УДК 517.9
ББК 22.192

ОИД БА АЛОМАТҲОИ ЯККИМАТА ҲАЛШАВИИ МУОДИЛАИ ИНТЕГРАЛИИ СИНГУЛЯРИИ ГИЛБЕРТ

Муллоҷонов Мубинҷон - *дотсенти кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарори ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров(Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: m.mubinjon53@ mail.ru*

О КРИТЕРИЯХ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИЛБЕРТА

Муллоджанов Мубинджан - *доцент кафедры информатики и вычислительной математики ХГУ имени академика Б.Гафурова (Республика Таджикистан, г. Худжанд), e-mail: m.mubinjon53@ mail.ru*

ON THE CRITERIA FOR THE UNIQUE SOLVABILITY OF THE SOLUTION OF THE SINGULAR INTEGRAL GILBERT EQUATION

Mullojonov Mubinjon - *Associate Professor, Department of Informatics and Computational Mathematics of Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e-mail: m.mubinjon53@ mail.ru*

Вожаҳои калидӣ: *муодилаи Гилберт, фазо, система, монандӣ, матритса, бисёраъзогӣ.*

Дар мақола масъалаҳои яккимата ҳалшавии муодилаи интегралии сингулярии Гилберти навъи якум дар фазои Гёлдер таҳқиқ карда мешавад. Аломатҳои яккимата ҳалшавии муодилаи мазкур муайян карда шудаанд.

Ключевые слова: *уравнение Гильберта, пространство, система, аналог, матрица, многочлен,*

В статье рассмотрены вопросы однозначной разрешимости решения сингулярного интегрального уравнения Гильберта первого рода в пространстве Гёллдера.Установлены признаки однозначной разрешимости решения данного уравнения.

Key words: *Hilbert equation, space, system, analog, matrix, polynomial.*

The paper studies the questions of unique solvability of the solution of the singular Hilbert integral equation of the first kind in the Hölder space. Criteria for the unique solvability of the solution of this equation are established.

Дар мақола муодилаи сингулярии интегралии Гилберти навъи якум таҳқиқ карда мешавад:

$$(Tx)(t)+(Kx)(t)=f(t), \qquad f\in H^{\gamma}, \tag{1}$$

ки дар ин ҷо

$$(Tx)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}x(s)ds$$

– интегралии сингулярии Гилберт,

$$(Kx)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_1(t-s)x(s)ds+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_2(t+s)x(s)ds$$

– қисми регулярии муодилаи сингулярии интегралӣ,

$$k_1(t-s)=\sum_{m=-M}^{M}b_m e^{im(t-s)}, \qquad k_2(t+s)=\sum_{m=-M}^{M}c_m e^{im(t+s)} \tag{2}$$

– бисёрузваҳои тригонометрии дараҷаи M, b_m ва c_m $\left(m=-M,\ldots,M\right)$ – ададҳои ихтиёрии комплекӣ, H^{γ} – фазои 2π- даврии функсияҳои комплексии Гёлдерӣ бо нишондиҳандаи $\gamma: 0<\gamma<1$ бо қаторҳои наздикшавандаи Фуре.

Муодилаи (1) бо бисёрузваҳои мушаххаси (2) дар корҳои бисёр муаллифон (масалан, ниг. ба [1-7]). Таҳқиқоти бештар пурра дар корҳои [8-9]. Оварда шудааст. Дар ин ҷо масъалаи яккимата ҳалшавии масъалаҳои ба муодилаи (1) алоқаманд, омухта мешаванд.

Теоремаҳои дар зер овардашаванда аз адади b_0+c_0 ва ранги матритса вобаста мебошанд.

$$B_k=\begin{bmatrix} i+b_{-k} & c_{-k} \\ c_k & -i+b_k \end{bmatrix},\ k=1,\ldots,M.$$

Теоремаи 1. *Барои дорои ҳалли ягонаи* $x\in H^{\gamma}$ *будани муодилаи (1) барои ҳар қисми рости* $f\in H^{\gamma}$ *иҷрошавии шартҳои зерин зарур аст: условий*

$$b_0+c_0\neq 0;\qquad \det B_k\neq 0,\quad \forall k=1,\ldots,M. \tag{3}$$

Ҳамин тариқ, агар шартҳои (3) иҷро шаванд, он гоҳ барои ҳалшавии муодилаи (1) иҷрои шартҳои иловагӣ барои қисми рости $f\in H^{\gamma}$ талаб карда намешавад. Агар ақаллан яке аз шартҳои (3) иҷро нашавад, он гоҳ қисми росташ ягон шартро қаноат карданаш зарур аст. Барои муайян кардани ин шартҳо маълумоти мушаххас лозим аст, яъне кадоме аз шартҳои (3) иҷро намешавад. Аввал мавриди $b_0+c_0=0$ - ро муоина мекунем.

Теоремаи 2. *Бигзор шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$$b_0+c_0=0;\qquad \det B_k\neq 0,\quad \forall k=1,\ldots,M.$$

Он гоҳ барои яккимата ҳалшавии масъалаи

$$(Tx)(t)+(Kx)(t)=f(t),\ \ f\in H^{\gamma};\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)\,ds=d_0,$$

ки дар ин ҷо d_0 *– адади ихтиёрии комплексӣ, иҷрошавии шарти зерин зарур ва кофист:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=0.$$

Агар шарти дуюми (3) иҷро нашавад, он гоҳ илова бар ин ранги матритсаи B_k ва кадоме аз сатрҳо ё ин ки сутунҳо аэ элементҳои сифрӣ иборат буданашро донист.

Бигзор барои ягон рақами k матритсаи B_k хос бошад. Он гоҳ ду ҳолати зерин имконпазир аст: а) $\operatorname{rank}B_k=0$; б) $\operatorname{rank}B_k=1$.

Барои ҳолати а) танҳо як тасдиқотро баён кардан мумкин аст.

Теоремаи 3. *Бигзор барои қимати додашудаи* k *матритсаи* B_k *сифрии* $B_k=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *буда, нобаробарии* $b_0+c_0\neq 0$ *иҷро шавад. Он гоҳ барои яккимата ҳалшавии масъалаи*

$$(Tx)(t)+(Kx)(t)=f(t),\ \ f\in H^{\gamma};\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)e^{is}ds=d_k^{-},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)e^{-is}ds=d_k^{+},$$

ки дар ин ҷо d_k^{-} *ва* d_k^{+} *– ададҳои комплексӣ, иҷрошавии баробариҳои зерин зарур ва кофист:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{it}dt=0 \quad \text{ва} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-it}dt=0.$$

Дар ҳолати б) матритсаи B_k намудҳои зеринро доштанаш мумкин аст:

1) $B_k = \begin{bmatrix} i+b_{-k} & c_{-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ки дар ин ҷо $\left(i+b_{-k}\right)^2 + \left(c_{-k}\right)^2 \neq 0$;

2) $B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_k & -i+b_k \end{bmatrix}$, ки дар ин ҷо $\left(c_k\right)^2 + \left(-i+b_k\right)^2 \neq 0$;

3) $B_k = \begin{bmatrix} i+b_{-k} & 0 \\ c_k & 0 \end{bmatrix}$, ки дар ин ҷо $\left(i+b_{-k}\right)^2 + \left(c_k\right)^2 \neq 0$;

4) $B_k = \begin{bmatrix} 0 & c_{-k} \\ 0 & -i+b_k \end{bmatrix}$, ки дар ин ҷо $\left(c_{-k}\right)^2 + \left(-i+b_k\right)^2 \neq 0$;

5) ҳамаи элементҳои матритсаи B_k ғайрисифрист.

Барои ҳолати а) панҷ тасдиқотро баён кардан мумкин аст.

Теоремаи 4. *Бигзор барои қимати додашудаи* k *матритсаи* B_k *намуди* 1) *– ро дошта, нобаробарии* $b_0 + c_0 \neq 0$ *иҷро шавад. Он гоҳ барои яккимата ҳалшавии масъалаи*

$$\left(Tx\right)\left(t\right)+\left(Kx\right)\left(t\right)= f\left(t\right),\ f \in H^{\gamma};\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(c_{-k}e^{is}-\left(i+b_{-k}\right)e^{-is}\right)x\left(s\right)ds = d_k^{+},$$

ки дар ин ҷо d_k^{+} *– адади ихтиёрии комплексӣ, иҷрошавии баробарии*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)e^{-it}dt = 0$$

зарур ва кофист.

Теоремаи 5. *Бигзор барои қимати додашудаи* k *матритсаи* B_k *намуди 2) – ро дошта, нобаробарии* $b_0 + c_0 \neq 0$ *иҷро шавад. Он гоҳ барои яккимата ҳалшавии масъалаи*

$$\left(Tx\right)\left(t\right)+\left(Kx\right)\left(t\right)= f\left(t\right),\ f \in H^{\gamma};\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(-i+b_k\right)e^{is}-c_k e^{-is}\right)x\left(s\right)ds = d_k^{-},$$

ки дар ин ҷо d_k^{-} *– адади ихтиёрии комплексӣ, иҷрошавии баробарии*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t\right)e^{it}dt = 0$$

зарур ва кофист.

Теоремаи 6. *Бигзор барои қимати додашудаи* k *матритсаи* B_k *намуди 3) – ро дошта, нобаробарии* $b_0 + c_0 \neq 0$ *иҷро шавад. Он гоҳ барои яккимата ҳалшавии масъалаи*

$$\left(Tx\right)\left(t\right)+\left(Kx\right)\left(t\right)= f\left(t\right),\ f \in H^{\gamma};\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-is}x\left(s\right)ds = d_k^{+},$$

ки дар ин ҷо d_k^{+} *– адади ихтиёрии комплексӣ, иҷрошавии баробарии*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(c_k e^{it}-\left(i+b_{-k}\right)e^{-it}\right) f\left(t\right)dt = 0$$

зарур ва кофист.

Теоремаи 7. *Бигзор барои қимати додашудаи* k *матритсаи* B_k *намуди 4) – ро дошта, нобаробарии* $b_0 + c_0 \neq 0$ *иҷро шавад. Он гоҳ барои яккимата ҳалшавии масъалаи*

$$\left(Tx\right)\left(t\right)+\left(Kx\right)\left(t\right)=f\left(t\right),\ f\in H^{\gamma};\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{is}x\left(s\right)ds=d_k^{-},$$

ки дар ин ҷо d_k^{-} *– адади ихтиёрии комплексӣ, иҷрошавии баробарии*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(-i+b_k\right)e^{it}-c_{-k}e^{-it}\right)f\left(t\right)dt=0$$

зарур ва кофист.

Теоремаи 8. *Бигзор барои қимати додашудаи* k *матритсаи* B_k *намуди 5) – ро дошта, нобаробарии* $b_0 + c_0 \neq 0$ *иҷро шавад. Он гоҳ барои яккимата ҳалшавии хар яке аз масъалаҳои*

$$\left(Tx\right)\left(t\right)+\left(Kx\right)\left(t\right)=f\left(t\right),\ f\in H^{\gamma};\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-is}x\left(s\right)ds=d_k^{+}$$

ё

$$\left(Tx\right)\left(t\right)+\left(Kx\right)\left(t\right)=f\left(t\right),\ f\in H^{\gamma};\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{is}x\left(s\right)ds=d_k^{-},$$

ки дар ин ҷо d_k^{-} *ва* d_k^{+} *– ададҳои ихтиёрии комплексӣ, иҷрошавии ҳар яке аз баробариҳои баробарқувваи*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(c_k e^{it}-\left(i+b_{-k}\right)e^{-it}\right)f\left(t\right)dt=0$$

ё ин ки

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(-i+b_k\right)e^{it}-c_{-k}e^{-it}\right)f\left(t\right)dt=0$$

зарур ва кофист.

АДАБИЁТ

1. Афендикова Н. Г. Численное решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с кратным интегралом с ядрами Гильберта // Известия вузов. Серия математика. 1988. № 3. С. 3–8.
2. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Солдатов М. М. Метод дискретных особенностей в плоских задачах теории упругости // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 5. С. 781–789.
3. Лифанов И. К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных уравнений // Доклады Академии Наук СССР. 1980. Т. 255, № 5. С. 1046–1050.
4. Лифанов И. К., Тыртышников Е. Е. Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1990. Вып. 7. С. 94–273.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. – 512 с.
7. Назимов А. Б.. Муллоджанов М. О разрешимости сингулярного интегрального уравнения Гильберта и его дискретного аналога // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 9. С. 674–680.
8. Назимов А.Б., Мухамадиев Э.М., Морозов В.А., Муллоджанов М. Метод регуляризации сдвигом. Теория и приложения. Монография. Вологда: ВоГУ, 2012. – 368 с.
9. Назимов А.Б., Менухова Н.О., Муллоджанов М. Сингулярные интегральные уравнения Гильберта нейтрального типа. Теория и алгоритмы. Монография. Вологда: ВоГУ, 2014. – 244 с.

REFERENCES

1. Afendikova NG Numerical solution of a singular integral equation of the first kind with multiple integrals with Hilbert kernels // Proceedings of universities. Mathematics series. 1988. No. 3. P. 3–8.
2. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K., Soldatov M.M. Method of discrete singularities in plane problems of elasticity theory // Applied Mathematics and Mechanics. 1983.T. 47, no. 5, pp. 781–789.
3. Lifanov I.K.On the incorrectness and regularization of the numerical solution of singular equations. // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1980.Vol. 255, No. 5. P. 1046-1050.
4. Lifanov IK, Tyrtyshnikov EE Teplitz matrices and singular integral equations // Computational processes and systems. M: Science, 1990. Vol. 7, pp. 94–273.
5. Lifanov I.K. The method of singular integral equations and numerical experiment (in mathematical physics, aerodynamics, the theory of elasticity and wave diffraction). M .: LLP "Janus", 1995. - 520 p.
6. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations. M .: Science, 1968.- 512 p.
7. Nazimov A.B .. Mullodzhanov M. On the solvability of the singular integral Hilbert equation and its discrete analog // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. 2009. Vol. 52, No. 9, pp. 674-680.
8. Nazimov A.B., Mukhamadiev E.M., Morozov V.A., Mullodzhanov M. Shift regularization method. Theory and applications. Monograph. Vologda: VoGU, 2012 .- 368 p.
9. Nazimov A.B., Menuhova N.O., Mullodzhanov M. Singular Hilbert integral equations of neutral type. Theory and algorithms. Monograph. Vologda: VoGU, 2014 .- 244 p.