1.3.3. Физикаи назариявӣ
1.3.3. Теоретическое физика
1.3.3. Theoretical physics

УДК 538.9, 517.9
ББК 22.311

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

Содикова Хафиза Мухамадисхаковна *– старший преподаватель кафедры информационно – коммуникационных технологий и программирования ТГУПБП, e–mail: sodikova72@list.ru*

МОДЕЛСОЗИИ АДАДИИ ЭВОЛЮТСИЯИ СИСТЕМАҲОИ ДИНАМИКИИ ҲАЛЛИ ДУСОЛИТОНИИ МУОДИЛАИ ҒАЙРИХАТТИИ СКАЛЯРИИ ШРЁДИНГЕР

Содиқова Ҳафиза Муҳамадисҳақовна *–муаллими калони кафедраи технологияҳои иттилоотию – коммуникатсионӣ ва барномарезӣ ДДҲБСТ, e–mail: sodikova72@list.ru*

NUMERICAL SIMULATION OF THE EVOLUTION OF DYNAMIC SYSTEMS OF THE TWO-SOLITON SOLUTION OF THE SCALAR NONLINEAR SCHROEDINGER EQUATION

Sodikova Hafiza Mukhamadiskhakovna *– Senior Lecturer of the Department of Information and Communication Technologies and Programming TSULBP, e–mail: sodikova72@list.ru*

Ключевые слова*: скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера, солитон, бризер, двухсолитонное решение, конденсатные граничные условия.*

Методом численного моделирования проведён ряд экспериментов для наблюдения эволюции динамических систем солитоноподобных решений скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с убывающими граничными условиями и с учётом скорости вращения. Наблюдается формирование двухсолитонного решения бризерного типа для скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера при учёте скорости вращения и с конденсатными граничными условиями.

Вожаҳои калидӣ*: муодилаи ғайрихаттии скалярии Шрёдингер, солитон, бризер, ҳалли дусолитона, шартҳои сарҳадии конденсатӣ.*

Бо усули моделсозии ададӣ барои мушоҳидаи эволютсияи системаҳои динамикии ҳаллҳои солитонмонанди муодилаи скалярии Шрёдингер бо камшавии шартҳои сарҳадӣ ва бо назардошти суръати ғайринулии ҳаракат як қатор таҷрибаҳо гузаронида шуданд. Ташаккулебии ҳалҳои дусолитонаи намуди бризерӣ барои муодилаи ғайрихаттии скалярии Шрёдингер бо назардошти сурьати ғайринулии ҳаракат бо шартҳои сарҳадии конденсатӣ мушоҳида карда шуд.

Key words: *scalar nonlinear Schrödinger equation, soliton, breather, two-soliton solution, condensate boundary conditions.*

A number of experiments have been carried out by numerical simulation to observe the evolution of dynamic systems of soliton-like solutions of the scalar nonlinear Schrödinger equation with decreasing boundary conditions and taking into account the rotation speed. The formation of a two-soliton breather-type solution for the scalar nonlinear Schrödinger equation is observed when the rotation velocity is taken into account and with condensate boundary conditions.

С недавних времён для решения ряда фундаментальных нелинейных уравнений математической физики, использование метода численного моделирования стало более актуальным, что позволяет получать решения, в случае отсутствия последовательного решения прямой и обратной задачи рассеяния. Наглядным примером использования численного метода является исследования нелинейных волновых эволюционных процессов, что наблюдалось в работах учёных Маханькова В.Г., Абдуллоева Х.О., Муминова Х.Х. и других авторов [1-5].

В данной работе численным методом исследуется эволюция динамических систем двухсолитонного решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера (СНУШ). Нелинейное уравнение (1) которое образуется при моделировании взаимодействия волновых пакетов, где в роли потенциала (2), играет низкочастотная волна, является гладким и вещественным и имеет следующий вид

$$i\,\psi_t + \psi_{xx} + u(\mathrm{x,t})\psi = 0. \tag{1}$$

$$u(\mathrm{x,t}) = -\lambda|\varphi|^2 \tag{2}$$

Используя низкочастотную волну (2) рассмотрим скалярное НУШ вида (3), с убывающими граничными условиями

$$i\,\psi_t + \psi_{xx} - \lambda|\varphi|^2\psi = 0. \tag{3}$$

Дубровиным Б.А., Маланюком Т.М., Кричевером И.М. и Маханьковым В.Г. [6] разработан алгебро -геометрический метод для построения широкого класса решений нелинейных уравнений математической физики. Он позволяет получать в явном виде известные и новые многосолитонные решения уравнений, в частности, для скалярного НУШ (3) двухсолитонное решение уравнения следующего вида [7-9]

$$\psi = \left(1 + \frac{B_3\cos(\beta^-(x+v^-t)-h_3) + B_4 e^{\beta^+(x+v^+t)}}{B_1\,ch(\beta^+(x+v^+t)-h_1) + B_2\,ch(\beta^-(x+v^-t)+h_2)}\right)e^{ik_1(x+k_1t)} \tag{4}$$

где

$$B_1 = \left(\frac{C_{11}C_{22}|\varkappa_{12}|^2}{|\bar{\varkappa}_{12}|^2\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad B_2 = \left(\frac{C_{11}C_{22}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad B_3 = \left(\frac{C_{11}C_{22}}{(k_1-\varkappa_1)(k_1-\varkappa_2)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$B_4 = -\left(\frac{\bar{\varkappa}_{21}}{\varkappa_{12}\varkappa_{22}(k_1-\varkappa_1)} + \frac{\bar{\varkappa}_{12}}{\varkappa_{21}\varkappa_{11}(k_1-\varkappa_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad e^{h_1} = \left(\frac{|\varkappa_{12}|^2}{C_{11}C_{22}\varkappa_{11}\varkappa_{22}|\bar{\varkappa}_{12}|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{h_2} = \left(\frac{C_{11}\varkappa_{11}}{C_{22}\varkappa_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad i,j = 1,2. \qquad e^{-h_3} = \left(\frac{C_{22}(k_1-\varkappa_2)}{C_{11}(k_1-\varkappa_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v^- = 2\frac{\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}, \qquad v^+ = 2\frac{\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \qquad v^{\pm} = \frac{2(\alpha_2\beta_2 \pm \alpha_1\beta_1)}{\beta_2 \pm \beta_1}$$

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_i - \bar{\varkappa}_j, \qquad \bar{\varkappa}_{ij} = \bar{\varkappa}_i - \varkappa_j, \qquad \beta^+ = \beta_1 + \beta_2, \qquad \beta^- = \beta_2 - \beta_1,$$

Для исследования эволюции системы, используем характеристики решения, т.е. интегралы уравнения (1), или точнее, импульс

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\bar{\varphi}_x\varphi - \varphi_x\bar{\varphi})\,\mathrm{dx}, \tag{5}$$

интеграл числа частиц

$$\mathrm{Q} = \int_{-\infty}^{\infty}(|\varphi|^2)\mathrm{dx} \tag{6}$$

и энергии

$$\mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty}(|\varphi_x|^2 + (\lambda|\varphi|^2)^2)\mathrm{dx} \tag{7}$$

С использованием явной трёхслойной разностной схемой “leap–frog” для численного моделирования разработан комплекс программ, с условием устойчивости $\tau \le \frac{h^2}{4}$, где τ – шаг по времени, h – шаг по координате. В тестовых вычислениях интеграл движения, т.е. импульс, интеграл числа частиц и энергии в тестовых сохранялись с относительной точностью соответсвенно $\Delta P/P \approx 10^{-3} - 10^{-4}$, $\Delta Q/Q \approx 10^{-4} - 10^{-5}$, $\Delta E/E \approx 10^{-3} - 10^{-4}$.

Для анализа эволюции двухсолитонного решения (4) скорость движения центра масс задавалась в диапазоне [0, 0.5] с шагом 0.01 и широком интервале изменения параметров α_1, α_2, β_1, β_2, λ, γ_1 и γ_2. Результаты наиболее корректных численных экспериментов при значениях параметров $b = 1$, $\alpha_1 = 0.29, \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 0.096$, $\beta_2 = 0.1$, $\gamma_1 = 1.2$, $\gamma_2 = 1.2$, $\lambda = 1$, $k1 = 0.05$ на интервале [–100, 100] до времен t=100 при скорости движения v=0.11, приведены на рис. 1–5.

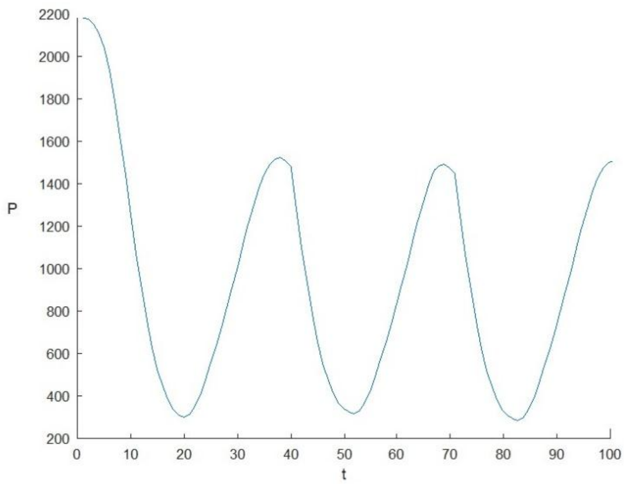


Рис. 1. График зависимости интеграла импульса солитона от времени

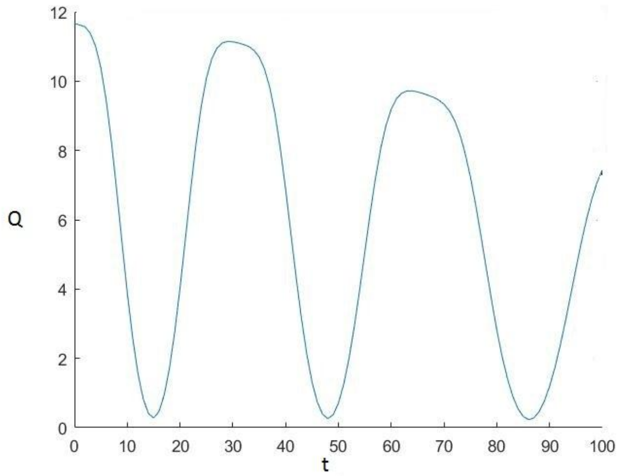


Рис. 2. График зависимости интеграла числа частиц солитона от времени

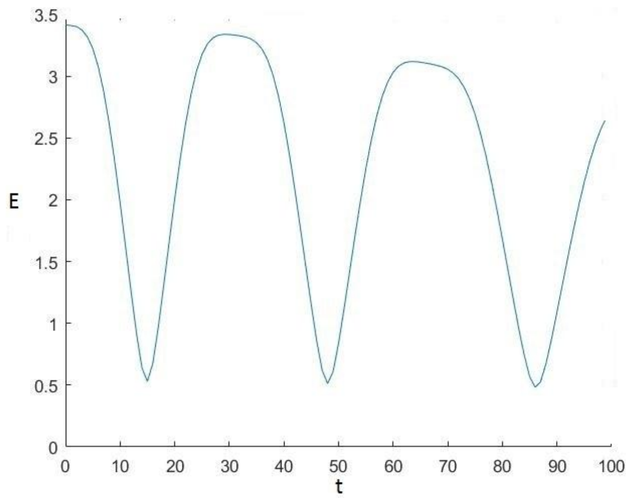


Рис.3. График зависимости интеграла энергии солитона от времени

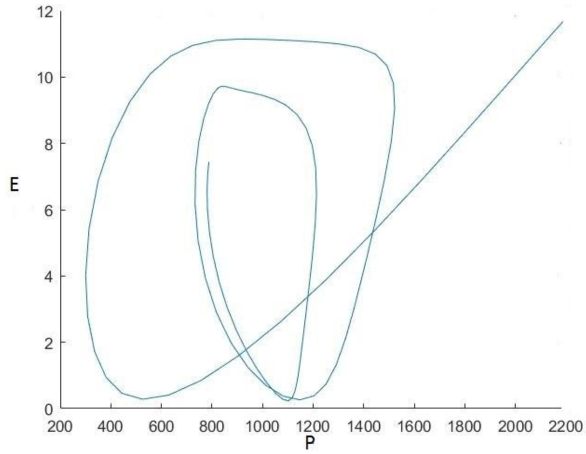


Рис.4. Фазовый портрет системы
(зависимость интеграла импульса от интеграла энергии солитона)

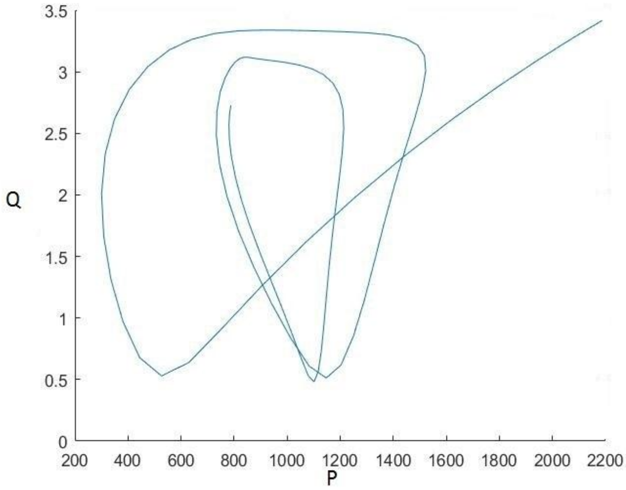
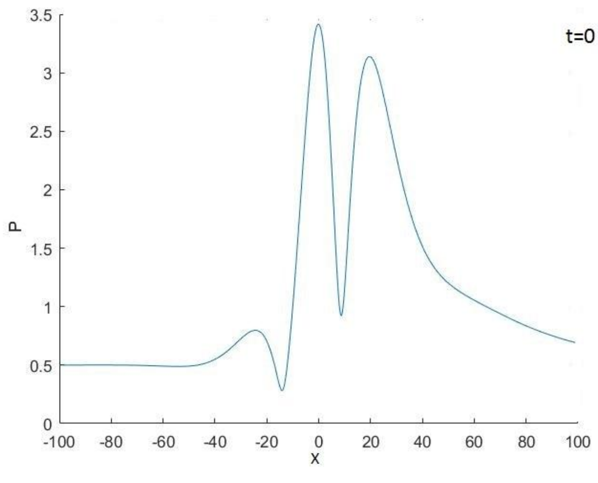


Рис.5. Фазовый портрет системы
(зависимость интеграла числа частиц от интеграла импульса солитона)



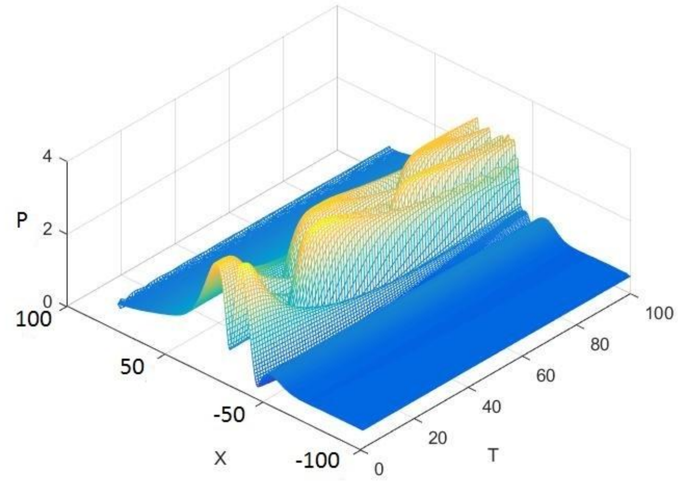


Рис.6. График эволюции плотности импульса солитона.

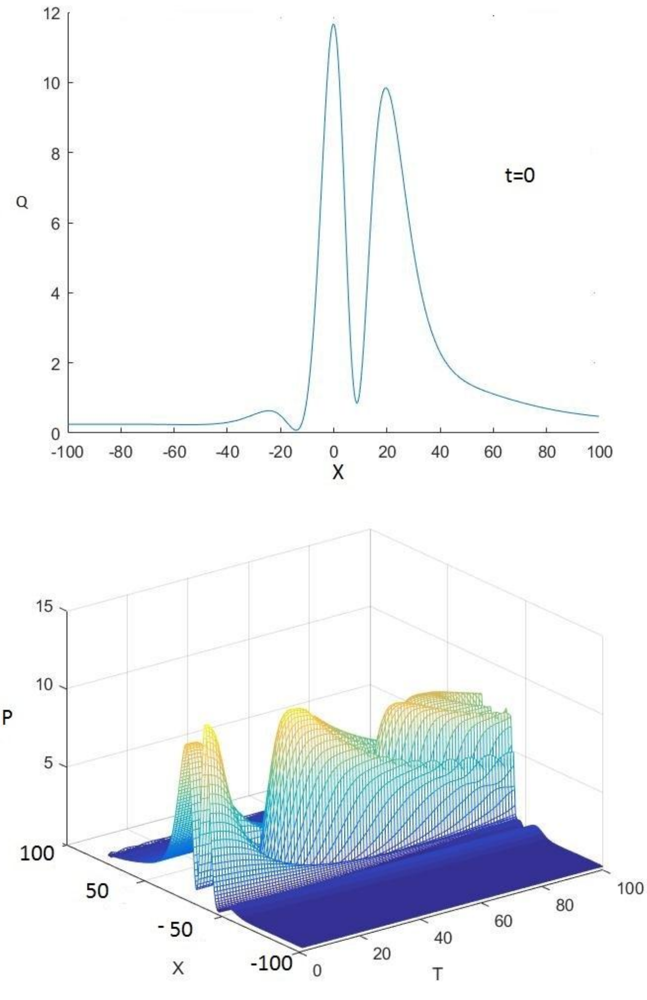


Рис.7. График эволюции плотности числа частиц солитона.

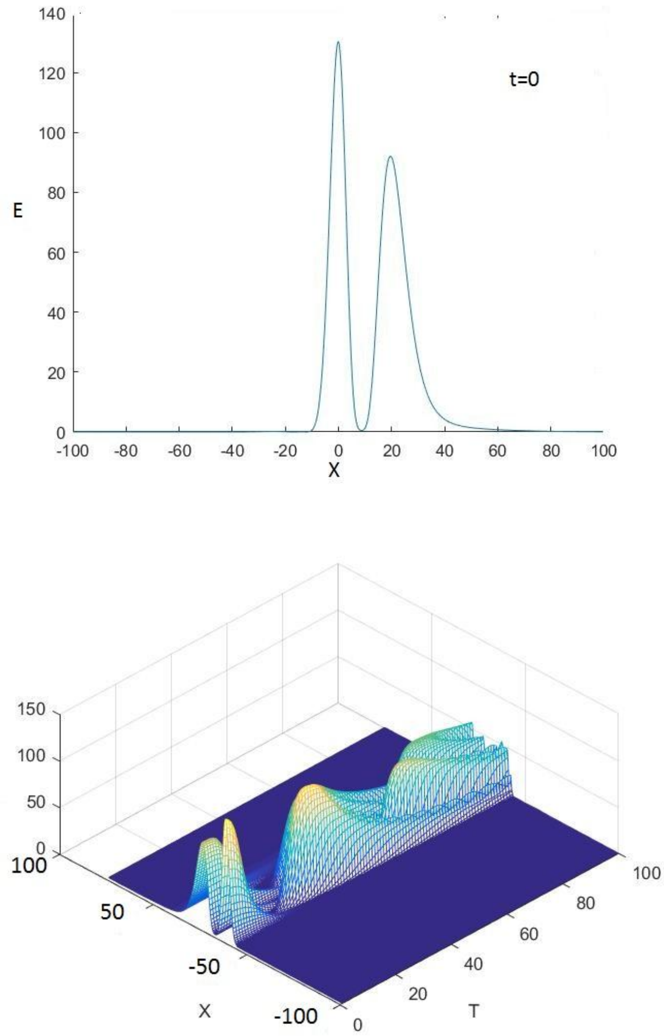


Рис.8. График эволюции плотности числа частиц солитона.

Таким образом, проведенный ряд численных экспериментов показывает, что двухсолитонное решение (4) скалярного нелинейного уравнения Шредингера с убывающими граничными условиями (3), построенное алгебро–геометрическим методом, меняется, но восстанавливает свою форму через период (рис.1–3), а фазовые портреты (см. рис.4,5) показывают плавные локализованные начальные распределения с параметрами, близкими к точке, расположенной в фазовом пространстве. Также эволюция плотности моментов системы (3) при наличии ненулевой скорости солитона и при соответствующих параметрах стабилизируются и сохраняют период волны постоянной, что говорит о характере бризерного типа (рис. 6–8) [10–12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Makhankov V.G. On stationary solutions of Schrödinger equation with a self–consistent potential satisfying Boussinesq's equations // Phys. Lett. – 1974. – v. 50. – n. 1. – P. 42–44.
2. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны – Киев. – Наукова Думка. – 1983. – 189 С.
3. Новиков С.Н. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Москва: Наука. –1980. – 320 С.
4. Абдуллоев Х.О., Рахимов Ф.К. Двухсолитонные решения СНУШ с конденсатными граничными условиями. – ЖТФ. – 1995. – Т.65. – С.191–196.
5. Рахимов Ф.К., Абдуллоев Х.О., Якубова Л. Солитонные решения уравнений, описывающих экситоны в молекулярных системах. Вопросы физ. хим. свойств веществ. – Душанбе. – 1998. – ЖЗ. – С.56–60.
6. Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричивер И.М., Маханьков В.Г. Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом. ЭЧАЯ. – 1988. – Т. 19. – №.3. – С.579.

7. Рахими Ф., Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Курбониен М.С. Одно- и двухсолитонное решение скалярного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. – № 3-4. – С. 138-144.
8. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х., Рахимов Ф.К., Маханьков В.Г. Двухсолитонные решения скалярного нелинейного уравнения Шредингера с конденсатными граничными условиями. ЖТФ. – 1995. – Т. 65. – С. 191–196.
9. Рахими Ф., Абдуллоев Х. О., Максудов А. Т., Курбониен М. С. Решение нелинейного уравнения Шредингера с учётом самосогласованных потенциалов / Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. – № 1–2. – С. 50–56.
10. Муминов, Х. Х., Мухамедова Ш. Ф., Асгари–Ларими М. Численное моделирование эволюции двухсолитонного решения скалярного нелинейного уравнения Шредингера с притягивающим потенциалом / Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико–математических, химических, геологических и технических наук. – 2017. – № 3(168). – С. 44–51.
11. Akhmediev N., Ankiewicz A. Dissipative Solitons / Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag. – 2005.
12. Земляная Е.В., Барашенков И.В. Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шредингера с параметрической накачкой и диссипацией – Математическое моделирование. – Том 17. Номер 1. – 2005. – С.65–78.

REFERENCES

1. Makhankov V.G. On stationary solutions of Schrödinger equation with a self–consistent potential satisfying Boussinesq's equations // Phys. Lett. – 1974. – V. 50. – N.1. – P. 42–44.
2. Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S. Nonlinear magnetization waves. Dynamic and topological solitons – Kiev. – Naukova Dumka. – 1983. – 189 P.
3. Novikov S.N. The theory of solitons. The method of the inverse problem. Moscow: Nauka. –1980. – 320P.
4. Abdulloev H.O., Rakhimov F.K. Two–soliton solutions of SNUS with condensate boundary conditions. ZHTF. – 1995. – P.65. – P.191-196.
5. Rakhimov F.K., Abdulloev H.O., Yakubova L. Soliton solutions of equations describing excitons in molecular systems. Matter of physical, chemistry properties of substances. Dushanbe. –1998. ZHZ. – P.56-60.
6. Dubrovin B.A., Malanyuk T.M., Kriever I.M., Makhankov V.G. Exact solutions of the nonstationary Schrodinger equation with self–consistent potential. ECHAYA. –1988. –VOL. 19. №3. –579P.
7. Rahimi F., Abdulloev H.O., Maksudov A.T., Kurbonien M.S. One- and two-soliton solution of scalar nonlinear Schrodinger equation with self-consistent potentials // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2017. – Vol. 60. – No. 3-4. – pp. 138-144.
8. Abdulloev H.O., Maksudov A.T., Muminov H.H., Rakhimov F.K, Makhankov V.G. Two–soliton solutions of the scalar nonlinear Schrodinger equation with condensate boundary conditions. ZhTF. – 1995. – vol. 65. – P. 191–196.
9. Rahimi F. Abdulloev H. O, Maksudov A. T., Kurbonien M. S. Solution of the nonlinear Schrodinger equation taking into account self–consistent potentials / Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2017. – Vol. 60. –№. 1–2. – P. 50–56.
10. Muminov, H. H., Mukhamedova Sh. F., Asgari–Larimi M. Numerical simulation of the evolution of a two–soliton solution of a scalar nonlinear Schrodinger equation with attractive potential / // The news of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Department of Physical and Mathematical, Chemical, Geological and Technical Sciences. – 2017. – № 3(168). – P. 44–51.
11. Akhmediev N., Ankiewicz A. – Dissipative Solitons., Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag. – 2005.
12. Zemlyanaya E.V., Barashenkov I.V. Numerical analysis of moving solitons in the nonlinear Schrodinger equation with parametric pumping and dissipation – Mathematical modeling. – Vol. 17. № 1. – 2005. – P.65–78.