УДК 517.91
ББК 22.161.1
О - 42

ФОРМУЛАИ ТАСВИРИ ҲАЛЛИ УМУМӢ ВА МАСЪАЛАҲОИ НАМУДИ КОШӢ - РИКЙЕ БАРОИ МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДИИ НАМУДАШ МАХСУС БО НУҚТАИ САРҲАДӢ ВА ДОХИЛИИ ДОРОИ СИНГУЛЯРНОКИИ ПАСТ

Олимӣ Абдуманон Ғафорзода (Олимов Абдуманон Ғафорович) *- номзади илмҳои физика-математика, дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

Дадоҷонова Муқаддас Ёқубҷоновна *- номзади илмҳои физика-математика, дотсент, мудири кафедраи математикаи олӣ ва амалии МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: moqaddaskhon@mail.ru*

Охунов Нозимҷон Қобилович *- сармуаллими кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд),*

Толибов Саид Аюбҷонович *- магистранти курси дуюми ихтисоси математикаи МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд)*

ФОРМУЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ - РИКЬЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ГРАНИЧНОЙ И ВНУТРЕННЕЙ СЛАБО СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Олими Абдуманон Гафорзода (Олимов Абдуманон Гафорович) *– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

Дадоджанова Мукаддас Якубджановна *- кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой высшей и прикладной математики ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: moqaddaskhon@mail.ru*

Охунов Нозимджон Кобилович *– старший преподаватель кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд),*

Толибов Саид Аюбджонович *- магистрант второго курса специальности математика ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд)*

REPRESENTATION FORMULA OF A GENERAL SOLUTION AND A CAUCHY - RYKE TYPE PROBLEMS FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF A SPECIAL TYPE WITH A BOUNDARY AND INTERNAL WEAKLY SINGULAR POINT

Olimi Abdumanon Gaforzoda (Olimov Abdumanon Gaforovich) *– Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor Mathematical Analysis Department named after Professor A. Muksinov under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

Dadojanova Mukaddas Yakubdjanovna -

Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor, Head of Higher and Applied Mathematics Department under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov(Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: moqaddaskhon@mail.ru
***Okhunov Nozimjon Kobilovich** - Senior Lecturer of Mathematical Analysis Department named after Professor A. Muksinov under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand),*
***Tolibov Said Ayubdjonovich** - Undergraduate Second Year Degree Mathematics of the Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand)*

***Вожаҳои калидӣ:** муодилаи дифференсиалии одии намуди махсус, нуқтаи дорои сингулярнокии паст, формулаи тасвири ҳалли умумӣ, рафтори ҳалҳо, баробариҳои характеристикӣ, масъалаи намуди Кошӣ -Рикйе.*

Дар мақола муодилаи дар натиҷаи ду маротиба итеронидани оператори дифференсиалии одии тартиби якуми дорои нуқтаи сарҳадӣ ва дохилии сингулярнокиаш паст ҳосилшуда мавриди омӯзиш қарор гирифтааст. Формулаи ҳалли умумии муодила ёфта мешавад ва он дар омӯхтани хосиятҳои ҳалҳо, рафтори онҳо дар атрофи нуқтаи махсус, гузориш ва ҳалли масъалаҳои намуди Кошӣ - Рикйе бо шартҳои дар нуқтаи сингулярнокиаш паст додашуда татбиқ гардидааст. Нишон дода шудааст, ки ҳалҳои муодила ва қимати оператори мувофиқ аз онҳо, дар атрофи нуқтаи дорои сингулярнокии паст маҳдуд мешаванд. Таъсири махсусияти муодила дар гузориши масъалаҳои канорӣ дар он зоҳир мегардад, ки шартҳоро танҳо дар қисми сарҳад гузоштан кофӣ мебошад.

***Ключевые слова:** обыкновенное дифференциальное уравнение специального типа, слабо сингулярная точка, формула представления общего решения, поведение решений, характеристические равенства, задача типа Коши - Рикье*

В статье изучается уравнение, полученное двукратным итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с граничной и внутренней слабо сингулярной точкой. Находится формула общего решения уравнения, которая применяется к изучению свойства решений, их поведения в окрестности особой точки, постановке и решению задач типа Коши - Рикье с условиями в слабо сингулярной точке. Показано, что решения уравнения и значение соответствующего оператора от них в окрестности слабо сингулярной точки, остаются ограниченным. Наличие особенности в уравнении сказывается в постановке граничных задач и выражается в том, что условия достаточно будет задавать на части границы.

***Key words:** special type ordinary differential equation, weakly singular point, representation formula of the general solution, behavior of solutions, characteristic equalities, Cauchy - Ryke type problem.*

The article studies the equation obtained by double iterating an ordinary differential operator of the first order with boundary and internal weakly singular point. Representation formula of the general solution of the equation is found, which is applied to the study of the properties of solutions, their behavior in the neighborhood of a singular point, the formulation and solution of Cauchy - Ryke type problems with conditions at a weakly singular point. It is shown that the solutions of the equation and the value of the corresponding operator from them in the neighborhood of the weakly singular point remain bounded. The presence of a singularity in the equation affects the formulation of boundary value problems and is expressed in the fact that it will be sufficient to set the conditions on a part of the boundary.

Бигзор, $\Gamma = (a,b)$ интервали тири ҳақиқӣ, $(b) = \{b_1, b_2\}$, $a = b_1 < b_2 < b$ нуқтаҳои фосилаи $\overline{\Gamma}$ ва $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$ бошад. Дар маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ муодилаи дифференсиалии одии

$$A^2_{(\alpha),(b)} y = \frac{f(x)}{\prod_{j=1}^{2} \left| x - b_j \right|^{\alpha_j}} \tag{1}$$

- ро муоина мекунем, ки дар ин ҷо

$$A_{(\alpha),(b)}y \equiv y' + \frac{p(x)}{\prod_{j=1}^{2}\left|x-b_j\right|^{\alpha_j}}y - \frac{q(x)}{\prod_{j=1}^{2}\left|x-b_j\right|^{\alpha_j}}, \qquad A_{(\alpha),(b)}{}^{2}y = A_{(\alpha),(b)}(A_{(\alpha),(b)}y), \qquad A^{0}_{(\alpha),(b)}y \equiv y,$$

$(\alpha)=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $0<\alpha_1,\alpha_2<1$- ададҳои ҳақиқӣ, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - функсияҳои маълуми дар $\overline{\Gamma}$ ба ғайр аз нуқтаҳои b_1, b_2 бефосилаанд, ки дар нуқтаҳои мазкур каниши навъи якум дошта метавонанд. b_j, $j=1{,}2$ нуқтаҳои (махсуси) дорои сингулярнокии пасти муодилаи (1) ва оператори мувофиқ ҳисоб меёбанд.

Таъриф. Функсияи $y(x)$ ҳалли муодилаи (1) дар маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ номида мешавад, агар барояш шартҳои $A_{(\alpha),(b)}{}^{s}y \in C^1(\Gamma_{(b)})$ $s=0{,}1$ иҷро шуда, ифодаи $A^2_{(\alpha),(b)}y$ муодиларо дар маҷмӯи мазкур ба айният табдил диҳад.

Қайд менамоем, ки ба масъалаи омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии одӣ ва бо ҳосилаҳои хусусии коэффитсиентҳояшон дорои сингулярнокиҳои гуногун тадқиқоти зиёде, масалан [1-11] бахшида шудаанд. Дар монографияи [6] усули тадқиқи муодилаҳои дифференсиалии одии тартиби якум бо n нуқтаҳои сингулярӣ ё дорои сингулярнокии баланд ёфта шудааст. Дар он вобаста ба ҷойгиршавии нуқтаҳо тасвири интегралии ҳалли умумии муодилаҳо ёфта, бо ёрии он хосиятҳои ҳалҳо, рафтори онҳо дар атрофи нуқтаҳои махсус ва масъалаҳои намуди Кошӣ тадқиқ карда шудааст. Усули омӯзиши дар кори [6] коркардшуда дар тадқиқоти [7], [8] ба тадқиқи муодилаи дифференсиалии одии хаттии тартиби дуюми ғайримоделӣ ва дар кори [10] ба омӯзиши муодилаи ба муодилаи (1) монанд, ки ду нуқтаи сарҳадии сингулярӣ доранд, татбиқ гардидааст. Дар мақолаи мазкур усули зикршуда дар тадқиқи муодилаи (1) истифода мегардад.

Барои ҳал кардани муодилаи (1) маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ - ро ба ду қисмҳои $\Gamma_1=(a;b_2)= \; =(b_1;b_2)$, $\Gamma_2=(b_2;b)$ ҷудо мекунем, $\Gamma_{(b)}=\Gamma\setminus(b)=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Ҳалли муодилаи (1) – ро дар интервали Γ_j мавҷуд ҳисобида бо $y_j(x)$, $j=1,2$ ишорат мекунем. Он гоҳ ҳалли муодилаи (1) дар маҷмӯи $\Gamma_{(b)}$ бо баробарии

$$y(x)=\begin{cases} y_1(x) \ дараснои \quad x\in\Gamma_1, \\ y_2(x) \ дараснои \, x\in\Gamma_2 \end{cases} \tag{2}$$

ифода мегардад.

Дар фосилаи Γ_1 нуқтаҳои сарҳадии $a=b_1$ ва b_2 нуқтаҳои сингулярнокиашон пасти муодила мебошанд. Нуқтаи ихтиёрии $x_1^0\in\Gamma_1$ - ро гирифта фосилаи мазкурро ба зерфосилаҳои $\Gamma_1^1=(b_1;x_1^0]$ ва $\Gamma_1^2=[x_1^0;b_2)$ ҷудо мекунем. Дар фосилаи $\Gamma_1^1=(b_1;x_1^0]$ муодилаи (1) дар намуди

$$A^2_{\alpha_1,b_1,+}y=\frac{f_1^1(x)}{(x-b_1)^{\alpha_1}} \tag{3}$$

навишта мешавад, ки дар ин ҷо

$$A_{\alpha_1,b_1,+}y \equiv y' + \frac{p_1^1(x)}{(x-b_1)^{\alpha_1}}y - \frac{q_1^1(x)}{(x-b_1)^{\alpha_1}}, \; A^2_{\alpha_1,b_1,+}y = A_{\alpha_1,b_1,+}(A_{\alpha_1,b_1,+}y), \; A^0_{\alpha_1,b_1,+}y \equiv y$$

$p_1^1(x)=p(x)(b_2-x)^{-\alpha_2}$, $q_1^1(x)=q(x)(b_2-x)^{-\alpha_2}$, $f_1^1(x)=f(x)(b_2-x)^{-\alpha_2}$ ва $a=b_1$ нуқтаи чапи сингулярнокиаш пасти муодилаи (3) мебошад. Функсияҳои $p(x)$, $q(x)$ ва $f(x)$ - ро дар нуқтаи b_1 бо қимати ҳудудии росташон муайян карда, онҳоро дар порчаи $\overline{\Gamma_1^1}=[b_1;x_1^0]$ бефосила мегардонем. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 1.1 [11, с.4] ҳалли умумии муодилаи (3) дар $\Gamma_1^1=(b_1;x_1^0]$ чунин навишта мешавад:

$$y_1^{b_1}(x)=\exp[-u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(x)]\left\{\int_{b_1}^{x}(1+x-\xi)q_1^1(\xi)(\xi-b_1)^{-\alpha_1}\exp[u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(\xi)]d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_{b_1}^{x}(x-\xi)f_1^1(\xi)(\xi-b_1)^{-\alpha_1}\exp[u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(\xi)]d\xi+c_{11}^1(x-b_1)+c_{10}^1\right\}\equiv$$

$$\equiv I_{b_1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{10}^1,c_{11}^1]\ , \qquad (4)$$

ки дар ин ҷо $u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(x)=\int_{b_1}^{x}\frac{p_1^1(t)}{(t-b_1)^{\alpha_1}}dt$, c_{10}^1 ва c_{11}^1 - доимиҳои ихтиёрӣ ҳастанд. Барои оператори $A_{\alpha_1,b_1,+}$ аз функсияи (4) бошад, формулаи зерин ҷой дорад:

$$A_{\alpha_1,b_1,+}y_1^{b_1}(x)=\exp[-u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(x)]\left\{\int_{b_1}^{x}q_1^1(\xi)(\xi-b_1)^{-\alpha_1}\exp[u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(\xi)]d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_{b_1}^{x}f_1^1(\xi)(\xi-b_1)^{-\alpha_1}\exp[u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(\xi)]d\xi+c_{11}^1\right\}\equiv$$

$$\equiv I_{b_1,1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{11}^1] \qquad (5)$$

Дар фосилаи $\Gamma_1^2=[x_1^0;b_2)$ муодилаи (1) - ро дар намуди

$$A_{\alpha_2,b_2,-}^2 y=\frac{f_1^2(x)}{(b_2-x)^{\alpha_2}} \qquad (6)$$

менависем. Дар ин ҷо $A_{\alpha_2,b_2,-}y\equiv y'+\frac{p_1^2(x)}{(b_2-x)^{\alpha_2}}y-\frac{q_1^2(x)}{(b_2-x)^{\alpha_2}}$, $A_{\alpha_2,b_2,-}^2 y=A_{\alpha_2,b_2,-}(A_{\alpha_2,b_2,-}y)$, $A_{\alpha_2,b_2,-}^0 y\equiv y$, $p_1^2(x)=p(x)(x-b_1)^{-\alpha_1}$, $q_1^2(x)=q(x)(x-b_1)^{-\alpha_1}$, $f_1^2(x)=f(x)(x-b_1)^{-\alpha_1}$ ва b_2 нуқтаи рости сингулярнокиаш пасти муодилаи (6) мебошад. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 2.1 [11, с.6] ҳалли умумии муодилаи (6) дар фосилаи Γ_1^2 бо формулаи

$$y_1^{b_2}(x)=\exp\left[u_{p_1^2,b_2}^{\alpha_2,-}(x)\right]\left\{c_{10}^2+c_{11}^2(b_2-x)-\int_{x}^{b_2}(1+x-\xi)q_1^2(\xi)(b_2-\xi)^{-\alpha_2}\exp\left[-u_{p_1^2,b_2}^{\alpha_2,-}(\xi)\right]d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_{x}^{b_2}(x-\xi)f_1^2(\xi)(b_2-\xi)^{-\alpha_2}\exp\left[-u_{p_1^2,b_2}^{\alpha_2,-}(\xi)\right]d\xi\right\}\equiv I_{b_2}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x),q_1^2(x),f_1^2(x),c_{10}^2,c_{11}^2] \qquad (7)$$

ифода меёбад, ки дар ин ҷо $u_{p_1^2,b_2}^{\alpha_2,-}(x)=\int_{x}^{b_2}\frac{p_1^2(t)}{(b_2-t)^{\alpha_2}}dt$ ва c_{10}^2,c_{11}^2 - доимиҳои ихтиёрӣ ҳастанд. Барои оператори $A_{\alpha_2,b_2,-}$ аз функсияи (7) формулаи зерин ҷой дорад:

$$A_{\alpha_2,b_2,-}y_1^{b_2}=\exp\left[u_{p_1^2,b_2}^{\alpha_2,-}(x)\right]\left\{-c_{11}^2-\int_{x}^{b_2}\left[f_1^2(\xi)+q_1^2(\xi)\right](b_2-\xi)^{-\alpha_2}\exp\left[-u_{p_1^2,b_2}^{\alpha_2,-}(\xi)\right]d\xi\right\}\equiv$$

$$\equiv I_{b_2,1}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x),q_1^2(x),f_1^2(x),c_{11}^2]. \qquad (8)$$

Ҳамин тавр, функсияи намуди

$$y_1(x)=\begin{cases}I_{b_1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{10}^1,c_{11}^1] & \text{дар аснои } x\in\Gamma_1^1\\ I_{b_2}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x),q_1^2(x),f_1^2(x),c_{10}^2,c_{11}^2] & \text{дар аснои } x\in\Gamma_1^2\end{cases} \qquad (9)$$

ҳалли муодилаи (1) – ро дар фосилаи Γ_1 ифода менамояд. Нишон медиҳем, ки формулаи (9) танҳо аз як ҷуфти доимиҳои ихтиёрӣ вобаста мебошад. Барои ин аз бефосилагии функсияҳои $y_1^{b_1}(x)$, $y_1^{b_2}(x)$ ва $A_{\alpha_1,b_1,+}y_1^{b_1}(x)$, $A_{\alpha_2,b_2,-}y_1^{b_2}$ дар нуқтаи x_1^0 истифода бурда, баробариҳои зеринро тартиб медиҳем:

$$y_1^{b_1}(x_1^0) = y_1^{b_2}(x_1^0), \quad A_{\alpha_1,b_1,+}y_1^{b_1}(x_1^0) = A_{\alpha_2,b_2,-}y_1^{b_2}(x_1^0).$$

Дар асоси формулаҳои (4) , (5), (7) ва (8) ин баробариҳо дар намуди

$$\begin{cases} I_{b_1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x_1^0), q_1^1(x_1^0), f_1^1(x_1^0), c_{10}^1, c_{11}^1] = I_{b_2}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x_1^0), q_1^2(x_1^0), f_1^2(x_1^0), c_{10}^2, c_{11}^2] \\ I_{b_1,1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x_1^0), q_1^1(x_1^0), f_1^1(x_1^0), c_{11}^1] = I_{b_2,1}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x_1^0), q_1^2(x_1^0), f_1^2(x_1^0), c_{11}^2] \end{cases} \tag{10}$$

навишта мешавад, ки нисбат ба ҷуфти доимиҳои ихтиёрии c_{10}^2, c_{11}^2 ё c_{10}^1, c_{11}^1, дар вақти ҷуфти дигарро маълум ҳисобидан, системаи зинагиии муодилаҳои алгебравии хаттӣ мебошад. Аз он ҷуфти c_{10}^2, c_{11}^2 (c_{10}^1, c_{11}^1) бо ёрии дигараш яккимата ёфта мешавад. Хулоса, формулаи (9), ки ҳалли умумии муодилаи (1) - ро дар фосилаи Γ_1 ифода менамояд, аз ду доимиҳои ихтиёрии c_{10}^2, c_{11}^2 ё c_{10}^1, c_{11}^1 вобаста мебошад.

Дар фосилаи $\Gamma_2 = (b_2; b)$ муодилаи (1) - ро дар намуди

$$A_{\alpha_2,b_2,+}^2 y = \frac{f_2^1(x)}{(x-b_2)^{\alpha_2}} \tag{11}$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо

$$A_{\alpha_2,b_2,+}y \equiv y' + \frac{p_2^1(x)}{(x-b_2)^{\alpha_2}}y - \frac{q_2^1(x)}{(x-b_2)^{\alpha_2}}, \; A_{\alpha_2,b_2,+}^2 y = A_{\alpha_2,b_2,+}(A_{\alpha_2,b_2,+}y), \; A_{\alpha_2,b_2,+}^0 y \equiv y$$

$p_2^1(x) = p(x)(x-b_1)^{-\alpha_1}$, $q_2^1(x) = q(x)(x-b_1)^{-\alpha_1}$, $f_2^1(x) = f(x)(x-b_1)^{-\alpha_1}$ ва b_2 нуқтаи сарҳадии чапи дорои сингулярнокии пасти он аст. Ҳалли умумии муодилаи (11) дар фосилаи Γ_2 мувофиқи теоремаи 1.1 [11, с.4] бо формулаи зерин ифода меёбад:

$$y_2(x) = y_2^{b_2}(x) = \exp[-u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(x)]\left\{\int_{b_2}^{x}(1+x-\xi)q_2^1(\xi)(\xi-b_2)^{-\alpha_2}\exp[u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(\xi)]d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{b_2}^{x}(x-\xi)f_2^1(\xi)(\xi-b_2)^{-\alpha_2}\exp[u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(\xi)]]d\xi + c_{21}^1(x-b_2) + c_{20}^1 \right\} \equiv$$

$$\equiv I_{b_2}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), c_{20}^1, c_{21}^1], \tag{12}$$

ки дар ин ҷо $u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(x) = \int_{b_2}^{x}\frac{p_2^1(t)}{(t-b_2)^{\alpha_2}}dt$, c_{20}^1 ва c_{21}^1 - доимиҳои ихтиёрӣ ҳастанд.

Барои ифодаи $A_{\alpha_2,b_2,+}y_2^{b_2}$ бошад, формулаи зерин ҳосил мешавад:

$$\begin{aligned} A_{\alpha_2,b_2,+}y_2^{b_2} &= \exp[-u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(x)]\left\{\int_{b_2}^{x}q_2^1(\xi)(\xi-b_2)^{-\alpha_2}\exp[u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(\xi)]d\xi + \right. \\ &\left. + \int_{b_2}^{x}(x-\xi)f_2^1(\xi)(\xi-b_2)^{-\alpha_2}\exp[u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(\xi)]]d\xi + c_{21}^1 \right\} \equiv I_{b_2,1}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), c_{21}^1] \end{aligned} \tag{13}$$

Акнун, қимати функсияҳои $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ - ро аз баробариҳои (9) ва (12) ба формулаи (2) гузошта, ҳалли умумии муодилаи (1) - ро дар $\Gamma_{(b)}$ ҳосил мекунем:

$$y(x)=\begin{cases} I_{b_1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{10}^1,c_{11}^1] \quad дар\ аснои\ x\in\Gamma_1^1 \\ I_{b_2}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x),q_1^2(x),f_1^2(x),c_{10}^2,c_{11}^2]\ дар\ аснои\ x\in\Gamma_1^2 \\ I_{b_2}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x),q_2^1(x),f_2^1(x),c_{20}^1,c_{21}^1]\ ,\ дар\ аснои\ x\in\Gamma_2\ , \end{cases} \tag{14}$$

ки сатрҳои он мувофиқи баробариҳои (4), (7) ва (12) муайян карда мешаванд.

Барои оператори $A_{(\alpha),(b)}y$ аз функсияи (13) дар асоси баробариҳои (5), (8) ва (13), формулаи зерин ҳосил мешавад:

$$A_{(\alpha),(b)}y=\begin{cases} I_{b_1,1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{11}^1] \quad дар\ аснои\ x\in\Gamma_1^1 \\ I_{b_2,1}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x),q_1^2(x),f_1^2(x),c_{11}^2]\ дар\ аснои\ x\in\Gamma_1^2 \\ I_{b_2,1}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x),q_2^1(x),f_2^1(x),c_{21}^1]\ дар\ аснои\ x\in\Gamma_2\ . \end{cases} \tag{15}$$

Муҳокимаҳоро ҷамъбаст карда ба тасдиқоти зерин молик мешавем:

Теоремаи 1. Бигзор, нуқтаи дорои сингулярнокии пасти чаптарини муодилаи (1) бо нуқтаи чапи канории фосилаи Γ якҷоя буда, дигараш дар мобайни ин фосила ҷойгир бошад. $\Gamma_1=(a;b_2)=(b_1;b_2)$, $\Gamma_2=(b_2;b)$ $\Gamma_{(b)}=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $x_1^0\in\Gamma_1$ нуқтаи қайдшударо ифода намояд ва $\Gamma_1=\Gamma_1^1\cup\Gamma_1^2$, $\Gamma_1^1=(b_1;x_1^0]$, $\Gamma_1^2=[x_1^0;b_2)$ бошад. Бигзор, функсияҳои $p(x)$, $q(x)$ ва $f(x)$ дар $\overline{\Gamma}$, ғайр аз нуқтаҳои b_1,b_2 бефосила буда, шояд дар нуқтаҳои охирин каниши навъи якум дошта бошанд.

Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи (1) дар маҷмӯи $\Gamma_{(b)}=\Gamma\setminus(b)$ бо формулаи (14) тасвир карда мешавад. Дар он c_{10}^1,c_{11}^1 (ё c_{10}^2,c_{11}^2), c_{20}^1,c_{21}^1 - доимиҳои ихтиёрӣ ҳастанд ва ҷуфтҳои c_{10}^1,c_{11}^1 ва c_{10}^2,c_{11}^2 бо ёрии системаи (10) бо ҳамдигар яккимата ифода меёбанд. Барои дараҷаи якуми оператори $A_{(\alpha),(b)}y$ аз функсияи (14) формулаи (15) ҷой дорад.

Қайди 1. Бевосита, аз тасвирҳои интегралии (14) ва (15) бармеояд, ки ҳамаи ҳалҳои муодилаи (1) ва ифодаҳои $A_{(\alpha),(b)}y$ дар атрофи нуқтаҳои махсуси b_1 ва b_2 маҳдуданд.

Қайди 2. Формулаи (14) баргарданда мебошад, дар он доимиҳои c_{10}^1,c_{11}^1 (ё c_{10}^2,c_{11}^2), c_{20}^1,c_{21}^1-ро аз рӯи $y(x)$ яккимата ёфтан мумкин аст. Дар ин ҳол доимиҳои c_{10}^1,c_{11}^1 - ро аз сатри якуми формулаҳои (14) ва (15) истифода бурда дар асоси баробариҳои характеристикии

$$y(x)_{|x=b_1+0}=c_{10}^1\ ,\quad A_{(\alpha),(b)}y_{|x=b_1+0}=c_{11}^1 \tag{16}$$

ёфта, сипас аз рӯи онҳо доимиҳои c_{10}^2,c_{11}^2- ро аз системаи (10) муайян мекунем. Бо тарзи дигар амал кардан мумкин аст, ки дар он аввал доимиҳои c_{10}^2,c_{11}^2- ро аз сатри дуюми формулаҳои (14) ва (15) истифода бурда дар асоси баробариҳои характеристикии

$$y(x)_{|x=b_2-0}=c_{10}^2\ ,\quad A_{(\alpha),(b)}y_{|x=b_2-0}=-c_{11}^2 \tag{17}$$

муайян карда, сипас бо ёрии онҳо доимиҳои c_{10}^1,c_{11}^1- ро аз системаи (10) меёбем.

Доимиҳои c_{20}^1 ва c_{21}^1 аз сатри сеюми формулаҳои (14) ва (15) дар асоси баробариҳои

$$y(x)_{|x=b_2+0}=c_{20}^1\ ,\quad A_{(\alpha),(b)}y_{|x=b_2+0}=c_{21}^1 \tag{18}$$

ёфта мешаванд.

Формулаи ҳосил кардашудаи ҳалли умумии муодилаи (1) ва баробариҳои характеристикӣ имконият медиҳанд, ки масъалаҳои намуди Кошӣ - Рикйе гузошта ва ҳал карда шаванд.

Масъалаи 1. Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 1 ҳалли муодилаи (1) тавре ёфта шавад, ки ба яке аз гурӯҳи шартҳои зерин тобеъ бошад:

$$\left\{A_{(\alpha),(b)}^s y(x)\right\}_{x=b_j+0}=\overset{+\,1}{y}_{js}\ ,\ j=1,2\ ,s=0,\,1\ ; \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}\left\{A^{s}_{(\alpha),(b)}y(x)\right\}_{x=b_2-0}&=\overset{-1}{y}_{2s},\\[2em] \left\{A^{s}_{(\alpha),(b)}y(x)\right\}_{x=b_2+0}&=\overset{+1}{y}_{2s}\end{aligned}\qquad\qquad s=0,\,1\ \right\}. \tag{20}$$

Дар ин ҷо $\overset{+1}{y}_{js}$, $j=1,2$, $\overset{-1}{y}_{2s}$, $s=0,\,1$ - ададҳои додашуда мебошанд.

Тарзи ёфтани ҳалли муодилаи (1) - ро дида мебароем, ки шартҳои (19) - ро қонеъ мегардонад. Мувофиқи шартҳои (19), ҳангоми $j=1$ дар асоси сатрҳои якуми формулаҳои (14), (15) ва баробариҳои характеристикии (16) доимиҳои c^{1}_{10},c^{1}_{11} чунин ёфта мешаванд :

$$c^{1}_{1s}=\overset{+1}{y}_{1s},\ s=0,\,1\ . \tag{21}$$

Ин қиматҳои ёфташударо ба системаи (10) гузошта системаи

$$\begin{cases}I^{\alpha_1,+}_{b_1}[\,p^{1}_{1}(x^{0}_{1}),q^{1}_{1}(x^{0}_{1}),\,f^{1}_{1}(x^{0}_{1}),\overset{+1}{y}_{10}\,,\overset{+1}{y}_{11}]=I^{\alpha_2,-}_{b_2}[\,p^{2}_{1}(x^{0}_{1}),q^{2}_{1}(x^{0}_{1}),\,f^{\,2}_{1}(x^{0}_{1}),c^{2}_{10}\,,c^{2}_{11}]\\ I^{\alpha_1,+}_{b_1,1}[\,p^{1}_{1}(x^{0}_{1}),q^{1}_{1}(x^{0}_{1}),\,f^{1}_{1}(x^{0}_{1}),\overset{+1}{y}_{11}]=I^{\alpha_2,-}_{b_2,1}[\,p^{2}_{1}(x^{0}_{1}),q^{2}_{1}(x^{0}_{1}),\,f^{\,2}_{1}(x^{0}_{1}),c^{2}_{11}]\end{cases} \tag{22}$$

- ро ҳосил мекунем, ки аз он доимиҳои ихтиёрии c^{2}_{10},c^{2}_{11} яққимата ёфта мешаванд. Мувофиқи шартҳои (19), ҳангоми $j=2$ дар асоси сатрҳои сеюми формулаҳои (14), (15) ва баробариҳои характеристикии (18) доимиҳои c^{1}_{20},c^{1}_{21} чунин ёфта мешаванд:

$$c^{1}_{2s}=\overset{+1}{y}_{2s},\ s=0,\,1\ . \tag{23}$$

Қимати ёфташудаи доимиҳоро ба формулаи (14) гузошта ҳалли ягонаи муодилаи (1) - ро меёбем, ки шартҳои (19) - ро қонеъ мегардонад.

Теоремаи 2. Бигзор, барои муодилаи (1) шартҳои теоремаи 1 ҷой дошта бошанд. Он гоҳ масъалаи Кошӣ-Рикйе бо шартҳои (19) ҳалли ягона дорад ва он аз формулаи (14) дар вақти доимиҳои ихтиёрии c^{1}_{10},c^{1}_{11} - ро бо ёрии маълумҳои ибтидоӣ аз рӯи баробарии (21), доимиҳои c^{2}_{10},c^{2}_{11} - ро бо қимати мувофиқашон аз системаи (22) ва доимиҳои ихтиёрии c^{1}_{20},c^{1}_{21} - ро бо маълумҳои ибтидоӣ мувофиқи баробарии (23) иваз кардан ҳосил мешавад.

Монанди ҳамин ҳалли муодилаи (1) ёфта мешавад, ки шартҳои (20) - ро қонеъ мегардонад.

Мисол. Ҳалли муодилаи

$$A^{2}_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}}y=\frac{f(x)}{|x|^{\frac{1}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}},\quad x\in\Gamma_{\{0;1\}}=(0;1)\cup(1;2)\,, \tag{24}$$

$$A_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}}y\equiv y'+\frac{p(x)}{|x|^{\frac{1}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}\,y-\frac{q(x)}{|x|^{\frac{1}{2}}|x-1|^{\frac{1}{2}}}\ ,\ p(x)\equiv 1,\ f(x)=q(x)=$$

$$=\begin{cases}\exp\left[2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}-\pi\right]\ дар\ аснои\ x\in(0;1)\\ \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\ дар\ аснои\ x\in(1;2)\end{cases}$$

тавре ёфта шавад, ки шартҳои зеринро қонеъ гардонад:

$$y(x)_{|x=+0}=0\,,\quad A_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}}y_{x=+0}=1\ ,$$

$$y(x)_{|x=1+0}=-1,\quad A_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}}y_{x=1+0}=0\ .$$

Муодилаи додашударо бо (1) муқоиса карда хулоса мебарорем, ки барои он $b_1=0$, $b_2=1$, $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2}$, $\Gamma_1=(0;1)$, $\Gamma_2=(1;2)$ буда, $x_1^0\in\Gamma_1$ нуқтаи қайдшударо ифода намоям, он гоҳ $\Gamma_1=\Gamma_1^1\cup\Gamma_1^2$, $\Gamma_1^1=(0;x_1^0]$, $\Gamma_1^2=[x_1^0;1)$ мешавад. Ҳалли умумии муодиларо дар асоси формулаи (14) меёбем. Сатри якуми ин формуларо дар асоси баробарии (4) муайян мекунем. Барои ин аввал функсияҳои $p_1^1(x)$, $q_1^1(x)$, $f_1^1(x)$ - ро меёбем $p_1^1(x)=\dfrac{p(x)}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$,

$q_1^1(x)=f_1^1(x)=\exp\left[2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}-\pi\right]\cdot x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ ва интеграли $u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(x)$ - ро бо гузориши сеюми Чебишёв ҳисоб мекунем:

$$u_{p_1^1,b_1}^{\alpha_1,+}(x)=\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=-2arctg\sqrt{\frac{1-t}{t}}.\Big|_0^x=-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}+2arctg(+\infty)=$$
$$=\pi-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Маълумҳои болоиро ба формулаи (4) гузошта, баъди баъзе дигаргуниҳо ҳосил мекунем:

$$I_{b_1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{10}^1,c_{11}^1]=$$
$$=\exp\left(-\pi+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[(1+2x)\int_0^x\xi^{-\frac{1}{2}}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}d\xi-2\int_0^x\xi^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}d\xi+c_{11}^1x+c_{10}^1\right].\qquad(25)$$

Дар ин ҷо интеграли якумро дар боло ҳисоб карда будем. Монанди ҳамин интеграли дуюмро ҳисоб мекунем.

$$\int_0^x\xi^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}d\xi=\left(-arctg\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}-(1-\xi)^{\frac{1}{2}}\cdot\xi^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^x=-arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{2}$$

Акнун ҷавоби интегралҳоро ба формулаи (25) гузорем, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$I_{b_1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{10}^1,c_{11}^1]=$$

$$=\exp\left(-\pi+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[(1+2x)\left(\pi-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+2\left(arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)+c_{11}^1x+c_{10}^1\right]$$

ё ки баъди сода кардан

$$I_{b_1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{10}^1,c_{11}^1]=$$
$$=\exp\left(-\pi+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[2x\left(\pi-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+2\sqrt{x(1-x)}+c_{11}^1x+c_{10}^1\right].\qquad(26)$$

Аз ин ҷо бевосита сатри якуми формулаи (15) - ро меёбем:

$$I_{b_1,1}^{\alpha_1,+}[p_1^1(x),q_1^1(x),f_1^1(x),c_{11}^1]=\exp\left(-\pi+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[2\left(\pi-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+c_{11}^1\right].\qquad(27)$$

Акнун сатри дуюми формулаи (14) - ро муайян мекунем, яъне ҳалли муодилаи додашударо дар фосилаи Γ_1^2 меёбем. Функсияҳои $p_1^2(x)$, $q_1^2(x)=f_1^2(x)$, $u_{p_1^2,b_2}^{\alpha_2,-}(x)$ - ро ҳисоб мекунем:

$$p_1^2(x)=1\cdot(x-0)^{-\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{2}},\ q_1^2(x)=f_1^2(x)=\exp\left[2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\pi\right]\cdot x^{-\frac{1}{2}},$$

$$u_{p_1^2,b_2}^{\alpha_2,-}(x)=\int_x^1\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}dt=\int_x^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=-2arctg\sqrt{\frac{1-t}{t}}.\Big|_x^1=-0+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}=2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

ва натиҷаҳоро ба формулаи (7) гузошта, баъди баъзе дигаргунсозиҳо ҳосил мекунем:

$$I_{b_2}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), c_{10}^2, c_{11}^2] =$$
$$= \exp\left(2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[c_{10}^2 + c_{11}^2(1-x) - e^{-\pi}(1+2x)\int_x^1 \xi^{-\frac{1}{2}}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}d\xi + 2e^{-\pi}\int_x^1 \xi^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}d\xi\right].$$

Дар ин ҷо қимати интегралҳоро мувофиқи ҳисоби болоӣ ба ҷояш гузошта ва натиҷаро сода карда, ҳосил мекунем:

$$I_{b_2}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), c_{10}^2, c_{11}^2] =$$
$$= \exp\left(2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[c_{10}^2 + c_{11}^2(1-x) - 4e^{-\pi}x\,arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}} + 2e^{-\pi}\sqrt{x(1-x)}\right]. \qquad (28)$$

Аз ин ҷо сатри дуюми формулаи (15) - ро ҳисоб мекунем:

$$I_{b_2,1}^{\alpha_2,-}[p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), c_{11}^2] = \exp\left(2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left(-c_{11}^2 - 4e^{-\pi}arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right). \qquad (29)$$

Акнун сатри сеюми формулаи (14), яъне ҳалли муодилаи додашударо дар фосилаи $\Gamma_2 = (1;2)$ меёбем. Барои ин функсияҳои $p_2^1(x)$, $q_2^1(x)$, $f_2^1(x)$ ва $u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(x)$- ро муайян мекунем:

$$p_2^1(x) = 1\cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}},\ q_2^1(x) = f_2^1(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\cdot x^{-\frac{1}{2}},$$

$$u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(x) = \int_1^x t^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{1}{2}}dt = \ln\left|\frac{\sqrt{t-1}+\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}-\sqrt{t}}\right|_1^x = \ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}-\sqrt{t-1}}.\Big|_1^x = \ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}.$$

Бинобар ин $\exp\left[u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(x)\right] = \exp\left(\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$ ва $\exp\left[-u_{p_2^1,b_2}^{\alpha_2,+}(x)\right] =$

$= \exp\left(-\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$ мешавад. Натиҷаҳоро ба формулаи (12) гузошта, баъди баъзе дигаргуниҳо ҳосил мекунем:

$$I_{b_2}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), c_{20}^1, c_{21}^1] \equiv$$
$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\left[(1+2x)\int_1^x \xi^{-\frac{1}{2}}(\xi-1)^{-\frac{1}{2}}d\xi - 2\int_1^x \xi^{\frac{1}{2}}(\xi-1)^{-\frac{1}{2}}d\xi + c_{21}^1(x-1) + c_{20}^1\right]. \qquad (30)$$

Дар ин формула интеграли якум дар саҳифаҳои пешина ҳисоб карда шудааст. Интеграли дуюмро бо гузориши сеюми Чебишёв ҳисоб карда, пайдо мекунем:

$$\int_1^x \xi^{-\frac{1}{2}}(\xi-1)^{-\frac{1}{2}}d\xi = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\xi}+\sqrt{\xi-1}}{\sqrt{\xi}-\sqrt{\xi-1}} + \sqrt{\xi(\xi-1)}\right).\Big|_1^x = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} + \sqrt{x(x-1)}.$$

Қимати интегралҳоро ба формулаи (30) гузошта, ҳосил мекунем:

$$I_{b_2}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), c_{20}^1, c_{21}^1] \equiv$$
$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\left[2x\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x(x-1)} + c_{21}^1(x-1) + c_{20}^1\right]. \qquad (31)$$

Аз ин ҷо бевосита сатри сеюми формулаи (15) – ро ҳисоб мекунем ва доро мешавем:

$$I_{b_2,1}^{\alpha_2,+}[p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), c_{21}^1] = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\left(\left[2\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} + c_{21}^1\right).\right. \qquad (32)$$

Акнун дар формулаи (14) қимати сатрҳоро аз баробариҳои (26), (28) ва (31) гузошта, ҳалли умумии муодилаи додашударо дар намуди

$$y(x)=\begin{cases}\exp\left(-\pi+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[2x\left(\pi-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+2\sqrt{x(1-x)}+c_{11}^{1}x+c_{10}^{1}\right]\\ \text{дар аснои } x\in\Gamma_1^1\\ \exp\left(2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[c_{10}^{2}+c_{11}^{2}(1-x)-4e^{-\pi}xarctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}+2e^{-\pi}\sqrt{x(1-x)}\right]\\ \text{дар аснои } x\in\Gamma_1^2\\ =\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\left[2x\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x(x-1)}+c_{21}^{1}(x-1)+c_{20}^{1}\right]\\ \text{дар аснои } x\in\Gamma_2\end{cases}\quad(33)$$

ҳосил мекунем.

Монанди ҳамин, дар формулаи (15) қимати сатрҳоро аз баробариҳои (27), (29) ва (32) гузошта, ифодаро барои қимати оператори $A_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}}y$ ҳосил мекунем:

$$A_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}}y=\begin{cases}\exp\left(-\pi+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left[2\left(\pi-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+c_{11}^{1}\right]\quad \text{дар аснои } x\in\Gamma_1^1\\ \exp\left(2arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\left(-c_{11}^{2}-4e^{-\pi}arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\text{ дар аснои } x\in\Gamma_1^2\\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\left(\left[2\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}+c_{21}^{1}\right)\text{ дар аснои } x\in\Gamma_2\end{cases}\quad(34)$$

Барои дар ин формулаҳо вобастагии ҷуфтҳои доимиҳои ихтиёрии c_{10}^1, c_{11}^1, ва c_{10}^2, c_{11}^2 - ро муайян кардан, аз бефосилагии $y(x)$ ва $A_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}}y$ дар нуқтаи x_1^0 истифода бурда, системаи (10) –ро тартиб медиҳем. Ҳосил мекунем:

$$\begin{cases}\exp\left(-\pi+2arctg\sqrt{\frac{1-x_1^0}{x_1^0}}\right)\left[2x_1^0\left(\pi-2arctg\sqrt{\frac{1-x_1^0}{x_1^0}}\right)+2\sqrt{x_1^0(1-x_1^0)}+c_{11}^{1}x_1^0+c_{10}^{1}\right]=\\ =\exp\left(2arctg\sqrt{\frac{1-x_1^0}{x_1^0}}\right)\left[c_{10}^{2}+c_{11}^{2}(1-x_1^0)-4e^{-\pi}x_1^0arctg\sqrt{\frac{1-x_1^0}{x_1^0}}+2e^{-\pi}\sqrt{x_1^0(1-x_1^0)}\right]\\ \exp\left(-\pi+2arctg\sqrt{\frac{1-x_1^0}{x_1^0}}\right)\left[2\left(\pi-2arctg\sqrt{\frac{1-x_1^0}{x_1^0}}\right)+c_{11}^{1}\right]=\\ =\exp\left(2arctg\sqrt{\frac{1-x_1^0}{x_1^0}}\right)\left(-c_{11}^{2}-4e^{-\pi}arctg\sqrt{\frac{1-x_1^0}{x_1^0}}\right),\end{cases}$$

ки баъди содакунӣ намуди

$$\begin{cases}e^{-\pi}(c_{10}^1+x_1^0c_{11}^1+2x_1^0\pi)=c_{10}^2+(1-x_1^0)c_{11}^2\\ -e^{-\pi}(c_{11}^1+2\pi)=c_{11}^2\end{cases}\quad(35)$$

-ро мегирад. Системаро нисбат ба доимиҳои ихтиёрии c_{10}^2, c_{11}^2 ҳал карда мeёбем: $c_{10}^2 = e^{-\pi}(c_{10}^1 + c_{11}^1 + 2\pi)$ $c_{11}^2 = -e^{-\pi}(c_{11}^1 + 2\pi)$. Ин натиҷаҳоро ба сатри дуюми формулаи (33) гузорем он гоҳ қисми аз доимиҳои ихтиёрӣ вобастаи он чунин мешавад: $c_{10}^2 + c_{11}^2(1-x) = e^{-\pi}(c_{10}^1 + c_{11}^1 + 2\pi) - e^{-\pi}(c_{11}^1 + 2\pi)(1-x) = e^{-\pi}(c_{10}^1 + c_{11}^1 x + 2\pi x$ ва дар натиҷа ифодаи сатр бо ифодаи сатри якуми формула якхела мешавад. Пас формулаи (33) – ро чунин навиштан мумкин аст:

$$y(x) = \begin{cases} \exp\left(-\pi + 2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)\left[2x\left(\pi - 2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + 2\sqrt{x(1-x)} + c_{11}^1 x + c_{10}^1\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{дар аснои } x \in \Gamma_1 \\ = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}\left[2x\ln\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x(x-1)} + c_{21}^1(x-1) + c_{20}^1\right] \textit{дар аснои } x \in \Gamma_2 . \end{cases}$$

(36)

Мисли ҳамин формулаи (34) - ро дигаргун кардан мумкин аст, ки он намуди зеринро мегирад:

$$A_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}} y = \begin{cases} \exp\left(-\pi + 2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)\left[2\left(\pi - 2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + c_{11}^1\right] \quad \textit{дар аснои } x \in \Gamma_1 \\ \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}\left(\left[2\ln\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} + c_{21}^1\right) \textit{дар аснои } x \in \Gamma_2 . \end{cases} \tag{37}$$

Қайд кардан лозим аст, ки системаи (35) - ро нисбат ба доимиҳои ихтиёрии c_{10}^1, c_{11}^1 ҳал карда, натиҷаро ба формулаҳои (33) ва (34) гузошта, ҳалли умумии муодилаи додашуда ва ифодаи $A_{\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\{0;1\}} y$ - ро бо воситаи доимиҳои ихтиёрии c_{10}^2, c_{11}^2 навиштан мумкин аст.

Бо ёрии формулаҳои (33) ва (34) ҳалли муодиларо мeёбем, ки шартҳои додашударо қонеъ гардонад. Барои ин талаб мекунем, ки функсияҳои (33) ва (34) шартҳои масъаларо қонеъ гардонанд. Аз сатри якуми ин формулаҳо дар вақти $x \to +0$ ҳосил мекунем: $c_{10}^1 = 0$, $c_{11}^1 = 1$. Монанди ҳамин аз сатри дуюми формулаҳо дар вақти $x \to 1+0$ мeёбем: $c_{20}^1 = -1$, $c_{21}^1 = 0$. Қимати доимиҳоро ба формулаи (33) гузошта, ҳалли ягонаи масъаларо дар намуди зерин пайдо мекунем:

$$y(x) = \begin{cases} \exp\left(-\pi + 2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)\left[2x\left(\pi - 2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + 2\sqrt{x(1-x)} + x\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{дар аснои } x \in \Gamma_1 \\ = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}\left[2x\ln\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x(x-1)} - 1\right] \textit{дар аснои } x \in \Gamma_2 . \end{cases}$$

АДАБИЁТ

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // ДАН СССР.- 1951.-Т.77, №2. - С.181-183.
2. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1966.-292с.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448с.
4. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Л.Г.Михайлов. Душанбе, 1963, 183с.
5. Rajabov N.R. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients / N. R. Rajabov // Dushanbe: TSNU, 1998. - 158 p.
6. Раджабов Н. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными сингулярными точками / Н. Раджабов, С.К. Зарипов //Вестник Таджикского государственного национального университета. – 2008 . - №1 (42). - С. 37-46.

7. Раджабов Н. Решение немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными сингулярными точками / Н. Раджабов, С.К. Зарипов //Вестник Таджикского национального университета. -2009. - №1 (49). - С. 3-14.
8. Олимов А.Г. Хосиятҳои ҳалҳо ва масъалаҳои намуди Кошӣ - Рикйе барои муодилаи дифференсиалии одии намудаш махсуси дорои ду нуқтаи сарҳадии сингулярӣ /А.Г.Олимов, Ш.Э.Мирзоева // Ученые записки. Серия естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова – Худжанд: Нури маърифат, 2019, №1(48).- С.11-18
9. Олимов А.Г. Интегральное представление решений и задача Коши-Рикье для двух обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с граничной слабо сингулярной точкой /А.Г.Олимов, М.Я.Дадоджонова // Ученые записки. Естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет им. академика Б.Г.Гафурова.- Худжанд. - 2015. - №2 (33). - С 3-10.

REFERENCES

1. Keldysh M. V. On some cases of degeneration of the elliptic equation at the boundary of the region / M. V. Keldysh / / DAN USSR.- 1951.- Vol. 77, №1. - P. 181-183.
2. Smirnov M. M. Degeneration of elliptic and hyperbolic equations / M. M. Smirnov. - Moscow: Science, 1966.- 292p.
3. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations / A. V. Bitsadze. - M.: Science, 1981. - 448c.
4. Mikhailov L.G. A new class of special integral equations and its applications to differential equations with singular coefficients/ L.G.Mikhailov. – Dushanbe, 1963, 183p.
5. Rajabov N.R. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients / N. R. Rajabov . - Dushanbe: TSNU, 1998. - 158 p.
6. Rajabov N. Second order linear ordinary differential equation with two boundary singular points/ N.Rajabov, S.K.Zaripov //Bulletin National University. – 2008 . - №1 (42). - P. 37-46.
7. Rajabov N. Solution of nonmodel second-order linear ordinary differential equation with two boundary singular points/ N.Rajabov, S.K.Zaripov //Bulletin National University. -2009. - №1 (49). - P. 3-14.
8. Olimov A.G.Properties of solutions and Cauchy - Ryke type problems for an ordinary differential equation of a special type with two boundary singular points /A.G.Olimov., S. E.Mirzoeva// Scientific notes. Series of natural and economic Sciences. Founder: Khujand state University named after academician B. Gafurov. - Khujand: Nuri Marifat. -2019. - №1 (48). - P. 11 - 18.
9. Olimov A.G.Integral representation of solutions and Cauchy - Ryke problem for two special type ordinary differential equations with a border weakly singular point / A.G.Olimov., M.Ya.Dadojanova // Scientific notes. Series of natural and economic Sciences. Founder: Khujand state University named after academician B. Gafurov. - Khujand: Nuri Marifat. -2015. - №2 (33). - P. 3 - 10.