01.01.02 Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ
01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
01.01.02 Differential equations, dynamic systems and optimal control

УДК 517.968.2
ББК 22.161.6

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Джангибеков Гулходжа *– доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ (Республика Таджикистан, г. Душанбе), e-mail: gulhoja@list.ru*
Бобоев Элмурод Дӯстович *- преподаватель кафедры алгебры и геометрии ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, г.Худжанд), e-mail: il.boboev_@mail.ru*

МАСЪАЛАИ ДИРИХЛЕ ВА НЕЙМАН БАРОИ СИСТЕМАҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ДУ БО КОЭФФИТСЕНТҲОИ КАНИШНОК

Ҷангибеков Гулхоҷа *– доктори илмҳои физика-математика, профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии ДМТ (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Душанбе), e-mail: gulhoja@list.ru*
Бобоев Элмурод Дӯстович *- омӯзгори кафедраи алгебра ва геометрияи МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: il.boboev_@mail.ru*

DIRICHLET AND NEUMAN PROBLEM FOR SECOND-ORDER ELLIPTIC SYSTEMS WITH DISCONTINOUS COEFFICIENTS

Jangibekov Gulhoja *– Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor of the Department of Functional Analysis and Differential Equations Tajik National University (Tajikistan Republic, Dushanbe), e-mail: gulhoja@list.ru*
Boboev Elmurod Dustovich *- Teacher of the Department of Algebra and Geometry Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e-mail: il.boboev_@mail.ru*

Ключевые слова: *нётеровость, двумерные сингулярные интегральные операторы, задача Дирихле, индекс задачи*

Целью настоящей работы является установление эффективных необходимых и достаточных условий нётеровости задачи Дирихле и Неймана для эллиптической системы второго порядка с разрывными коэффициентами и получение формулы для вычисления индекса.

Калимаҳои калидӣ: *хосияти нётерӣ, операторҳои интегралии дученакаи сингулярӣ, масъалаи Дирихле, индекси масъала.*

Мақсади мақолаи мазкурро муайянкунии шартҳои зарурӣ ва кофиягии самараноки нётерӣ барои масъалаи Дирихле ва Нейман барои системаҳои эллептикии тартиби дуюм бо коэффитсиентҳои канишдор ва ҳосилкунии формула барои ҳисобкунии индекс мебошад.

Key words*: noetherian property, two-dimensional singular integral operators, Dirichlet problem, problem index.*

The purpose of this work is to establish effective necessary and sufficient conditions for the noetherian problem of Dirichlet and Neumann for a second-order elliptic system with discontinuous coefficients and to obtain a formula for calculating the index.

В работах [1],[2] была изучена задача Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя функциями от двух переменных. В предположении непрерывности коэффициентов системы, были установлены необходимые и достаточные условия нётеровости и даны формулы для вычисления индекса указанных задач.

1. Пусть $z = x + iy$ – комплексное число двумерной плоскости E_2. Определим формальные производные от комплексной функции $\omega(z) = u(x, y) + i\vartheta(x, y)$ по следующим формулам.

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + i\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - i\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)$$

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ локально суммируемые функции в области $D \in E_2$.

Определение 1(см.[3]). Будем говорить, что функция $f(z)$ есть обобщенная производная по $\bar{z}$, то функции $g(z)$, если они удовлетворят соотношению

$$\iint\limits_D g(z)\frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}}ds_z = -\iint\limits_D f(x)\varphi(x)as_z,$$

где $\varphi(z)$ -любая финитная функция в D и $f(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial\bar{z}}$.

Определение 2. Установлено, что функция $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^2(D)$, если эта функция имеет обобщенные производные второго порядка и принадлежит пространству $L^p(D), p > 2$.

В данной работе мы будем рассматривать в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ следующую эллиптическую систему дифференциальных уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом при производной $\frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial z^2}$

$$a(z)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}} + b(z)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial z^2} + a_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} + b_1(z)\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial z} + c_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial z} +$$
$$+d_1(z)\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{z}} + e_1(z)\omega + d_1(z)\bar{\omega}, \quad (1)$$

где $z = x + iy, \ \omega = u(z, y) + i\vartheta(x, y),$

$\varphi = argz$, коэффициенты $a(z), b(z)$ и т.д. будем считать непрерывными функциями в D, а $g(z) \in Lp(D), 2 < p < \infty$.

Как видно из (1), коэффициент при производной $\frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial z^2}$ в точке z=0 по всем лучам, выходящим из начала координат имеет разные пределы.

Задача Дирихле. *Найти непрерывные решения системы (1) в области D из класса* $W_p^2(D), 2 < p < \infty$, *удовлетворяющие на границе Г условию*

$$\omega(t)|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Следующее утверждение следует из [4]:

Теорема 1. *Пусть в (1) a (0) = 0 или* $b(0) = 0$. *Тогда для того, чтобы задача Дирихле (2) для эллиптической системы (1) была нётеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$|a(z)| > |b(z)| \quad \text{для всех } z \in \bar{D}, \quad (3)$$
$$|a(z)| < |b(z)| \quad \text{для всех } z \in \bar{D}, a(t) \neq 0 \text{ для всех } t \in \Gamma. \quad (4)$$

При этом, если выполнено условие (3), то задача фредгольмова; если выполнено (4), то индекс задачи равен

$$\kappa = -2Ind_\Gamma a(t).$$

Далее мы будем предполагать, что $a(0) \neq 0$ и $b(0) \neq 0$. Как отмечено в [4], [5], все функции $\omega(z)$, обладающие в D обобщенными производными второго порядка, непрерывные в $\bar{D}$ и удовлетворяющие на Γ условию (2), единственным образом представляются в виде

$$\omega(z) = \iint_D G(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta \equiv (\mathcal{J}f)(z), \quad (5)$$

где

$$G(z,\zeta) = \frac{2}{\pi} ln\left|\frac{\zeta - z}{1 - z\bar{\zeta}}\right|$$

- функция Грина для оператора Лапласа в единичном круге $|z| < 1$,

f(z) – неизвестная функция из пространства $L^p(D), p > 2$.

Действительно, если $f(z) \in L^p(D), p > 2$, то

$$(\mathcal{J}_1 f)(z) \equiv \frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{J}f)(z) = \iint_D \frac{\partial}{\partial z} G(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\iint_D \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}}\right) f(\zeta) ds_\zeta$$

Дифференцируя это равенство по $\bar{z}$, получим

$$\frac{1}{4}\Delta(\mathcal{J}f)(z) \equiv f(z).$$

Поэтому, если предположить $f(z) = \omega_{z\bar{z}}$, то будем иметь

$$\Delta(\omega - \mathcal{J}p) = 0$$
$$\omega(z) = (\mathcal{J}\omega)(z) + U_0(z),$$

где $U_0(z)$ - гармоническая функция в D, которая является непрерывной вплоть до границы $|t| = 1$ функцией. Так как $\omega \equiv 0$ и $(\mathcal{J}\omega)(z) \equiv 0$ на Γ, то $U_0 \equiv 0$ в D и формула (5) доказана.

Теперь имеем

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \bar{z}} = f(z), \qquad \frac{\partial^2 \overline{\omega}}{\partial z^2}(S\bar{f})(z) + (B\bar{\zeta}^2 \bar{f})(z),$$

где

$$(S\bar{f})(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta, \quad (B\bar{\zeta}^2\bar{f})(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\overline{\zeta^2}}{(1 - z\bar{\zeta})^2}\overline{f(\zeta)} ds_\zeta,$$

и $\theta = arg(\zeta - z)$. Подставляя значения указанных производных в систему (1), получим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)f(z) + \frac{z}{\bar{z}} b(z)((S\bar{f})(z) + (B\bar{\zeta}^2\bar{f})(z)) + (Tf)(z) = g(z), z \in D, \qquad (6)$$

где T - вполне непрерывный в пространствах $Lp(D), 2 < p < \infty$, оператор. Интегральное уравнение (4), относится к изученным в работах [3],[6] уравнениям.

Рассмотрим сначала систему с главной частью (1) и с "замороженными" в нуле коэффициентами:

$$a(0)\frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \bar{z}} + b(0)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2 \overline{\omega}}{\partial z^2} = g(z). \qquad (7)$$

Соответствующее интегральное уравнение

$$a(z)f(z) + \frac{z}{\bar{z}} b(z)((S\bar{f})(z) + (B\bar{\zeta}^2\bar{f})(z)) = g(z), z \in D, \qquad (8)$$

изучено в работе [7].

Введем обозначения:

$$R_p(k) = \sqrt{1 - \frac{4\left(1 - \frac{2}{p}\right)}{k^2 - \frac{4}{p^2}}}, \ k = 0, 2, 3, \ldots,; \ \lambda = \frac{b(0)}{a(0)},$$

κ_+ и κ_- - соответственно обозначают число линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений однородной задачи (6), (2) и число условий разрешимости неоднородной задачи.

Теорема 2. *Для нормальной разрешимости задачи (6), (2) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda| \neq 1 \text{ и } |\lambda| \neq R_p(k_0), \quad k_0 = 0, 2, \ldots \qquad (9)$$

Если $|\lambda| < R_p(2))$, *то задача (6), (2) имеет в классе* $W_p^2(D)$ $(2 < p < \infty)$ *единственное решение;*

если $R_p(k_0) < |\lambda| < R_p(k_0 + 1), k_0 = 2, 3, \ldots,$ то $\kappa + = 0$, $\kappa_- = 2k_0 - 2$;

если $1 < |\lambda| < p - 1$, то $\kappa_+ = 3$, $\kappa_- = 0$;

если $|\lambda| > p - 1$, то $\kappa_+ = 4$, $\kappa_- = 0$.

При этом линейно независимые решения однородной задачи и условия разрешимости неоднородной выписываются в явном виде.

Теперь переходим к задаче (2) для исходной системы (1). Предварительно введем следующие обозначения.

Через $\mu_p(\lambda)$ обозначим число, равное для $|\lambda| < 1$ количеству значений k, при которых $R_p(k) < |\lambda|$, для $R_p(k) < |\lambda|$, а для у значений k, при которых $R_p(k) > |\lambda|$, где по прежнему $\lambda = b(0)/a(0)$. Введем еще число

$$\kappa_p(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\lambda) & \text{при } |\lambda| < 1, \\ 4 - 2\mu_p(\lambda) & \text{при } |\lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\lambda) \neq 1, \\ 3 & \text{при } |\lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\lambda) = 1, \end{cases}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы задача (6), (2) в классе $W_p^2(D), 2 < p < \infty$ была нётеровой, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \text{ для всех } z \in \overline{D}, a(t) \neq 0 \text{ для всех } t \in \Gamma, \quad (10)$$

$$|\lambda| \neq R_p(k), k = 0, 2, \ldots, \quad (11)$$

причем индекс задачи равен

$$\kappa = -2Ind_\Gamma a(t) + \kappa_p(\lambda).$$

Как видно из теоремы 1 и 2 отказ от непрерывности коэффициентов существенно влияет на нётеровость и индекс задачи, причем разрешимость будет зависеть от показателя p лебегового пространства $L_p(D)$.

Замечание. Аналогичным образом изучается задача Неймана для системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Док. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.
2. Jangibekov G. On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the pline.- Proicedings of the second ISAAC Congress, v. 2, 2000, p. 1421-1430.
3. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. –М.: Физматгиз, 1959. 672 с.
4. Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области // ДАН СССР, 1986, т. 288, , №4, с. 792-797.
5. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1987, 415 с.
6. Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами. // Известия. ВУЗов. математика.1992, №9. — С. 25-37.
7. Джангибеков Г. О разрешимости одного особого двумерного интегрального уравнения с комплексно - сопряженной неизвестной функцией. // Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, №5, с. 3-6.

REFERENCES

1. G. Dzhangibekov, On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the plane, Dokl. Akad. Nauk, 1993, Volume 330, Number 4, 415–419
2. Jangibekov G. On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the pline.- Proceedings of the second ISAAC Congress, v. 2, 2000, p. 1421-1430.
3. Vekua I.N. Generalized analytic functions. M.: Fizmathgiz, 1959. 672 Pp.
4. Bil'man B.M., Dzhangibekov G. On the conditions for Noetherian property and the index of some two-dimensional singular integral equations with discontinuous coefficients over a bounded simply connected domain // DAN SSSR, v. 288, no. 4, 1986. p. 792-797
5. Dzhuraev A.D. Methods of Singular Integral Equations. – M.: Nauka, 1987, 415 Pp.
6. Dzhangibekov G. On Noetherian property and index of some two-dimensional singular integral equations with discontinuous coefficients. // Izvestia. VUZov. mathematics. 1992, no. 9. – P. 25-37.
7. Dzhangibekov G. On the solvability of a special two-dimensional integral equation with a complex conjugate unknown function. // Dokl. Academy of Sciences of the Tajik SSR, 1977, v. 20, No. 5, p. 3-6.