УДК 517,837.2
ББК 22

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мухсинов Едгор Мирзоевич *- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП,*
e-mail- yodgor.mukhsinov@gmail.com

ДАР БОРАИ ЯК БОЗИИ ХАТТИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ДАР ФАЗОИ ГИЛБЕРТ

Мухсинов Едгор Мирзоевич **-** *номзади илмҳои физика ва математика, дотсенти кафедраи фанҳои риёзи-табиатшиносии муосири ДДҲБСТ,*
e-mail- yodgor.mukhsinov@gmail.com

ON ONE LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL GAME IN HILBERT SPACE

Mukhsinov Edgor Mirzoevich *- Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science, TSUPBP,*
e-mail- yodgor.mukhsinov@gmail.com

Ключевые слова: *интегро-дифференциальная игра, задача преследования, управления преследования, управления убегания, время преследования, гильбертовое пространство.*

В гильбертовом пространстве рассматривается задача преследования в смысле Л.С. Понтрягина для одной интегро-дифференциальной игры, описываемая линейным уравнением дробного порядка α. Доказана основная теорема о разрешимости задачи преследования.

Вожаҳои калидӣ: *бозии интегро-дифференсиалӣ, масъалаи таъқибкунӣ, идоракунии таъқибкунӣ, идоракунии гурехтан, вақти таъқибкунӣ , фазои Гилберт.*

Дар фазои Гилберт масъалаи таъқибкунӣ ба маънои Л.С.Понтрягин барои як бозии интегро-дифференсиалӣ дида мешавад, ки бо муодилаи хаттии тартиби касрии α навишта мешавад. Теоремаи асоси оиди ҳалшавандагии масъалаи таъқибкунӣ исбот шудааст.

Key words: *integro-differential game, pursuit problem, pursuit controls, evasion controls, pursuit time, Hilbert space.*

In a Hilbert space, the pursuit problem in the sense of L.S. Pontryagin for one integro-differential game described by a linear equation of fractional order α. The main theorem on the solvability of the pursuit problem is proved.

Предполагаем, что X, Y, Z- гильбертовые пространства, $U([0,\infty),Y)$- множество всех измеримых отображений, действующих из $[0,\infty)$ в Y, а линейная дифференциальная игра, описывается интегро- дифференциальным уравнением дробного порядка α (см. например[1] , стр.113)

$$D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds - Cu(t) + Dv(t) \qquad (1)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В дифференциальной игре (1) $t \geq 0, x(t) \epsilon X,$ $D_t^\alpha -$ дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$ т.е

$D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-1-\alpha} x^{(m)}(s)ds,\ \alpha > 0\ и\ m = [\alpha] + 1,$

A – замкнутый линейный плотно определенный оператор в X, $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ -семейство замкнутых линейных операторов в X с областями определения $D(B(t)) \supset D(A)$ такие, что функции $B(t)x$ сильно измеримые для $x \in D(A)$ и существует положительная скалярная функция $b(\cdot) \in$

$L^1_{loc}([0,\infty))$ такая, что $\|B(t)x\| \le b(t)(\|x\| + \|A(x)\|)$ для всех $x \in D(A)$ и для почти всех $t \ge 0$. При этом управления преследования $u(\cdot)\epsilon U([0,\infty),Y)$ и управления убегания $v(\cdot)\epsilon U([0,\infty),Z)$ удовлетворяют интегральным ограничениям

$$\int_0^\infty |u(s)|^2 ds \le \rho^2, \qquad \int_0^\infty |v(s)|^2 ds \le \sigma^2, \qquad (2)$$

где ρ , σ - заданные числа.

В дальнейшем, полагаем, что линейные ограниченные операторы

$C{:}\,Y \to X, D{:}\,Z \to X$ такие, что для любых управления преследования $u(\cdot)\epsilon U([0,\infty),Y)$и управления убегания $v(\cdot)\epsilon U([0,\infty),Z), t \ge 0$, задача Коши

$$D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds - Cu(t) + Dv(t),$$

$$x(0) = x_0, \qquad \mathrm{x}^n(0) = 0, \qquad n = 1,2,\dots,m-1. \qquad (3)$$

имеет решение

$$x(t\,) = S_\alpha(t)x_0 - \int_0^t S_\alpha(t-s)(Cu(s) - Dv(s))ds, \qquad (4)$$

где $\mathrm{S}_\alpha(\mathrm{t}) - \alpha$- резольвентный оператор ([1], стр.114), удовлетворяющий уравнению

$$D_t^\alpha S_\alpha(t) = AS_\alpha(t) + \int_0^t B(t-s)S_\alpha(s)ds$$

Замечание 1. В работе ([1], стр.117) показано, что когда $x_0 \in D(A)$ и отображение $-Cu(\cdot) + Dv(\cdot)$ из класса $W^{1,1}([0,T],X)$, то отображение $x(\cdot)$ задаваемой формулой (4) является решением задачи (3).

В дальнейшем, $M^\perp$ −ортогональное дополнение к M в X, $\pi -$ оператор ортогонального проектирования из X на $M^\perp$. Ясно, что $x \in$ M тогда и только тогда, когда $\pi x = 0$. Для игры (1) рассмотрим задачу преследования ([2] с.308).

Докажем следующую основную теорему о разрешимости задачи преследования.

Теорема . *Пусть выполнены следующие условия:*

1) непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция $J{:}\,[0,\infty) \to [0,\infty)$ *такая, что* $J(0) = 0, J(t) \ge t$ *при всех* $t \ge 0$*;*

2) существует непрерывно зависящий от $t \ge 0$ *линейный оператор* $L(t){:}\,Z \to Y$*, такой что* $\pi S_\alpha\big(J(t)\big)D = \pi S_\alpha(t)CL(t)$*;*

3) если функция $\lambda(t)$ *задается равенством*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \left\|L(s)v\big(J(t) - J(s)\big)J'(s)\right\|^2 ds : \int_0^{J(t)} \|v(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\}$$

то числа $T \ge 0, \tau \ge 0$ *такие, что* $J(T) = \tau + T$ *и при всех* $t \ge 0$ *имеет место равенство* $\alpha \ge \lambda(t)$*, где* $\alpha^2 = \rho^2 - \int_0^t \|\bar{u}(s)\|^2 ds$*, а* $\bar{u}(\cdot)$ *- некоторое допустимое управление преследования;*

4) начальная точка x_0 *такая, что имеет место включение*

$$\pi S_\alpha(T)x_0 \in \pi\int_0^\tau S_\alpha(\tau + T - s)C\bar{u}(s)ds + \left\{\int_0^T \pi S_\alpha(T - -s)C\rho(s)ds : \int_0^T \|\rho(s)\|^2 ds \le \big(\alpha - \lambda(T)\big)^2\right\} \qquad (5)$$

Тогда в игре (1) из начальной точки x_0 *возможно преследование за время* $\tau + T$.

Доказательство. В силу (5) существует такое интегрируемое отображение $\rho(\cdot)$, что имеет место равенство

$$\pi S_\alpha(T)x_0 = \int_0^\tau \pi S_\alpha(\tau + T - s)C\bar{u}(s)ds + \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)C\rho(s)ds \qquad (6)$$

Если $v(\cdot)$ - произвольное допустимое управление убегания, то соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t)\,, t \in [0,\tau), \\ \rho(t-\tau) + L(\tau + T - t)v\big(J(T) - J(\tau + T - t)\big) \cdot J'(\tau + T - t)\,, t \in [\tau, \tau + T] \\ 0\,, t > \tau + T \end{cases} \qquad (7)$$

Сперва покажем, что выбранное управление преследования $u(\cdot)$ допустимо, т.е. удовлетворяет соотношению (2).

Действительно, в силу 1), 2), 3) и (7) имеем:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \int_\tau^{\tau+T} \|u(s)\|^2 ds + \int_{\tau+T}^\infty \|u(s)\|^2 ds =$$

$$= \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \int_0^T \|u(\tau+T-t)\|^2 dt = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds +$$

$$+ \int_0^T \|p(T-t) + L(t)v(J(T)-J(t)) \cdot J'(t)\|^2 dt = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds +$$

$$+ \int_0^T < p(T-t) + L(t)v\big(J(T)-J(t)\big) \cdot J'(t), p(T-t) +$$

$$+ L(t)v\big(J(T)-J(t)\big) \cdot J'(t) > dt = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds +$$

$$+ \int_0^T [\|p(T-t)\|^2 + 2 \cdot < p(T-t), L(t)v\big(J(T)-J(t)\big)J'(t) > +$$

$$+ \|L(t)v(J(T)-J(t)) \cdot J'(t)\|^2 dt \le \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \big(\alpha - \lambda(T)\big)^2 +$$

$$+ 2(\alpha - \lambda(T)) \cdot \lambda(T) + \lambda^2(T) = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \alpha^2 = \rho^2,$$

$$\text{т. е.} \int_0^\infty \|\bar{u}(s)\|^2 ds \le \rho^2$$

Теперь докажем, что $\pi x(\tau + T) = 0$. Учитывая (4), (6) (7) для решения $x(\cdot)$ задачи (3) имеем

$$\pi x(\tau+T) = \pi S_\alpha(T)x_0 -$$

$$- \int_0^{\tau+T} \pi S_\alpha(\tau+T-s) \cdot \big(Cu(s) - Dv(s)\big)\, ds = \int_0^\tau \pi S_\alpha(\tau+T-s) C\bar{u}\,(s) ds +$$

$$+ \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) Cp(s) ds - \int_0^\tau \pi S_\alpha(\tau+T-s) C\bar{u}\,(s) ds -$$

$$- \int_\tau^{\tau+T} \pi S_\alpha(\tau+T-s) \cdot Cu(s) ds + \int_0^{\tau+T} \pi S_\alpha\,(\tau+T-s) Dv(s) ds =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) Cp(s) ds - \int_\tau^{\tau+T} \pi S_\alpha(\tau+T-s) Cu\,(s) ds +$$

$$+ \int_\tau^{\tau+T} \pi S_\alpha(\tau+T-s) Dv(s) ds = \int_0^T \pi S_\alpha(t) Cp(T-t) dt -$$

$$- \int_0^T \pi S_\alpha(T-t) Cu(\tau+t) dt + \int_0^{\tau+T} \pi S_\alpha(t) Dv\,(\tau+T-t) dt =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(s) Cp(T-s) ds - \int_0^T \pi S_\alpha(s) Cu\,(\tau+T-s) ds +$$

$$+ \int_0^T \pi S_\alpha(J(s)) Dv(J(T)-J(s)) \cdot J'(s) ds = \int_0^T \pi S_\alpha(s) Cp(T-s) ds -$$

$$- \int_0^T \pi S_\alpha(s) C(\tau+T-s) ds + \int_0^T \pi S_\alpha(s) CL(s) v(J(T)-J(s)) \cdot J'(s) ds =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(s) C\big[p(T-s) - u(\tau+T-s) + L(t)v\big(J(T)-J(s)\big) \cdot J'(s)\big] ds =$$

$=\int_0^T \pi S_\alpha(s) C[p(T-s) - p(T-s) - L(s)v\big(J(T)-J(s)\big)\cdot J'(s) + L(s)v\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)]ds = 0,$
т. е. $x(\tau+T)\in M$.

Следовательно, в игре (1) из начальной точки x_0 возможно преследование за время $\tau+T$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Когда игра описывается линейным дифференциальным уравнением запаздывающего типа близкие результаты получены в работах ([3], стр.132, [4], стр.235) и ([5], стр.14).

Замечание 3г. Результаты доказанной теоремы можно использовать при решении прикладных задач, которых можно моделировать как дифференциальные игры преследования дробного порядка в подходящих гильбертовых пространствах

ЛИТЕРАТУРА

1. Илолов М., Кучакшоев Х.С., Гулджонов Д.Н. О дробных линейных уравнениях вольтерра в банаховых пространствах.ДАН РТ, 2018, т.61, №2, с.113-120.
2. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования. - Математичесикй сборник, 1980, т.112(154), №3(7), с.307-331.
3. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков. Сибирский математический журнал. 2015. Т.56. №1, с.129-148.
4. Мухсинов Е.М., Муродова М.Н. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний в гильбертовом пространстве. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2016.№1/1(192). с.233-236.
5. Мухсинов Е.М. Разрешимость задачи преследования для линейной дифференциальной игры запаздывающего типа с интегральными ограничениями. Ученые записки Худжандского годударственного университета. Серия естественные и экономические науки. 2021.№1(56). с .12-15.

REFERENCES

1. Ilolov M., Kuchakshoev Kh.S., Guldzhonov D.N. On fractional linear Volterra equations in Banach spaces. DAN RT, 2018, v. 61, no. 2, pp. 113-120.
2. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. - Mathematical collection, 1980, v.112 (154), №3 (7), p.307-331.
3. Mamadaliev N. On a Pursuit Problem with Integral Constraints on the Players' Controls. Siberian Mathematical Journal. 2015.T.56. No. 1, pp. 129-148.
4. Mukhsinov E.M., Murodova M.N. Linear differential pursuit games in the presence of delays in a Hilbert space. Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences. 2016.No. 1/1 (192). pp. 233-236.
5. Mukhsinov E.M. Solvability of the pursuit problem for a linear delay differential game with integral constraints. Scientific Notes of the Khujand State University. Series of Natural and Economic Sciences. 2021. # 1 (56). p. 12-15.