

01.04.00 - ФИЗИКА
01.04.00 - ФИЗИКА
01.04.00 - PHYSICS

01.04.02 Физикаи назариявӣ
01.04.02 Теоретическая физика
01.04.02 The Theoretical physics

УДК 538.9, 517.9
ББК 22.311

**СТРАННЫЙ АТТРАКТОР
В ВЕКТОРНОМ НЕЛИНЕЙНОМ
УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА**

Мушинов Хикмат Халимович – доктор физико-математических наук, академик Национальной академии наук Таджикистана, вице-президент Национальной академии наук Таджикистана, e-mail: muminov.khikmat@mail.ru .

Мухамедова Шоира Файзуллоевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационно-коммуникационных технологий и программирования ТГУПБП, e-mail: shoira74@mail.ru

**АТТРАКТОРИ АҶОИБ ДАР
МУОДИЛАИ ВЕКТОРИИ
ҒАЙРИХАТТИИ ШРЁДИНГЕР**

Мушинов Хикмат Халимович - доктори илмҳои физика – математика, академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, ноиб-президенти Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, e-mail: muminov.khikmat@mail.ru

Мухамедова Шоира Файзуллоевна – номзоди илмҳои физика–математика, дотсенти кафедраи технологияҳои иттилоотӣ ва коммуникатсионӣ ва барномарезии ДДХБСТ, e-mail: shoira74@mail.ru

**STRANGE ATTRACTOR
IN THE VECTOR NONLINEAR
SCHRÖDINGER EQUATION**

Muminov Hikmat Halimovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Vice-President of the National Academy of Sciences of Tajikistan, e-mail: muminov.khikmat@mail.ru,

Mukhamedova Shoira Faizulloevna - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Information Communication Technologies and Programming, TSULBP, e-mail: shoira74@mail.ru

Ключевые слова: подкачка, диссипация, векторное нелинейное уравнение Шредингера, диссипативный солитон, пульсация, бифуркация, хаотический солитон.

В данной статье изучается бифуркация с несколькими пульсациями диссипативных солитонов векторного нелинейного уравнения Шредингера (системы двух уравнений) с самосогласованным потенциалом $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ при наличии подкачки и ненулевой скорости движения, что говорит о формировании хаотического солитона или так называемого «странного аттрактора».

Вожаҳои калидӣ: дамкунӣ, хомӯшишавӣ, муодилаи вектории ғайрихаттии Шрёдингер, солитонҳои диссипативӣ, набз, бифуркатсия, солитони хаотикӣ.

Дар мақолаи мазкур бифуркатсияи солитон бо якчанд набзи солитони диссипативии муодилаи ғайрихаттии вектории Шрёдингер (системаи ду муодила) бо потенциали худмухтори $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ ҳангоми дамкунӣ ва суръати ғайрисиғрӣ мушоҳида карда шуд, ки оиди ташаккули солитони хаотикӣ ё худ “аттарктори аҷиб” шаҳодат медиҳад.

Key words: pumping, dissipation, vector nonlinear Schrödinger equation, dissipative soliton, pulsation, bifurcation, chaotic soliton.

In this article, we discuss a bifurcation of solitons with several pulsations of dissipative solitons of the vector nonlinear Schrödinger equation (a system of two equations) with a self-consistent potential $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ in the presence of pumping and a nonzero velocity of motion, which indicates the formation of a chaotic soliton or the so-called "strange attractor".

Система, которая появляется при возбуждении квадрупольных степеней свободы спиновой динамики в подходе SU(3) обобщенных когерентных состояний [1, 2] является система, так называемая векторное нелинейное уравнение Шрёдингера (ВНУШ).

$$\begin{aligned} i\varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 &= 0 \\ i\varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2. \quad (2)$$

Решение для системы (1) с самосогласованным потенциалом (2), в следующем виде было получено в [6]

$$\varphi_i = A_i e^{i(q_1 x + w_1 t)} \cosh(\beta_1(x + v_1 t) + b_1) + B_i e^{i(q_2 x + w_2 t)} \cosh(\beta_2(x + v_2 t) + a_i) / (B_1 \cosh(\beta^+(x + v^+ t) + h_1) + \cosh(\beta^-(x + v^- t) + h_2) + B_3 \cos(qx + wt + w_{01})) \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} W_1(x,t) &= \alpha_1 t + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t, & W_2(x,t) &= \alpha_2 t + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t \\ P_1(x,t) &= \beta_1(x + 2\alpha_1 t), & P_2(x,t) &= \beta_2(x + 2\alpha_2 t) \\ \kappa_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, & \kappa_2 &= \alpha_2 + i\beta_2, & \kappa_{ij} &= \kappa_i - \bar{\kappa}_j, & \bar{\kappa}_{ij} &= \bar{\kappa}_i - \kappa_j \\ \beta^+ &= \beta_1 + \beta_2, & \beta^- &= \beta_2 - \beta_1, & v^\pm &= \frac{2(\alpha_2\beta_2 \pm \alpha_1\beta_1)}{\beta_2 \pm \beta_1}, & i, j &= 1, 2. \\ q &= \alpha_2 - \alpha_1, & w &= (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2), & w_{01} &= -\frac{i}{2} \ln \left| \frac{C_{12}\kappa_{12}}{C_{21}\kappa_{21}} \right|, \\ A_1 &= -\left[\frac{\gamma_1 \bar{\kappa}_{12} (\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})}{\kappa_{21}\kappa_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}, & B_1 &= -\left[\frac{\gamma_1 \bar{\kappa}_{21} (\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})}{\kappa_{11}\kappa_{22}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ A_2 &= -\left[\frac{\beta_1 \bar{\kappa}_{12} (\beta_1 C_{12} - \beta_2 C_{11})}{\kappa_{21}\kappa_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}, & B_2 &= -\left[\frac{\beta_1 \bar{\kappa}_{21} (\beta_2 C_{21} - \beta_1 C_{22})}{\kappa_{11}\kappa_{22}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ B_3 &= \left[\frac{C_{11}C_{22}}{(k - \kappa_1)(k - \kappa_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ b_1 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\gamma_2 \bar{\kappa}_{12}}{\bar{\kappa}_{21}\kappa_{11} (\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})} \right|, & a_1 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\gamma_1 \bar{\kappa}_{21}}{\bar{\kappa}_{12}\kappa_{22} (\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})} \right|, \\ b_2 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\beta_2 \bar{\kappa}_{12}}{\bar{\kappa}_{21}\kappa_{22} (\beta_1 C_{12} - \beta_2 C_{11})} \right|, & a_2 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\beta_1 \bar{\kappa}_{21}}{\bar{\kappa}_{12}\kappa_{22} (\beta_2 C_{21} - \beta_1 C_{22})} \right|, \\ h_1 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11}\kappa_{22} C_{22}} \right|, & h_2 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{C_{11}\kappa_{11}}{\kappa_{22} C_{22}} \right| \end{aligned}$$

Напомним, что солитоны являются уединенными волнами и принадлежат к классу локализованных решений нелинейных уравнений [3] и значатся как особо устойчивой точкой в бесконечномерном фазовом пространстве. В последние десятилетия начались активные исследования поведения солитонов при наличии внешней подкачки в диссипативных средах. Формирование диссипативных солитонов возможно при условии равновесия между притоком энергии и диссипацией. Один из видов солитонов т.е., пульсирующий солитон относится к числу диссипативных солитонов. Существование пульсирующих солитонов в начале наблюдались в численных экспериментах, позже, экспериментально в волоконной оптике [3-5]. Пульсирующие солитоны могут быть описаны как предельный цикл в бесконечномерных диссипативных динамических системах, что формируют набор локализованных решений. Для проявления более сложного поведения, пульсирующего солитона, достаточно изменение параметров уравнения, что приводит к переходу от одного режима к другому, т.е. происходит бифуркация удвоения периода. Дальнейшее изменение параметров уравнения может вызвать удвоение или учетверение периода бифуркации. При наблюдении последовательности бесконечного числа бифуркации удвоения периода, по сценарию Фейгенбаума перехода к хаосу

[6], наблюдается появление хаотического солитона.

Напомним, что ранее авторами в статье [7] была проведена серия численных экспериментов многосолитонных решений (3) для системы (1), в которой наблюдалось, формирование долгоживущих диссипативных солитонов предельного цикла при наличии диссипации, подкачки и скорости движения солитона.

В данной работе авторами ставится задача – выявления условий формирования хаотических солитонов при наличии подкачки внешними полями и скорости движения солитона, используя метод ввода диссипации и подкачки как в уравнении Свифта Хюенберга [3]. Для приложения путь к хаотическим солитонам, т.е. рассмотрение происхождений бифуркации с несколькими пульсациями вводится параметры диссипации и подкачки в векторное нелинейное уравнение Шрёдингера (1) с самосогласованным потенциалом (2), что имеет следующий вид

$$\begin{aligned} i\varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 + v|\varphi_1|^4\varphi_1 &= \\ = i\delta\varphi_1 + i\varepsilon|\varphi_1|^2\varphi_1 + i\beta\varphi_{1xx} + i\mu|\varphi_1|^4\varphi_1 + is\varphi_{1xxxx} \\ i\varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 + v|\varphi_1|^4\varphi_1 &= \\ = i\delta\varphi_2 + i\varepsilon|\varphi_2|^2\varphi_2 + i\beta\varphi_{2xx} + i\mu|\varphi_2|^4\varphi_2 + is\varphi_{1xxxx} \end{aligned} \quad (5)$$

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2.$$

где $v, \delta, \varepsilon, \beta, \mu$ и s параметры диссипации и подкачки внешним полем [9]. В ходе численных экспериментов скорость солитона задавалась при $v=0.13$ и для контроля консервативности численной схемы использовались интегралы импульса, числа частиц и полной энергии данной системы

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_{1x} + \bar{\varphi}_{2x})(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_{1x} + \varphi_{2x})(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) dx, \quad (7)$$

$$N = \int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx, \quad (8)$$

$$E = \int \frac{1}{2} (|\varphi_{1x}|^2 + |\varphi_{2x}|^2) + u(x,t)(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx. \quad (9)$$

Для численного моделирования была написана трехслойная разностная схема, второго порядка точности, как по времени, так и по координате. Условия устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ и h шаги, соответственно, по времени и по координате. Серия численных экспериментов проводилась при различных значениях параметров многосолитонного решения, а также диссипации и подкачки. Результаты графиков солитонов подверженных бифуркации показаны на рисунках 1-9. В вычислительных экспериментах интеграл импульса, числа частиц и интеграл энергии сохранялись с хорошей точностью $\frac{\Delta P}{P} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta Q}{Q} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-6} - 10^{-7}$.

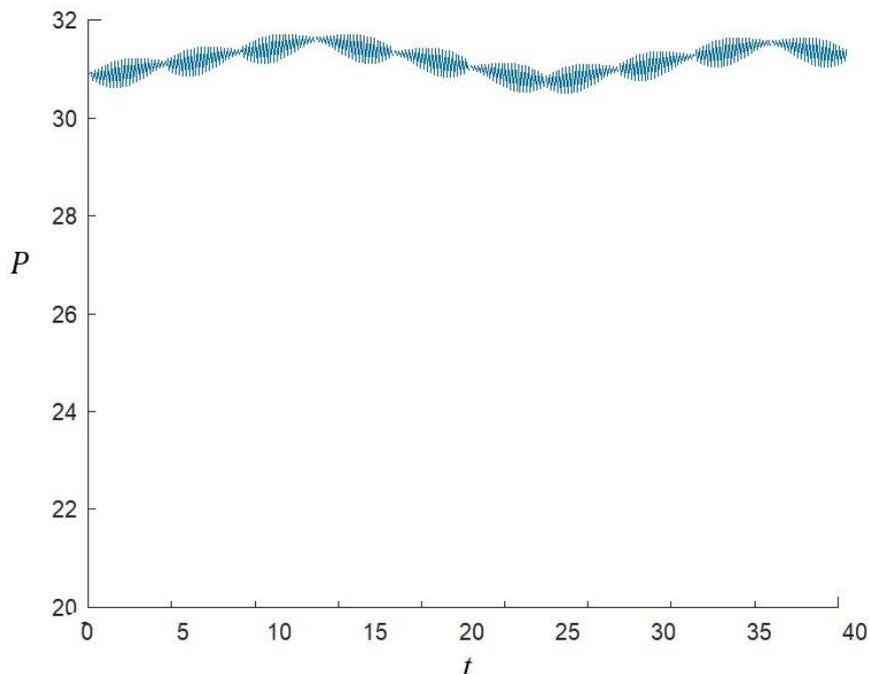


Рис.1. Интеграл импульса солитона

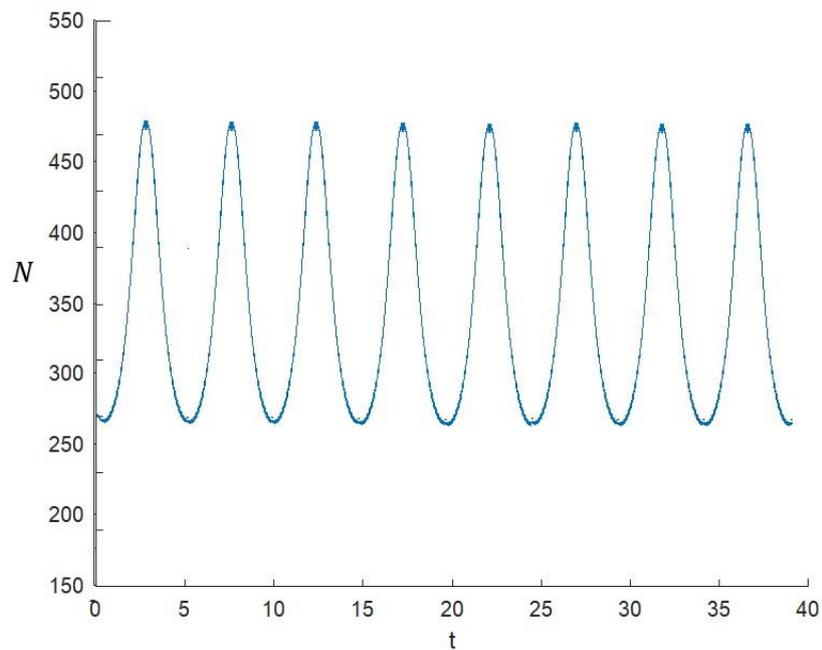


Рис.2. Интеграл числа частиц солитона

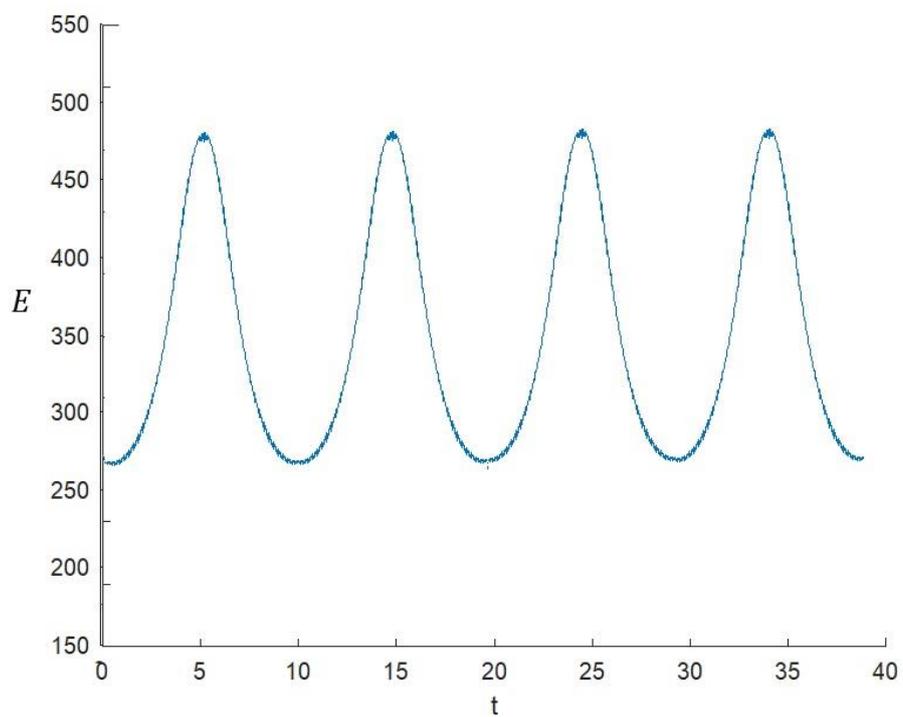


Рис.3. Интеграл энергии солитона

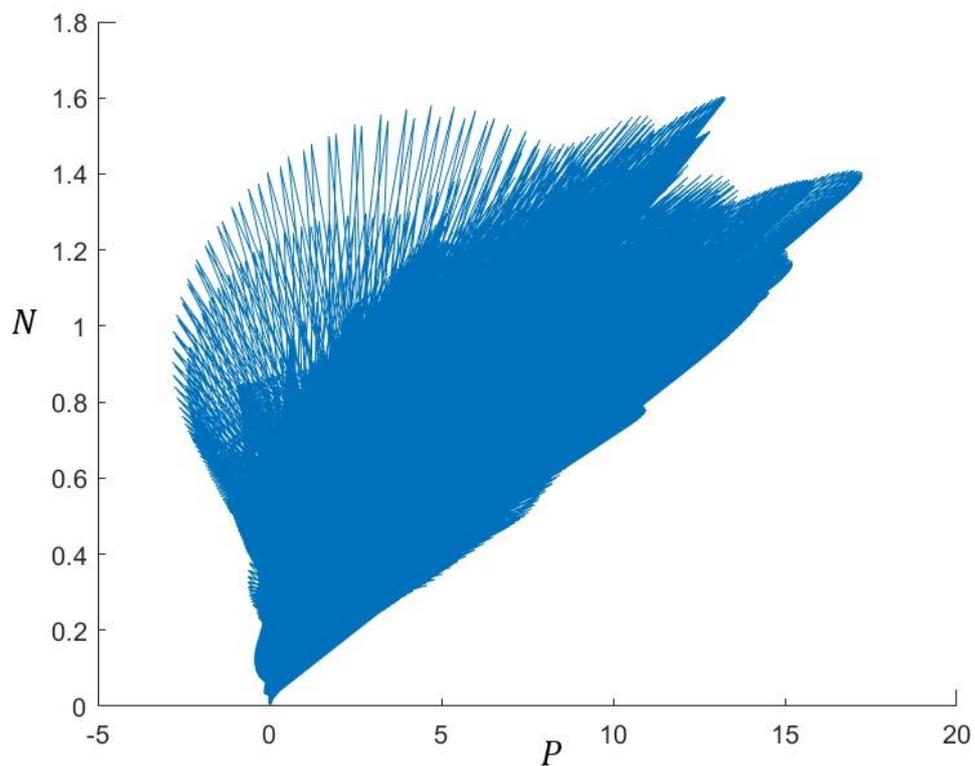


Рис.4. Фазовый портрет системы
(зависимость плотности импульса от плотности частиц)

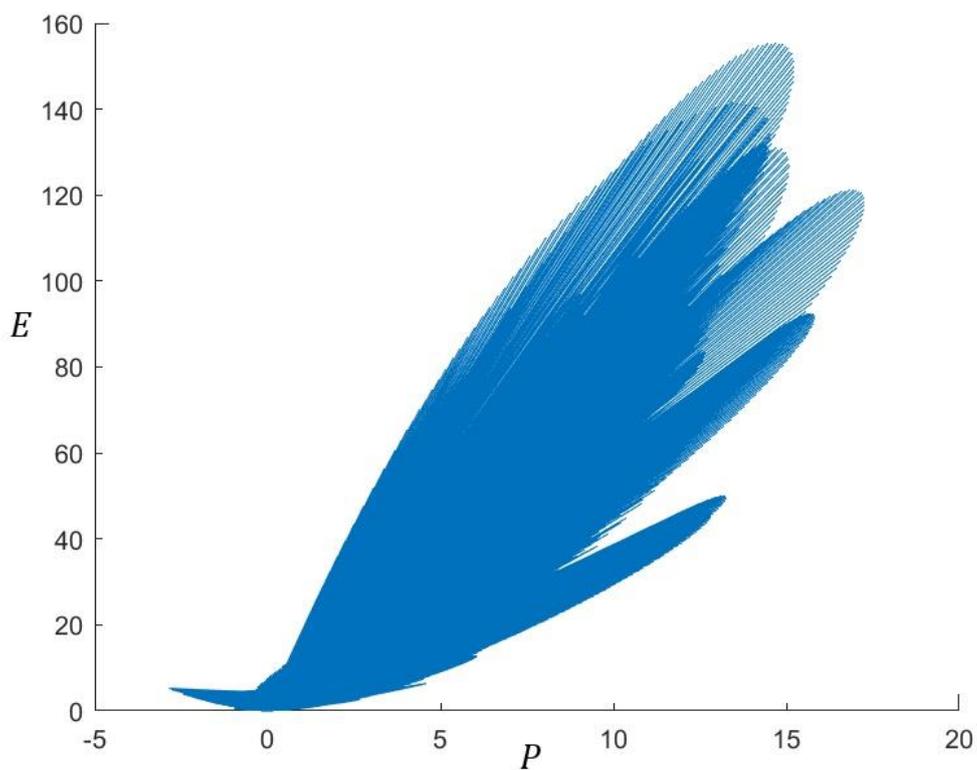


Рис.5. Фазовый портрет системы
(зависимость плотности импульса от плотности энергии)

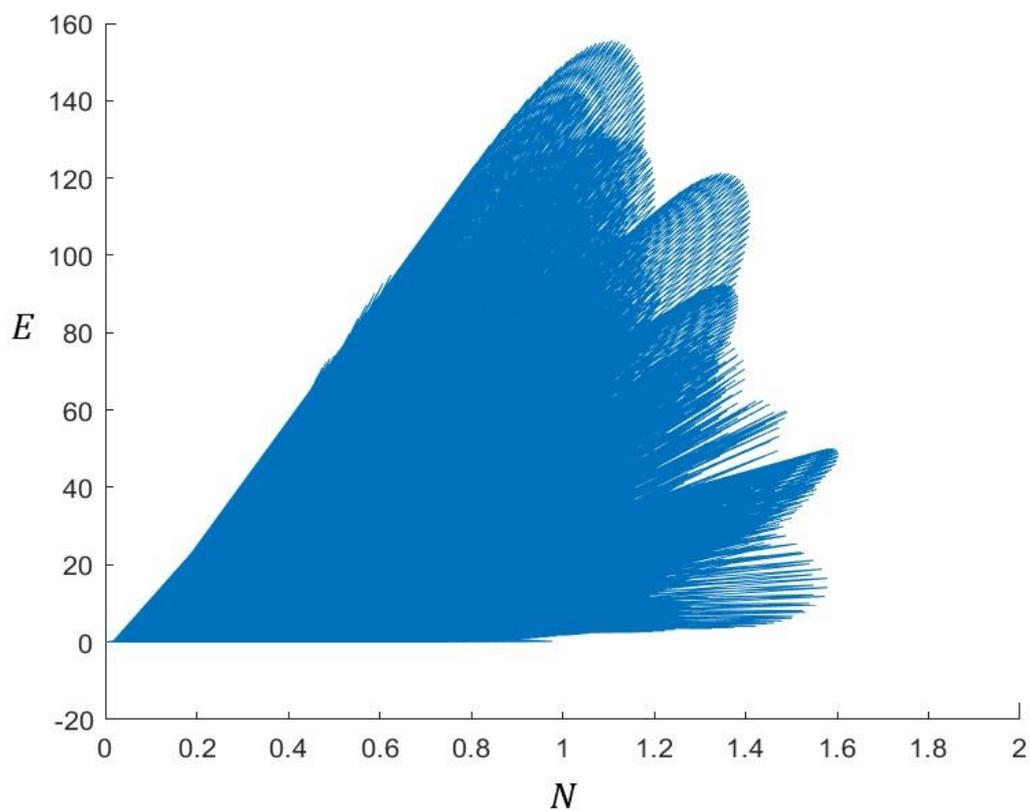


Рис.6. Фазовый портрет системы
(зависимость плотности числа частиц от плотности энергии солитона)

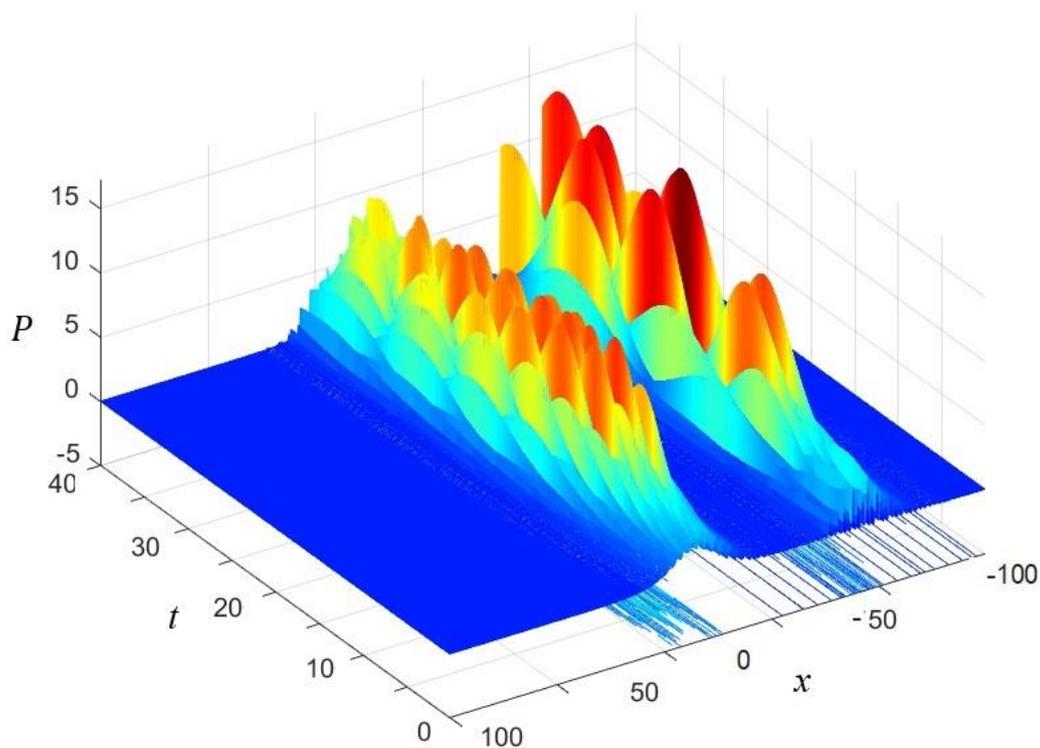


Рис.7. Эволюция плотности импульса солитона.

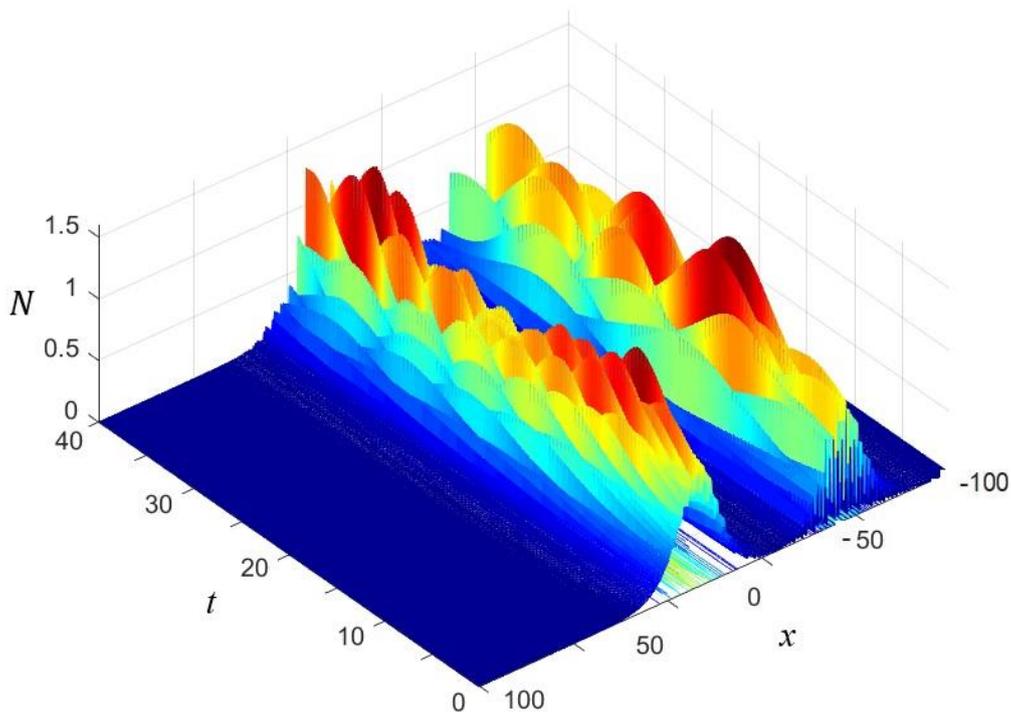


Рис.8. Эволюция плотности числа частиц солитона

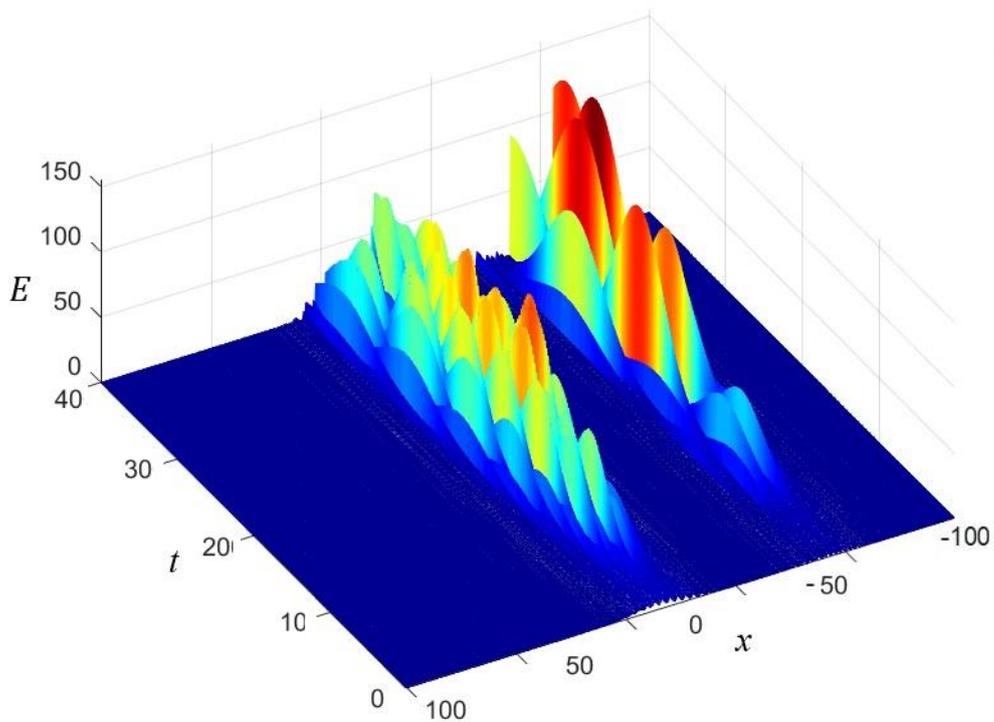


Рис.9. Эволюция плотности энергии солитона

Таким образом, численное моделирование солитонного решения (3) при наличии диссипации, подкачки и при ненулевой скорости движения демонстрирует, что солитон обладает различной формой для различных параметров, поскольку он меняется, но восстанавливает в точности исходную форму через период, где подкачка полностью компенсирует затухание, и колебания интегралов моментов, варьировавших в диапазонах (рис.1-3). Фазовые траектории (см. рис.4-6) показывают, что плавные локализованные начальные распределения с параметрами, близкими к точке, расположенной в этой области, будут сходиться к хаотическому солитону, а траектория в фазовом пространстве будет притягиваться к этой области [10]. Также эволюция плотности моментов системы (рис. 5) показывает динамическое равновесие в системе между притоком энергии и его диссипацией и солитон проявляет пульсирующее поведение (рис. 7-9), что говорит о возможности формирования хаотических солитонов, или так называемого «странного аттрактора».

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. – Системы уравнений для ферромагнетиков с обменной и одноионной анизотропией – Физика твердого тела – СПб, 1992, Т.34 в.2, с.544-547.
2. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. – Общие динамические уравнения в пространстве $SU(2S+1)/SU(2S) \times U(1)$ и легкоосный магнетик со спином $S=3/2$. – Физика твердого тела, 1992, в.2, с.429.
3. K. Maruno, A. Ankiewicz, N. Akhmediev. Exact soliton solutions of the onedimensional complex Swift-Hohenberg equation // Physica. 2003. D 176. p.44-66.
4. J. M. Soto-Crespo and N. Akhmediev, Phys. Rev. E 66, 066610 (2002)
5. J. M. Soto-Grespo, N. Akhmediev and K. Chiang, PhysLett. A 291, 115
6. M. J. Feigenbaum. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. // J. Stat. Phys. 1978. 19. p.25-52.
7. Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова - Генерация пульсации диссипативных солитонов векторного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ // Известия АН РТ, №3, 2020
8. Б.А. Дубровин, Т.М. Маланюк, И.М. Кричевер, В.Г. Маханьков – Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами. – ЭЧАЯ, 1988, т. 19, в. 3, с. 579-621.
9. Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова. Формирование когерентных структур комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау // X Международная научно-практическая интернет-конференция «Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах СНГ» 29-30 апреля 2013. - С. 159-161.
10. Диссипативные солитоны / Ред. Н. Ахмедиева, А. Анкевича -. //М.: ФИЗМАТЛИТ 2008, 504 с.

LITERATURE

1. Abdulloev Kh.O., Maksudov A.T., Muminov Kh.X. - Systems of equations for ferromagnets with exchange and single-ion anisotropy - Physics of the Solid State - SPb, 1992, Vol. 34 v.2, pp. 544-547.
2. Abdulloev X.O., Maksudov A.T., Muminov X.X. - General dynamical equations in the space $SU(2S+1)/SU(2S) \times U(1)$ and an easy-axis magnet with spin $S = 3/2$. - Solid State Physics, 1992, v.2, p. 429.
3. K. Maruno, A. Ankiewicz, N. Akhmediev. Exact soliton solutions of the onedimensional complex Swift-Hohenberg equation // Physica. 2003. D 176. p.44-66.
4. J. M. Soto-Crespo and N. Akhmediev, Phys. Rev. E 66, 066610 (2002)
5. J. M. Soto-Grespo, N. Akhmediev and K. Chiang, PhysLett. A 291, 115
6. M. J. Feigenbaum. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. // J. Stat. Phys. 1978. 19. p.25-52.
7. H.H. Muminov, Sh.F. Mukhamedova - Generation of pulsations of dissipative solitons of the vector nonlinear Schrödinger equation with a self-consistent potential $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ // Izvestiya AN RT, No. 3, 2020
8. B.A. Dubrovin, T.M. Malanyuk, I.M. Krichever, V.G. Makhankov - Exact solutions of the nonstationary Schrödinger equation with self-consistent potentials. - ECHAYA, 1988, vol. 19, century. 3, p. 579-621.
9. H.H. Muminov, Sh.F. Mukhamedov. Formation of coherent structures of the complex Ginzburg-Landau equation // X International Scientific and Practical Internet Conference "Problems and Prospects of Science Development at the Beginning of the Third Millennium in the CIS Countries" April 29-30, 2013. - P. 159-161.
10. Dissipative solitons / Ed. N. Akhmedieva, A. Ankevich -. // M.: FIZMATLIT 2008, 504 p.