ББК 22.161
ТДУ 517.95

ОИД БА ҲАЛЛИ ЯК СИНФИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСӢ БО ДУ ТАҒЙИРЁБАНДАИ НОВОБАСТАИ КОМПЛЕКСӢ

Раҳимова Махсуда Аюбовна *- номзади илмҳои физикаю математика, сармуаллимаи кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон (Тоҷикистон, Хуҷанд), e-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru*

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДВУМЯ КОМПЛЕКСНЫМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рахимова Махсуда Аюбовна *- кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математических дисциплин и современного естествознания, Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики (Таджикистан, Худжанд), e-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru*

ON THE SOLUTIONS OF ONE CLASS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO COMPLEX INDEPENDENT VARIABLES

Rahimova Makhsuda Aubovna *- Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Sciences, Tajik State University of Law, Business and Politics (Tajikistan, Khudjand), e-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru*

Вожаҳои калидӣ: *муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, тағийрёбандаҳои комплексӣ, бисёршаклаи ҳалҳо.*

Дар мақола масъалаи ҷустуҷӯи бисёршаклаи ҳалҳои як синфи муодилаҳои дифференсиалии комплексӣ бо ҳосилаҳои хусусии аз ду тағийрёбандаи комплексии новобаста тадқиқ карда мешавад. Чунин муодилаҳо дар натиҷаи тадқиқи шартҳои зарурии пурра ҳалшавандагии системаи муодилаҳои барзиёдмуайяншудаи бисёрченак бо ҳосилаҳои хусусӣ ба вуҷуд меоянд.

Ключевые слова: *уравнения с частными производными, комплексные переменные, многообразие решений.*

В статье рассматривается задача нахождения многообразия решений одного класса комплексных дифференциальных уравнений с частными производными от двух комплексных независимых переменных. Такие уравнения возникают при исследовании необходимых условий полной разрешимости многомерных переопределенных систем уравнений в частных производных.

Key words: *partial differential equations, complex variables, varieties of solutions.*

The article considers the problem of finding the variety of solutions of one class of complex partial differential equations with two complex independent variables. Such equations arise in the study of the necessary conditions for the complete solvability of multidimensional overdetermined systems of partial differential equations.

Муодилаи дифференсиалии комплексӣ бо ҳосилаҳои хусусии намуди

$$\omega_{\bar{z}_2} = \lambda \omega_{\bar{z}_1} \tag{1}$$

ро тадқиқ менамоем, ки дар ин ҷо $\lambda-$доимии комплексӣ мебошад. Қайд менамоем, ки муодилаи (1) системаи ду муодилаи ду тағйирёбандаи комплексӣ буда, дар ҳолати умумӣ ғайриклассикӣ мебошад [1, 2]. Муодилаҳои намуди (1) ҳамчун шарти зарурии комилан ҳалшавандагии як синфи системаҳои барзиёдмуайяншудаи бо ҳосилаҳои хусусӣ [3], ҳосил мешавад. Ин муодиларо тадқиқ менамоем.

Бигзор $\omega \in C^1$ ҳалли муодилаи (1) бошад. Он гоҳ бо назардошти $\vartheta(z_1,z_2)=\omega_{\bar z_1}(z_1,z_2)$ баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \omega_{\bar z_1} = \vartheta(z_1, z_2), \\ \omega_{\bar z_2} = \lambda\vartheta(z_1, z_2). \end{cases} \tag{2}$$

Системаи (2)-ро ҳамчун системаи барзиёдмуайяншуда нисбат ба функсияи ω тадқиқ мекунем. Аз (2) бармеояд, ки $\omega_{\bar z_1 \bar z_2} = \vartheta_{\bar z_2}$, $\omega_{\bar z_2 \bar z_1} = \lambda\vartheta_{\bar z_1}$. Бинобар ин шарти зарурии ҳалшавандагии системаи (2) намуди зеринро дорад:

$$\vartheta_{\bar z_2} = \lambda\vartheta_{\bar z_1}, \tag{3}$$

яъне ϑ бояд муодилаи (1)-ро қонеъ гардонад. Аз муодилаи якуми системаи (2) бармеояд, ки

$$\omega(z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2) + T_1\vartheta, \tag{4}$$

ки дар ин ҷо $\varphi -$ нисбат ба z_1 функсияи аналитикӣ, $T_1 -$ оператори Векуа [4]:

$$T_1\vartheta = -\frac{1}{\pi}\iint_{D_1}\frac{\vartheta(\varsigma_1, z_2)}{\varsigma_1 - z_1}d\xi_1 d\eta_1, \ \varsigma_1 = \xi_1 + i\eta_1,$$

$D_1 -$ соҳа дар ҳамвории (z_1) аст. Аз ин ҷо бо назардошти (3) ҳосил менамоем

$$\omega_{\bar z_2} = \varphi_{\bar z_2} + T_1\vartheta_{\bar z_2} = \varphi_{\bar z_2} + \lambda T_1\vartheta_{\bar z_1}. \tag{5}$$

Тибқи хосиятҳои оператори Векуа баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$T_1\vartheta_{\bar z_1} = -\frac{1}{\pi}\iint_{D_1}\frac{\vartheta_{\bar\varsigma_1}(\varsigma_1, z_2)}{\varsigma_1 - z_1}d\xi_1 d\eta_1 = \vartheta(z_1, z_2) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\vartheta(t, z_2)}{t - z_1}dt, \tag{6}$$

дар ин ҷо $\Gamma_1 -$ сарҳади соҳаи D_1 мебошад. Аз формулҳои (5), (6) ва муодилаи дуюми системаи (2) баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\varphi_{\bar z_2} + \lambda\vartheta - \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\vartheta(t, z_2)}{t - z_1}dt = \lambda\vartheta.$$

Бинобар ин,

$$\varphi_{\bar z_2} = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\vartheta(t, z_2)}{t - z_1}dt$$

ва оператори Векуаро истифода намуда, ҳосил мекунем

$$\varphi(z_1, z_2) = \phi(z_1, z_2) + \lambda T_2(S_1\vartheta),$$

ки дар ин ҷо $\phi(z_1, z_2) -$ нисбат ба тағйирёбандаҳои z_1 ва z_2 функсияи аналитикӣ мебошад ва

$$T_2 u = -\frac{1}{\pi}\iint_{D_2}\frac{u(z_1, \varsigma_2)}{\varsigma_2 - z_2}d\xi_2 d\eta_2, \ \varsigma_2 = \xi_2 + i\eta_2,$$

$D_2 -$ соҳа дар ҳамвории (z_2), $S_1\vartheta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\vartheta(t, z_2)}{t - z_1}dt$. Аз ин ҷо ва аз (4) бармеояд, ки

$$\omega(z_1, z_2) = \phi(z_1, z_2) + T_1\vartheta + \lambda T_2(S_1\vartheta). \tag{7}$$

Нишон медиҳем, ки агар ϑ шарти (3)-ро қонеъ гардонад, он гоҳ барои дилхоҳ функсияи нисбат ба z_1 ва z_2 аналитикии ϕ, функсияи ω, ки тавассути формулаи (7) ифода ёфтааст, ҳалли муодилаи (1) мешавад. Воқеан, функсияи $u = S_1\vartheta$, ҳамчун интеграли намуди Коши, нисбат ба z_1 аналитикӣ мебошад [5]. Бинобар ин функсияи $T_2 u$ низ нисбат ба z_1 аналитикӣ аст. Ҳамин тавр, дар асоси баробарии $(T_1\vartheta)_{\bar z_1} = \vartheta(z_1, z_2)$, ҳосил мекунем

$$\omega_{\bar z_1}=\vartheta(z_1,z_2).$$

Баъдан бо назардошти баробариҳои (3), $(T_2 w)_{\bar z_2}=w$ ва хосиятҳои оператори Векуа, муносибатҳои зеринро пайдо мекунем:

$$\omega_{\bar z_2}=(T_1\vartheta)_{\bar z_2}+\lambda[T_2(S_1\vartheta]_{\bar z_2}=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_1}\frac{\vartheta_{\bar z_2}(\varsigma_1,z_2)}{\varsigma_1-z_1}d\xi_1 d\eta_1+\lambda S_1\vartheta=$$

$$=-\frac{\lambda}{\pi}\iint_{D_1}\frac{\vartheta_{\bar z_1}(\varsigma_1,z_2)}{\varsigma_1-z_1}d\xi_1 d\eta_1+\lambda S_1\vartheta=\lambda\left(\vartheta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\vartheta(t,z_2)}{t-z_1}dt\right)+\lambda S_1\vartheta=\lambda\vartheta,$$

яъне

$$\omega_{\bar z_2}=\lambda\vartheta.$$

Пас, тасдиқоти зерин ҷой дорад

Теорема. *Барои дилхоҳ функсияҳои ϑ, ки баробарии (3)-ро қонеъ мегардонанд, формулаи (7) ҳалли муодилаи (1)-ро муайян мекунад.*

Бигзор $\varphi(z)$– функсияи аналитикии тағйирёбандаи z бошад. Он гоҳ функсияи $\vartheta(z_1,z_2)=\varphi(\bar z_1+\lambda\bar z_2)$ баробарии (3)-ро қонеъ мегардонад. Дар ҳақиқат,

$$\vartheta_{\bar z_1}=\varphi'(\bar z_1+\lambda\bar z_2),\ \vartheta_{\bar z_2}=\lambda\varphi'(\bar z_1+\lambda\bar z_2)\equiv\lambda\vartheta_{\bar z_1}.$$

Бинобар ин ҳамаи функсияҳои

$$\omega(z_1,z_2)=\phi(z_1,z_2)+T_1[\varphi(\bar z_1+\lambda\bar z_2)]+\lambda T_2[S_1\varphi(\bar z_1+\lambda\bar z_2)]\qquad(8)$$

ҳалли муодилаи (1) мешаванд, ки дар ин ҷо ϕ– нисбат ба z_1 ва z_2 функсияи аналитикӣ аст.

Формулаи (8)-ро табдил медиҳем. Бигзор

$$\psi(z)=\int_0^{\bar z}\varphi(\bar\xi)d\bar\xi$$

ва

$$\Phi(z_1,z_2)=\psi(z_1+\lambda z_2)\qquad(9)$$

бошад.

Аён аст, ки Φ нисбат ба z_1 ва z_2 антианалитикӣ аст ва

$$\Phi_{\bar z_1}=\varphi(\bar z_1+\lambda\bar z_2),\quad \Phi_{\bar z_2}=\lambda\varphi(\bar z_1+\lambda\bar z_2).$$

Хосиятҳои оператори Векуаро истифода намуда, ҳосил мекунем

$$T_1[\varphi(\bar z_1+\lambda\bar z_2)]=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_1}\frac{\Phi_{\bar\varsigma_1}(\varsigma_1,z_2)}{\varsigma_1-z_1}d\xi_1 d\eta_1=\Phi(\bar z_1,\bar z_2)-S_1\Phi\cdot$$

Инчунин бо назардошти теоремаи Фубини баробариҳои

$$\lambda T_2[S_1\varphi(\bar z_1+\lambda\bar z_2)]=-\frac{\lambda}{\pi}\iint_{D_2}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\bar t+\lambda\bar\varsigma_2)}{t-z_1}dt\right]\frac{d\xi_2 d\eta_2}{\varsigma_2-z_2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\left[-\frac{1}{\pi}\iint_{D_2}\frac{\Phi_{\bar\varsigma_2}(t,\varsigma_2)}{\varsigma_2-z_2}d\xi_2 d\eta_2\right]\frac{dt}{t-z_1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\left[\Phi(t,z_2)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\Phi(t,\tau)}{\tau-z_2}d\tau\right]\frac{dt}{t-z_1}=S_1\Phi-S_1S_2\Phi,$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо $S_2\Phi=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\Phi(t,\tau)}{\tau-z_2}d\tau$, Γ_2 –сарҳади соҳаи D_2 мебошад.

Аз ду муносибатҳои охирин ва формулаи (8) пайдо менамоем:

$$\omega(z_1,z_2)=\phi(z_1,z_2)+\Phi(z_1,z_2)-S_1S_2\Phi(z_1,z_2),\qquad(10)$$

дар ин ҷо функсияи $\Phi(z_1,z_2)$ тавассути формулаи (9) муайян карда мешавад.

Бигзор $\vartheta = \vartheta(z_1, z_2)$ нисбат ба z_1 ва z_2 функсияи аналитикӣ бошад. Он гоҳ ϑ баробарии (3)-ро қонеъ мегардонад. Фарз мекунем, ки $u_j(z_1,z_2)=\bar{z}_j\vartheta(z_1,z_2)$ аст. Аз ин ҷо

$$\vartheta=\frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}_j}$$

мешавад ва муносибатҳои зерин ҷой доранд:

$$T_1\vartheta=T_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}_1}\right)=u_1-S_1u_1,\ T_2\vartheta=T_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}_2}\right)=u_2-S_2u_2.$$

Бинобар ин

$$\omega(z_1,z_2)=\phi(z_1,z_2)+u_1(z_1,z_2)+\lambda u_2(z_1,z_2)-S_1u_1-\lambda S_2u_2$$

ё

$$\omega(z_1,z_2)=\phi(z_1,z_2)+(\bar{z}_1+\lambda\bar{z}_2)\vartheta(z_1,z_2)- -S_1(\bar{z}_1\vartheta)-\lambda S_2(\bar{z}_2\vartheta). \quad (11)$$

Ҳамин тавр, формулаҳои (10) ва (11) ҳалҳои синфи муодилаи (1)-ро муайян мекунанд. Дар ин формулаҳо $\phi(z_1,z_2)$ ва $\vartheta(z_1,z_2)$ дилхоҳ функсияҳои нисбат ба тағйирёбандаҳои z_1 ва z_2 аналитикӣ буда, $\Phi(z_1,z_2)$ бо формулаи (9) ифода меёбад, ки дар он $\varphi(z)$ дилхоҳ функсияи нисбат ба тағйирёбандаи z аналитикӣ мебошад.

ПАЙНАВИШТ

1. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука. 1987. 415с.
2. Сафаров Дж.С. Неклассические системы уравнений. Душанбе: Дониш. 2008. 431с.
3. Байзаев С., Рахимова М.А. Об условиях совместности и общем решении одного класса многомерных переопределенных систем уравнений с частными производными // Международная научно-теоретическая конференция "Современные проблемы математики и их приложения", посвященная 70-летию Таджикского национального университета и 80-летию академика Н.Раджабова, Душанбе, 2018. - С. 9 - 14.
4. Векуа И. Н. Обобщённые аналитические функции. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. –513 с.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – СПб.: Лань, 2004. – 577 с.

REFERENCES

1. Dzhuraev A.D. The method of singular integral equations. M .: Science. 1987.415p.
2. Safarov J.S. Nonclassical systems of equations. Dushanbe: Donish. 2008.431p.
3. Bayzaev S., Rakhimova M.A. On compatibility conditions and general solution of one class of multidimensional overdetermined systems of partial differential equations // International scientific-theoretical conference "Modern problems of mathematics and their applications", dedicated to the 70th anniversary of the Tajik National University and the 80th anniversary of Academician N. Rajabov, Dushanbe, 2018 . - P. 9 - 14.
4. Vekua IN Generalized analytical functions. - M.: Science. Main edition of physical and mathematical literature, 1988. –513 p.
5. Shabat B.V. Introduction to complex analysis. – SPb.: Lan, 2004. – 577 p.