01.00.00 - ИЛМҲОИ ФИЗИКАВУ МАТЕМАТИКА
01.00.00 - ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
01.00.00 - PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-MATHEMATICS

01.01.02 Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ
01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
01.01.02 Differential equations, dynamic systems and optimal control

УДК 517.946
ББК 221616

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВЫВОДА ОБОБЩЕННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ ОБОЩЕННЫХ СИСТЕМ КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

***Шокирова Мухбира Мухторхоновна** - старший преподаватель кафедры информационно-коммуникационных технологий и программирования Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики, Республика Таджикистан, e-mail: shokirova2002_1977 @mail.ru*

ОИД БА ЯК УСУЛИ ҲОСИЛ КАРДАНИ ФОРМУЛАИ УМУМИКАРДАШУДАИ ИНТЕГРАЛИИ КОШИ БАРОИ ҲАЛҲОИ СИСТЕМАИ УМУМИКАРДАШУДАИ КОШИ-РИМАН БО НУҚТАИ СИНГУЛЯРӢ

***Шокирова Мухбира Мухторхоновна** - муаллими калони кафедраи технологияҳои иттилоотию коммуникатсионӣ ва барномарезии Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон, Ҷумҳурии Тоҷикистон, e-mail:shokirova2002 _1977 @ mail.ru*

ABOUT ONE WITHDRAWAL METHOD INTEGRAL REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF A SPECIAL CLASS OF MODEL OBEDENNYJ OF CAUCHY-RIEMANN SYSTEMS WITH A SINGULAR POINT

***Shokirova Mukhbira Mukhtorkhonovna** - Senior Teacher of the Depattment of Information and Communication Technologies and Programming the Tajik State University of Law, Business and Politics, Tajikistan Republic, Khujand, e-mail: shokirova2002 _1977 @ mail.ru*

***Ключевые слова:** модельное уравнение, обобщенная система Коши-Римана, сингулярная точка, многосвязная область, обобщенная формула Коши.*

Для решения модельной обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой специальным способом строится обобщенная интегральная формула Коши и обобщенный интеграл типа Коши.

***Вожаҳои калидӣ:** муодилаи моделӣ, функсияҳои умумикардашудаи аналитикӣ, нуқтаи сингулярӣ, соҳаи бисёралоқанок, формулаи умумикардашудаи Коши.*

Дар мақола бо як усули махсус барои ҳалҳои системаи умумикардашудаи Коши-Риман бо нуқтаи сингулярӣ формулаи умумикардашудаи интегралии Коши ва интеграли умумикардашудаи навъи Коши ҳосил карда шудааст.

***Key words**: model equation, generalized system of Cauchy-Riemann, a singular point, multiply connected region, the generalized Cauchy formula*

For the solution of a special class model of generalized Cauchy-Riemann systems with singular point set of a generalized Cauchy's integral formula and generalized Cauchy-type integrals.

1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается модельная обобщенная система Коши-Римана вида

$$\partial_{\bar{z}}\Psi - \frac{\alpha}{2\bar{z}}\Psi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\overline{\Psi} = 0, \quad z \in G, \tag{1}$$

где $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y,$ $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \neq 0$ и $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \neq 0 -$ комплексные числа, $\Psi(z)$- искомая функция и G - область, содержащая точку $z = 0$ и ограниченная замкнутым гладким контуром Γ . Решения уравнения (1) рассматриваются в классе непрерывно дифференцируемых в области $G_0 = G - \{0\}$ и ограниченных в окрестности точки $z = 0$ функций, класс которых обозначим через $C^1(G_0)$.

Частный случай уравнения (1), когда $\alpha = 0$ и (1) принимает вид

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda}{2\bar{z}}\overline{\Phi} = 0, \quad z \in G, \tag{2}$$

изучено З. Д. Усмановым в [1], [2], [3] и [4]. Им построена теория решений этого уравнения на основе обобщенной интегральной формулы Коши и обобщенного интеграла типа Коши.

Когда в уравнение (1) α - вещественное число [5], уравнение (1) сводится к уравнению (2) и устанавливается связь между их множествами решений по формуле $\Psi(z) = r^{\alpha}\Phi(z)$. В этом случае, свойства решений уравнения (1) устанавливаются через аналогичные свойства решений уравнения (2). Однако, когда $\mathrm{Im}\alpha = \alpha_2 \neq 0$ невозможно свести уравнения (1) к уравнению (2). Например, в уравнении (1) замена $\Psi(z)$ функцией $r^{\alpha}\Phi(z)$ приводит к уравнению

$$\partial_{\bar{z}}\Phi - \frac{\lambda e^{i\varphi}}{2r^{1+2i\alpha_2}}\overline{\Phi} = 0, z \in G,$$

которое тоже не изучалось раньше. Следовательно, является актуальным изучение уравнения (1).

2. Формальный вывод обобщенной интегральной формулы Коши.

Пусть $G = \{z, |z| < R\}$. Полагая $z = re^{i\varphi}$ и переписывая уравнение (1) в полярных координатах, получим:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - \frac{\alpha}{r}\Psi - \frac{\lambda}{r}\overline{\Psi} = 0. \tag{3}$$

Не оговаривая пока, каким классам функций принадлежит $\Psi(z)$, умножим обе части (3) на $e^{-ik\varphi}/2\pi, k = 0,1,2,...,$ и интегрируем по φ в пределах от 0 до 2π . Если применить обозначение $\Psi_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(z)e^{ik\varphi}d\varphi$, то проведенная операция приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения неизвестной функции $\Psi_k(r)$, то есть k -того коэффициента Фурье искомого решения $\Psi(z)$:

$$r\frac{d\Psi_k}{dr} - (k + \alpha)\Psi_k - \lambda\overline{\Psi}_{-k} = 0 . \tag{4}$$

В (4) заменяя k на $-k$ и проведя операцию комплексного сопряжения, получим уравнение

$$r\frac{d\overline{\Psi}_{-k}}{dr} + (k - \bar{\alpha})\overline{\Psi}_{-k} - \bar{\lambda}\Psi_k = 0 , \tag{5}$$

которое совместно с (4) составляют систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов Фурье искомой функции $\Psi(r,\varphi)$.

Не останавливаясь на детальных тонкостях вычислений, приведем короткую схему нахождения решения системы (4), (5) для всех $k = 1,2,3,....$. Ищем её решения в виде $\Psi_k(r) = a_k r^{\chi}$ и $\overline{\Psi}_{-k}(r) = b_k r^{\chi}$, где a_k, b_k, χ - комплексные числа, подлежащие определению. Подставляя эти функции в систему (4)-(5), после выполнения необходимых действий, для определения χ получим характеристическое уравнение

$$\chi^2 - 2\alpha_1\chi - k^2 - 2i\alpha_2 k + |\alpha|^2 - |\lambda|^2 = 0.$$

Его решениями являются:

$$\chi_1 = \alpha_1 + \sqrt{k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2 k}\quad,\quad \chi_2 = \alpha_1 - \sqrt{k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2 k}$$

Введем обозначение $\mu_k = \mu_{1k} + i\mu_{2k} = \sqrt{k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2 k}$ и пользуясь формулой извлечение квадратного корня от комплексных чисел $\sqrt{a+ib}$ из курса высшей алгебры, получим:

$$\mu_{1k} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2{}^2\right)^2 + 4\alpha_2^2 k^2} + \left(k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2{}^2\right)\right)}$$

$$\mu_{2k} = (\operatorname{sgn}\alpha_2)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2{}^2\right)^2 + 4\alpha_2^2 k^2} - \left(k^2 + |\lambda|^2 - \alpha_2{}^2\right)\right)} \qquad (6)$$

Таким образом, для характеристических чисел χ_1, χ_2 имеем:

$$\chi_1 = \alpha_1 + \mu_{1k} + i\mu_{2k} \quad \text{и} \quad \chi_2 = \alpha_1 - \mu_{1k} - i\mu_{2k},$$

где μ_{1k} и μ_{2k} даются формулами (6). Далее для каждого характеристического числа известным образом определяются соответствующие $\Psi_k(r)$ и $\Psi_{-k}(r)$, $k = 1,2,3,\ldots$. Для определения $\Psi_0(z)$ выделяются реальная и мнимая часть (4) при $k = 0$ и решается полученная система. Далее все $\Psi_k(r), k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ вносятся в ряд $\Psi(r,\varphi) = \Psi_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty}(\Psi_k(r)e^{ik\varphi} + \Psi_{-k}(r)e^{-ik\varphi})$. В результате такой процедуры получим формальное решение $\Psi(z)$ уравнения (1) в виде ряда

$$\Psi(z) = \Psi_{01}(r) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda a_k g_k(r)e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}}\,\overline{a}_k\,\overline{g}(r)e^{-ik\varphi}\right)r^{\alpha_1+\mu_{1k}} +$$

, (7)

где

и , когда

и ,

, когда ,

, $g_k(r) = \cos(\mu_{2k}\ln r) + i\sin(\mu_{2k}\ln r)$, $P_{1k} = (\mu_{1k} - k) + i(\mu_{2k} - \alpha_2)$,

, -произвольные вещественные и - произвольные комплексные постоянные.

Постоянные можно определить различным способом и останавливаемся на одном специальном их выборе. С этой целью выберем два радиуса и так чтобы $0 < r^1 < r < R^1 < R$, и обозначим через c и C окружности этих радиусов с центром в точке $z = 0$. Функция, определяемая формулой (7) удовлетворяет уравнению (1) в кольце между этими окружностями, включая и сами эти окружности c и C. В (7) при $z = \zeta = \rho e^{i\gamma} \in C$ умножим обе части (7) на $e^{-ik\gamma}$ и $e^{ik\gamma}$ и проинтегрируем по окружности C и из полученной системы определим неизвестные a_k, b_k через значение функции $\Psi(\zeta)$ на окружности C в виде

$$a_k = \frac{\overline{g}(\rho)\rho^{-\alpha_1-\mu_{1k}}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{P_{2k}\Psi(\rho,\gamma) + \lambda\overline{\Psi}(\rho,\gamma)}{\lambda\mu_k}\right]e^{-ik\gamma}d\gamma, \qquad (8)$$

(9)

Аналогичным образом при $\zeta = \rho e^{i\gamma} \in c$ определим неизвестные a_k, b_k через значение функции $\Psi(\zeta)$ на окружности c в виде

$$a_k = -\frac{\overline{g}(\rho)\rho^{-\alpha_1-\mu_{1k}}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{P_{2k}\Psi(\rho,\gamma)+\lambda\overline{\Psi}(\rho,\gamma)}{\lambda\mu_k}\right]e^{-ik\gamma}d\gamma\,, \tag{10}$$

. (11)

Дальнейшее рассуждение проводим, когда $\alpha_1 > 0$ и $|\alpha| > |\lambda| \geq |\alpha_2|$. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Правая часть (7) состоит из суммы двух рядов и все члены ряда (7) по отдельности в области $0 < |z| < R$ удовлетворяют модельному уравнению (1). Заметим, что если $\alpha_1 > 0$, то все члены первого ряда содержат сомножители r с положительными степенями $\alpha_1 + \mu_{1k}$ и они обращаются в ноль в точке $z = 0$. Члены второго ряда содержат сомножители r со степенями $\alpha_1 - \mu_{1k}$ и все члены, для которых $\alpha_1 - \mu_{1k} \geq 0$ остаются ограниченными в точке $z = 0$. Остальные члены содержат r с отрицательными степенями $\alpha_1 - \mu_{1k}$ и будут иметь в этой точке полюсы порядка $|\alpha_1 - \mu_{1k}|$. Таковыми членами с отрицательными степенями r являются те, для которых $\alpha_1 - \mu_{1k} < 0$. Разрешая это неравенство относительно k, получим:

$$k > \frac{\alpha_1}{|\alpha|}\sqrt{|\alpha|^2 - |\lambda|^2}\,.$$

Тогда, при $\alpha_1 > 0$ формулу (7) перепишем в несколько ином виде

$$\Psi(z) = i(\lambda - P_{20})a_0 r^{\alpha_1+\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda a_k g_k(r)e^{ik\varphi} + \overline{P_{1k}}\,\overline{a}_k\,\overline{g}(r)e^{-ik\varphi}\right)r^{\alpha_1+\mu_{1k}} +$$

$$+\, i(\lambda + P_{10})b_0 r^{\alpha_1-\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{k_0}\left(\lambda b_k\overline{g_k}(r)e^{ik\varphi} - \overline{P_{2k}}\,\overline{b}_k g_k(r)e^{-ik\varphi}\right)r^{\alpha_1-\mu_{1k}} +$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\lambda b_k\overline{g_k}(r)e^{ik\varphi} - \overline{P_{2k}}\,\overline{b}_k g_k(r)e^{-ik\varphi}\right)r^{\alpha_1-\mu_{1k}}\,, \tag{12}$$

в котором две первые суммы содержат r в положительных степенях и третья сумма в отрицательных. Здесь $k_0 = \left[\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\sqrt{|\alpha|^2 - |\lambda|^2}\right]$ и квадратная скобка означает целую часть числа.

Далее, подставляя в первых двух суммах (12) выражения a_k, b_k из (8) и (9) и в последней сумме b_k из (11), после несложных преобразований получим:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Omega_1(z,\zeta)}{\zeta}\Psi(\zeta)d\zeta - \frac{\Omega_2(z,\zeta)}{\overline{\zeta}}\overline{\Psi}(\zeta)d\overline{\zeta}\ , \quad z \in G\,, \tag{13}$$

где $$\Omega_1(z,\zeta) = \frac{P_{10}}{2\mu_{10}}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1-\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{k_0}\left[\frac{P_{1k}e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k}\overline{g}\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{\overline{P_{2k}}e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}}g\left(\frac{r}{\rho}\right)\right]\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}} +$$

$$+ \frac{P_{20}}{2\mu_{10}}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{P_{2k}e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k}g\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{\overline{P_{1k}}e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}}\overline{g}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right]\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}}, r < \rho,$$

$$\Omega_1(z,\zeta)=-\sum_{k=1}^{k_0+1}\left[\frac{P_{1k}e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k}\overline{g}\left(\frac{r}{\rho}\right)+\frac{\overline{P_{2k}}e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}}g\left(\frac{r}{\rho}\right)\right]\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}},r>\rho.$$

$$\Omega_2(z,\zeta)=-\frac{\lambda}{2\mu_{10}}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1-\mu_{10}}-\sum_{k=1}^{k_0}\left[\frac{\lambda e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k}\overline{g}\left(\frac{r}{\rho}\right)+\frac{\lambda e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}}g\left(\frac{r}{\rho}\right)\right]\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}}+$$

$$+\frac{\lambda}{2\mu_{10}}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{10}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k}g\left(\frac{r}{\rho}\right)+\frac{\lambda e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}}\overline{g}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right]\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1+\mu_{1k}},r<\rho\ . \tag{14}$$

$$\Omega_2(z,\zeta)=\sum_{k=1}^{k_0+1}\left[\frac{\lambda e^{ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k}\overline{g}\left(\frac{r}{\rho}\right)+\frac{\lambda e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\overline{\mu_k}}g\left(\frac{r}{\rho}\right)\right]\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1-\mu_{1k}},r>\rho.$$

3. Обоснование формулы (13)

Приводим основные свойства функций $\Omega_1(z,\zeta),\Omega_2(z,\zeta)$. Пусть E -расширенная плоскость комплексной переменной z .

Лемма 1. Функция $\Omega_1(z,\zeta)$ и $\Omega_2(z,\zeta)$ представимы в виде

$$\Omega_1(z,\zeta)=\frac{\zeta}{\zeta-z}+\Omega_1^0(z,\zeta),\qquad \Omega_2(z,\zeta)=\Omega_2^0(z,\zeta)-\left\{\begin{array}{l}\lambda\ln\left|1-\dfrac{z}{\zeta}\right|,|z|<|\zeta|,\\ \hline \lambda\ln\left|1-\dfrac{\zeta}{z}\right|,|z|>|\zeta|,\end{array}\right. \tag{15}$$

где Ω_1^0 и Ω_2^0 при фиксированном значении $\zeta=\zeta_0\neq 0,\infty(z=z_0\neq 0,\infty)$ по z $(no\zeta)$ непрерывны всюду в плоскости E за исключением точки $z=0(\zeta=\infty)$, где они ограничены и при $z=\infty(\zeta=0)$ имеют ноль порядка $\mu_{1k_0+1}-\alpha_1$.

Лемма 1 доказывается по схеме [1. стр. 16-20].

Лемма 2. Функции Ω_1 и Ω_2 совместно удовлетворяют соотношениям

$$\partial_{\bar z}\Omega_1=\frac{\alpha}{2\bar z}\Omega_1+\frac{\lambda}{2\bar z}\overline{\Omega_2}\quad \text{и}\quad \partial_{\bar z}\Omega_2=\frac{\alpha}{2\bar z}\Omega_2+\frac{\lambda}{2\bar z}\overline{\Omega_1}\ . \tag{16}$$

Осуществляя почленное дифференцирование в (14), получим (16).

В силу первого равенства (15), первое уравнение (16) может быть записано

$$\partial_{\bar z}\Omega_1^0=\frac{\alpha}{2\bar z}\Omega_1+\frac{\lambda}{2\bar z}\overline{\Omega_2}\ . \tag{17}$$

Пусть, теперь, G - многосвязная область, ограниченная конечным числом простых гладких замкнутых контуров Γ и содержащая внутри точку $z=0$. Рассмотрим в этой области формулу (13). Из леммы 1 следует, что функция $\Psi(z)$, определяемая формулой (13), является непрерывной в области $G-0$ и ограничена в точке $z=0$. Подставляя правую часть (13) в уравнение (1) и осуществляя дифференцирование под знаком интеграла, на основании (16) увидим, что $\Psi(z)$ непрерывно дифференцируема в области $G-0$ и там удовлетворяет уравнению (1). Следовательно, $\Psi(z)$ решение уравнения (1) из класса $C^1(G_0)$. Кроме того, формула (13) определяет значения решения $\Psi(z)$ уравнения (1) внутри области G через его граничные значения.

Формулу (13) будем называть *обобщенной интегральной формулой Коши* для решения модельного уравнения (1) из класса $C^1(G_0)$.

4. Обобщенный интеграл типа Коши.

Пусть Γ -простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость Е комплексного переменного на области G^+ (содержит точку $z=0$) и G^- (содержит точку $z=\infty$).

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Omega_1(z,\zeta)}{\zeta}\nu(\zeta)d\zeta-\frac{\Omega_2(z,\zeta)}{\overline{\zeta}}\overline{\nu}(\zeta)d\overline{\zeta}, \tag{18}$$

где $\Omega_1(z,\zeta),\Omega_2(z,\zeta)$ даются формулами (14) и $\nu(\zeta)$ - функция, удовлетворяющая на Γ условию Гёльдера. Интеграл (18) определяет две самостоятельные функции $\Psi^+(z)$ и $\Psi^-(z)$ соответственно в областях G^+ и G^-. В силу (16) каждая из них является решением уравнения (1), причем $\Psi^+(z)\in C(G^+\cup\Gamma)\cap C^1(G^+-0)$, $\Psi^-(z)\in C(G^-\cup\Gamma)\cap C^1(G^-)$ и $\Psi^-(\infty)=0.$

Формулу (18) будем называть обобщенным интегралом типа Коши для решения модельного уравнения (1).

Обобщенная интегральная формула Коши (13) и обобщенный интеграл типа Коши (18) позволяют построить, как в [1], полную теорию решений уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З. Д. Исследование обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой.//Изв.АН. ТаджССР Отд-ние физ.-мат.,хим. и геол. наук. -1972.-1(43).-С.3-6.
2. Усманов З. Д. Структура нулевой обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой.//Изв.АН. ТаджССР.-1974.-3(53).-С.7-10.
3. Усманов З. Д. Исследование уравнения $\partial_{\bar z}\Phi-\frac{\lambda}{2\bar z}\overline{\Phi}=0.$ / Исследования по краевым задачам и интегральным уравнениям.-Душанбе., Дониш, 1976.-С.159-186.
4. Усманов З. Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой. Математический институт с ВЦ АН ТаджССР. – Душанбе, 1993, 244 с.
5. Ахмедов Р., Шокирова М. М. О некоторых свойствах решений модельной обобщенной системы Коши-Римана в окрестности сингулярной точки.// Символ науки. 2015.- № 10/ 2015. ISSN2410-700X./– Россия Уфа-2015, С. 9-12

REFERENCES

1. Z. D. Usmanov. Study of generalized analytic functions with a fixed singular point. // Izv. AN. the Tajik SSR Separate physical-mat., Chem. and geol. sciences. -1972.-1 (43) .- P.3-6.
2. Z. D. Usmanov. The structure of zero generalized analytic functions with a fixed singular point. // Izv. AN. TajSSR.-1974.-3 (53) .- P.7-10
3. Z. D. Usmanov. Study of the equation $\partial_{\bar z}\Phi-\frac{\lambda}{2\bar z}\overline{\Phi}=0.$ / Research on boundary value problems and integral equations.-Dushanbe., Donish, 1976.-P.159-186
4. Z. D. Usmanov. Generalized Cauchy–Riemann systems with a singular point. Mathematical Institute with Computing Center of the Academy of Sciences of the Tajik SSR. - Dushanbe, 1993, 244 p.
5. Akhmedov R., Shokirova M. M. On some properties of solutions of a model generalized Cauchy-Riemann system in a neighborhood of a singular point. // Symbol of Science №10/2015 (9 p.) ISSN2410-700X. /– Russia Ufa-2015, 9-12 p.