УДК 517.54, 517.968.23
ББК 86.39

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОБОБЩАЮЩИХ УРАВНЕНИЕ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Садиков Маъруфжон Обидович *– преподаватель кафедры высшей и прикладной математики ХГУ имени академика Б.Гафурова (Республика Таджикистан, Худжанд), e-mail: sodikov-8686@list.ru*

ДОИР БА ҲАЛҲОИ СИСТЕМАҲОИ ЭЛЛИПТИКӢ, КИ МУОДИЛАИ ФУНКСИЯҲОИ МЕТААНАЛИТИКРО УМУМӢ МЕГАРДОНАД

Содиқов Маъруфҷон Обидович *- муаллими кафедраи математикаи олӣ ва амалӣ, ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: sodikov-8686@list.ru*

ON SOLUTIONS OF ELLIPTIC SYSTEMS GENERALIZING THE EQUATION METAANALYTIC FUNCTIONS

Sodikov Marufjon Obidovich *– The Lecturer of the Department of Hiqher and Applied Mathematic of the Khujand State University named after academician B. Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e-mail: sodikov-8686@list.ru*

Ключевые слова: *бианалитические функции, метааналитические функции, пространство Шварца, преобразование Фурье.*

В данной работе рассматриваются эллиптические комплексные системы уравнений, обобщающие уравнения метааналитических функций в пространстве обобщённых функций медленого роста.

Вожаҳои калидӣ: *функсияҳои бианалитикӣ, функсияҳои метааналитикӣ, фазои Швартс, табдилдиҳии Фуре.*

Дар ин мақола системаҳои комплексии эллиптикӣ, ки муодилаи функсияҳои метааналитикиро умумӣ мегардонад, дар фазои функсияҳои умумикардашудаи суст афзуншаванда барраси шудааст.

Key words: *bianalytic functions, metaanalytic functions, Schwarz space, Fourier transform.*

In this paper, we consider elliptic complex systems of equations that generalize the equation of metaanalytic functions in the space of generalized functions of slow growth.

Рассмотрим эллиптическую комплексную систему второго порядка следующего вида

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w + c(z)\overline{w} = f(z), \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $a, b, c, f -$ заданные в некоторой области $G \subset C$, $C -$комплексная плоскость функции. При $a = b = c = f = 0$ получаем уравнение бианалитических функций или так называемую систему уравнений Бицадзе ([1], + [3]), для которой задача Дирихле не является нётеровой. Оказывается для систем вида (1) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости решениях может быть не нётеровой. Например, система

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + c\overline{w} = 0,$$

где $c -$ненулевая постоянная, имеет бесконечное число линейно независимых ограниченных на C решений

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

здесь $p -$ произвольная постоянная,

$$q = \overline{p}e^{i(\gamma+2\alpha)},\ \gamma = \arg c,\ 0 \le \alpha < 2\pi,$$

$$\omega(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c|}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}z\right)\right]$$

Когда a и b являются постоянными и $c = f = 0$ система (1) превращается в уравнение метааналитических функций [4].

В связи с этим, исследование системы (1) является актуальным. Эту систему будем рассматривать в пространстве Шварца $S' = S'(C)-$ пространство умеренно растущих распределений на C и изложим процедуру нахождения всех решений однородного уравнения $Lw = 0$

Путь коэффициенты a,b,c постоянные и $f = 0.$ В пространстве S' уравнение $Lw = 0$ эквивалентно функциональному уравнению

$$(-\zeta^2 + 2ia\zeta + 4b)\hat{w}(\zeta) + 4c\hat{\bar{w}}(\zeta) = 0, \tag{2}$$

где $\hat{w}(\zeta), \hat{\bar{w}}(\zeta) -$ образы Фурье распределений $w(\zeta), \bar{w}(\zeta) \in S'$. Используя равенство $\hat{\bar{w}}(-\zeta) = \bar{\hat{w}}(\zeta)$, из (2) получим

$$4\bar{c}\hat{w}(\zeta) + (-\bar{\zeta}^2 + 2i\bar{a}\bar{\zeta} + 4\bar{b})\hat{\bar{w}}(\zeta) = 0. \tag{3}$$

Соотношения (2) и (3) образуют систему двух линейных алгебраических уравнений в пространстве S'. Определитель этой системы равен

$$\Delta(\zeta) = |\zeta|^4 - 4|a|^2|\zeta|^2 - 8\operatorname{Re}(\bar{b}\zeta^2) + 16(|b|^2 - |c|^2) - 4i\operatorname{Re}\left(\bar{a}|\zeta|^2 - 4a\bar{b}\right)\zeta. \tag{4}$$

Если $\Delta(\zeta) \neq 0 \quad \forall \zeta \in C,$ то система (2), (3) будет иметь только нулевое решение $\hat{w}(\zeta) = 0$ и тогда $w(z) \equiv 0$. Если же $\Delta(\zeta) = 0$ на каком-нибудь множестве K, то носитель $\operatorname{supp}\hat{w}(\zeta)$ распределения $\hat{w}(\zeta)$ будет принадлежать множеству K, и зная K можно определить $\hat{w}(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Пусть $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 -$ множество нулей функций $\Delta(\zeta), \operatorname{Re}\Delta(\zeta), \operatorname{Im}\Delta(\zeta)$ соответственно. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и множества Γ_1, Γ_2 имеют такие свойства: $\Gamma_1 -$ ограничено, симметрично относительно начало координат O, при вещественном $b-$ относительно вещественной оси; $\Gamma_2 = C$ при $a = 0,$ $\Gamma_2 -$ проходит через точку O.

Будем изучать структуру множеств Γ_1 и Γ_2.

Случай 1: $a = 0.$ Тогда $\Gamma_2 = C$, а Γ_1 определяется уравнением

$$|\zeta|^4 - 8\operatorname{Re}(\bar{b}\zeta^2) + 16(|b|^2 - |c|^2) = 0. \tag{5}$$

Если $b = c = 0,$ то Γ_1 состоит из одной точки $\zeta = 0,$ поэтому $\Gamma = \{0\}.$ По теореме о структуре обобщенных функций с точечным носителем [5] имеем:

$$\hat{w}(\zeta) = \sum_{k,tj=0}^{N} c_{jk} \frac{\partial^{j+k}}{\partial\zeta^j \partial\bar{\zeta}^k}\delta(\zeta), \tag{6}$$

где $c_{jk} -$ постоянные, $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial\zeta^j \partial\bar{\zeta}^k} -$ производные δ-функции Дирака, $N -$ произвольное неотрицательное целое число. Совершая обратное преобразование Фурье, находим

$$w(z) = \sum_{\substack{j+k=0 \\ j,k\geq 0}}^{N} d_{jk} z^j \bar{z}^k,$$

$d_{jk} -$ постоянные. Представляя эту функцию в виде суммы однородных по z и $\bar{z}$ многочленов и подставляя в уравнение $Lw = 0$ можно показать, что

$$w(z) = P_N(z) + Q_{N-1}(z)\bar{z},$$

где P_N и $Q_{N-1} -$ многочлены по z степени N и N-1 соответственно.

Если $b = 0$ и $c \neq 0$, то $\Gamma_1 -$ окружность $\left\{\zeta : |\zeta| = 2\sqrt{|c|}\right\}$ В этом случае используя теорему о структуре обобщенных функций с носителем на окружности (см. [6]), имеем

$$\hat{w}(\zeta) = \sum_{j=0}^{N} c_j(\theta) \times \delta^{(i)}(r - r_0),\ \zeta = re^{i\theta},$$

где $c_j(\theta) - 2\pi$-периодические обобщенные функции, $r_0 = 2\sqrt{|c|}$. Далее, совершая обратное преобразование Фурье, находим $w(z)$ и подставляя в уравнение $Lw = 0,$ можно найти окончательный вид решений этого уравнения.

Пусть $b \neq 0$. Левую часть уравнения (5) обозначим через $f(\zeta)$.

Полагая $\zeta = \xi + i\eta,\ b = b_1 + ib_2$, имеем

$$f(\zeta) \equiv f(\xi,\eta) = (\xi^2+\eta^2)^2 - 8\left[b_1(\xi^2-\eta^2) + 2b_2\xi\eta\right] + 16(|b|^2 - |c|^2).$$

Далее, пусть $\eta = t\xi,\ t \in R.$ Тогда

$$f(\xi, t\xi) = (1+t^2)\xi^4 - 8\left[(b_1(1-t^2) + 2b_2 t\right]\xi^2 + 16(|b|^2 - |c|^2).$$

Если $|b| < |c|,$ то $f(0,0) = 16\left(|b|^2 - |c|^2\right) < 0$ и так как $f(\xi, t\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to +\infty,$ то найдется точка $\xi_0 = \xi_0(t),$ что $f(\xi_0, t\xi_0) = 0.$ Следовательно, Γ_1 является замкнутой кривой, содержащей внутри точку (0,0).

Уравнение кривой Γ_1 запишем в полярных координатах $\xi = \rho\cos\varphi,\ \eta = \rho\sin\varphi$:

$$\rho^4 - 8|b|\rho^2\cos(2\varphi + \varphi_0) + 16(|b|^2 - |c|^2) = 0, \tag{7}$$

где $\cos\varphi_0 = \dfrac{b_1}{|b|},\ \sin\varphi_0 = -\dfrac{b_2}{|b|}.$ При $|b| < |c|$ уравнение (7) относительно ρ^2 имеет единственное решение

$$\rho^2 = 4|b|\cos(2\varphi + \varphi_0) + 4\sqrt{-|b|^2\sin^2(2\varphi + \varphi_0) + |c|^2}.$$

Это уравнение определяют замкнутую кривую, симметричную, относительно начало координат, при $b_2 = 0$ – относительно осей координат.

При $|b| = |c|$ из (7) получаем соотношения

$$\rho = 0 \text{ или } \rho^2 = 8|b|\cos(2\varphi + \varphi_0),$$

которые определяют кривую вида «восьмерки» (лемниската), проходящую через начало координат.

При $|b| > |c|$ уравнение (7) относительно ρ^2 имеет два решения

$$\rho^2 = 4|b|\cos(2\varphi + \varphi_0) \pm 4\sqrt{-|b|^2\sin^2(2\varphi + \varphi_0) + |c|^2}$$

и при $c \neq 0$ множество Γ_1 состоит из двух замкнутых кривых, симметричных друг другу относительно осей координат, причём одна находится в правой полуплоскости, а другая – в левой.

Таким образом, множество Γ есть одна или две замкнутые кривые, симметричные относительно начало координат или осей координат. Взяв на Γ две произвольные симметричные точки $\pm\zeta_0$, получаем

$$\hat{w}(\zeta) = \sum_{\substack{j+k \le N \\ j,k \ge 0}} \left[c_{jk} \frac{\partial^{j+k}\delta(\zeta + \zeta_0)}{\partial\zeta^j \partial\bar{\zeta}^k} + d_{jk} \frac{\partial^{j+k}\delta(\zeta - \zeta_0)}{\partial\zeta^j \partial\bar{\zeta}^k} \right], \tag{8}$$

$c_{jk},\ d_{jk}$ – постоянные и далее находим $w(z)$. Выбирая несколько пар точек вида $\pm\zeta_k$, можно строить богатое многообразие решений.

Если $c = 0$, то Γ_1 состоит из двух точек $(2\sqrt{|b|}; -\dfrac{\varphi_0}{2} + \pi k)$, $k = 0{,}1.$ В этом случае нужно воспользоваться формулой (8).

Случай 2. $a \neq 0.$ Если $b = 0$, то

$$\operatorname{Re}\Delta(\zeta) = |\zeta|^4 - 4|a|^2|\zeta| - 16|c|^2,\ \operatorname{Im}\Delta(\zeta) = -4|\zeta|^2\operatorname{Re}\bar{a}\zeta\ .$$

Множество Γ_1 будет окружностью $|\zeta| = r_0$, где $r_0 = \sqrt{2|a|^2 + 2\sqrt{|a|^4 + 4|c|^2}}$, а множество Γ_2 – прямой, проходящей через точку O. Поэтому множество Γ состоит из двух точек $\pm\zeta_0$, где $|\zeta_0| = r_0$ и $\operatorname{Re}\bar{a}\zeta_0 = 0.$ Опять нужно воспользоваться формулой (8).

Пусть $b \neq 0$. Уравнения кривых Γ_1 и Γ_2 в полярных координатах выглядят так

$$\rho^4 - 4(|a|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{b}e^{2i\varphi}))\rho^2 + 16(|b|^2 - |c|^2) = 0, \tag{9}$$

$$\rho\operatorname{Re}\left[e^{i\varphi}(\bar{a}\rho^2 - 4a\bar{b})\right] = 0. \tag{10}$$

В случаях $|b| < |c|$ и $|b| = |c|$ аналогично как при $a = 0$ можно показать, что Γ_1 является замкнутой кривой или кривой типа «восьмерки», симметричной относительно точки O. При $|b| > |c|$

множество Γ_1 может состоять из двух замкнутых кривых, симметричных друг другу относительно точки O или расположенной одна внутри другой и симметричной относительно точки O. Множество Γ_2 может быть неограниченной кривой (прямой) или замкнутой кривой, симметричных относительно точки O. Поэтому, множество Γ может состоять из одной точки O или нескольких симметричных относительно начало координат точек, в таких случаях нужно использовать формулы видов (6) и (8), а может быть и пустым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. М.: Наука, 1981. - 448с.
2. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений / А.Д. Джураев. М.: Наука, 1987. - 415 с.
3. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения / М.Б. Балк // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1991. Том 85. – С. 187–246.
4. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. - 296 с.
5. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике / В.С. Владимиров. М.: Наука, 1976. - 280 с.
6. Байзаев, С. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Уфимский математический журнал. 2018. – Том 10. №1. – С. 3 – 13.

REFERENCES

1. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations / A.V. Bitsadze. Moscow: Nauka, 1981 .-- 448p.
2. Dzhuraev A.D. Method of singular integral equations / A.D. Juraev. Moscow: Nauka, 1987 .-- 415 p.
3. Bulk MB Polyanalytic functions and their generalizations / M.B. Bulk // Results of Science and Technology. Series: Modern problems of mathematics. Fundamental Directions, 1991. Volume 85. - P. 187–246.
4. Vekua IN. New methods for solving elliptic equations / I.N. Vekua. M.-L .: GITTL, 1948 .-- 296 p.
5. Vladimirov V.S. Generalized functions in mathematical physics / V.S. Vladimirov. Moscow: Nauka, 1976 .-- 280 p.
6. Bayzaev S. On some functional equations in Schwarz spaces and their applications / S. Bayzaev, M.A. Rakhimova // Ufa Mathematical Journal. 2018. - Volume 10. No. 1. - P. 3 - 13.