$\int_0^h \omega_r^2(p_n^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \le$$

$$\le 2^r\cdot\alpha_{n,m}^2\cdot\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\cdot\| p_n\|_{B_2}^2. \qquad (16)$$

Так как полином $p_n\in\sigma_{n+1}$, то для её нормы получаем

$$\| p_n\|_{B_2}^2\le\frac{1}{2^r\cdot\alpha_{n,m}^2}\cdot\left\{\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}^{-1}. \qquad (17)$$

Учитывая неравенство (17), из (16) имеем

$$\int_0^h \omega_r^2(p_n^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \le$$

$$\le 2^r\cdot\alpha_{n,m}^2\cdot\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\times$$

$$\times\left\{2^r\cdot\alpha_{n,m}^2\cdot\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}^{-1}=1.$$

Последнее неравенство означает, что шар σ_{n+1} принадлежит классу $W_2^{(m)}(\Omega_r,h)$, а потому пользуясь, определением n-поперечника Бернштейна, запишем оценку снизу

$$\lambda_n(W_2^{(m)}(\omega_r,h),B_2)\ge b_n(W_2^{(m)}(\omega_r,h),B_2)\ge$$

$$\ge b_n(\delta_{n+1},B_2)\ge\frac{1}{2^{r/2}\cdot\alpha_{n,m}}\cdot\left\{\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}^{-1/2}. \qquad (18)$$

Из сравнения неравенств (15) и (18) вытекает требуемое равенство (14), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 3 при любых $n,m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\lambda_n(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r,\pi/n),B_2)=\frac{\sqrt{r+1}}{2^{r+1/2}}\cdot\frac{1}{n^{m-1/2}},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любое из n-поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot)$ è $\Pi_n(\cdot)$.

Аналогично, из теоремы 3 вытекает

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 3, в частности когда $h=\pi/(n-m), n>m, n,m\in\mathbb{N}$, справедливы равенства

$$\lambda_n(W_2^{(m)}(\omega_r,\pi/(n-m)),B_2)=\frac{\sqrt{n-m}}{\alpha_{n,m}}\cdot\frac{\sqrt{r+1}}{2^{r+1/2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Мат. заметки, 2018, т.103, №4, с.613-627.

2. Шабозов М.Ш., Тухлиев Д.К. О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана // ДАН РТ, 2018, т.61, №5, с.419-426.
3. Тухлиев Д.К. Модуль непрерывности высших порядков и наилучшее приближения функций в пространстве Бергмана // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки, 2021, №1 (56), с.3-7.
4. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем. заметки, 2013, Т. 94. Вып. 6, с. 908-917.
5. Шабозов М.Ш., Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя и значения n-поперечников некоторых классов функций // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2015, №2, с.39-47.
6. Тухлиев К. О некоторых экстремальных задачах наилучших приближений целыми функциями // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin), 2015, вып. 2(155), с. 213-220.
7. Тухлиев К. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями и значения средних поперечников некоторых функциональных классов // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin), 2015, вып. 2(155), с. 229-231.
8. Тухлиев К. О приближении периодических функций в L_2 и значениях поперечников некоторых классов функций // Модел. и анализ информ. систем, 2015, т. 22. Вып. 1. с. 127-143.
9. Bergman, S. The cernel function and conformal mapping // S. Bergman – Math. survays, 5 N. Y.: Amer. Math. soc. – 1950. – 163 p.
10. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – Изд.Моск.ун-та, 1976, 325 с.
11. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory, Springer – Verlag, Berlin, 1985, 252 p.

REFERENCES

1. Shabozov M. Sh., Saidusainov M. S. Upper edges of approximation of some classes of functions of a complex variable by Fourier series in the space L2 and the values of n-crossers / / Mat. notes, 2018, vol. 103, No. 4, pp. 613-627.
2. Shabozov M. Sh., Tukhliev D. K. On the joint approximation of functions and their successive derivatives in the Bergman space / / DAN RT, 2018, vol. 61, No. 5, pp. 419-426.
3. Tukhliev D. K. Higher-order continuity module and the best approximation of functions in the Bergman space / / Scientific Notes of the B. Gafurov KhSU, Natural and Economic Sciences Series, 2021, No. 1 (56). pp. 3-7.
4. Shabozov M. Sh., Tukhliev K. The best polynomial approximations and cross-sections of some functional classes in L2 / / Math. notes, 2013, vol. 94. Issue 6, pp. 908-917.
5. Shabozov M. Sh., Tukhliev K., Murodov K. N. Exact estimates of the convergence rate of Fourier-Bessel series and the values of n-cross-sections of some classes of functions / / Problems of Computational and Applied Mathematics, 2015, No. 2, pp. 39-47.
6. Tukhliev K. On some extreme problems of the best approximations by integer functions / / Vestnik Tomsk State Pedagogical University (TSPU Bulletin), 2015, issue 2(155), pp. 213-220.
7. Tukhliev K. The best root-mean-square approximations by integer functions and the values of the average cross-sections of some functional classes / / Vestnik Tomsk State Pedagogical University (TSPU Bulletin), 2015, issue 2(155), pp. 229-231.
8. Tukhliev K. On the approximation of periodic functions in L2 and the values of the diameters of some classes of functions / / Model. and the analysis of inform. systems, 2015. Vol. 22. Issue 1. pp. 127-143.
9. Bergman, S. The cernel function and conformal mapping // S. Bergman – Math. survays, 5 N. Y.: Amer. Math. soc. – 1950. – 163 p.
10. Tikhomirov V. M. Some questions of the approximation theory. - Moscow Publishing House University, 1976, 325 p.
11. [7] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory, Springer – Verlag, Berlin, 1985, 252 p.