01.00.00 - ИЛМҲОИ ФИЗИКАВУ МАТЕМАТИКА
01.00.00 - ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
01.00.00 - PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-MATHEMATICS

01.01.01 Таҳлили моддӣ, мураккаб ва функсионалӣ
01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ
01.01.01 Material, complex and functional analysis

УДК 517.5
ББК 32.973

МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Тухлиев Дилшод Камаридинович *- преподаватель кафедры информатики и вычислительной математики ХГУ имени академика Б.Гафурова (Республика Таджикистан, г. Худжанд), e-mail: dtukhliev@mail.ru*

МОДУЛИ БЕФОСИЛАГИИ ТАРТИБИ БОЛО ВА НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲО ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН

Тухлиев Дилшод Қамаридинович *- омӯзгори кафедраи информатика ва математикаи ҳисоббарор ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e-mail: dtukhliev@mail.ru*

HIGHER-ORDER MODULUS OF CONTINUITY AND BEST APPROXIMATION OF A FUNCTION IN BERGMAN SPACE

Tukhliev Dilshod Kamaridinovich *- Teacher of the Department of Informatics and Computational Mathematics Science under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand); e-mail: dtukhliev@mail.ru*

Ключевые слова: *модуль непрерывности, верхние грани, наилучшее приближение, комплексные алгебраические полиномы, пространство Бергмана.*

В работе найдены некоторые утверждения в виде точных неравенств между величиною наилучшего приближения функций $E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2$ *и усреднённым с весом* $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)t$ *значением модуля непрерывности r-го порядка производной* $f^{(m)}$ *функции* $f \in B_2^{(m)}$.

Калимаҳои калидӣ: *модули бефосилагӣ, сарҳади болоӣ, наздикшавии беҳтарин, полиномҳои комплексии алгебравӣ, фазои Бергман.*

Дар мақола баъзе тасдиқотҳо дар намуди нобаробариҳои аниқи байни бузургиҳои наздикшавии беҳтарини функсияҳои $E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2$ *ва қиматҳои миёнашудаи бо вазни* $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)t$ *модули бефосилагии тартиби r-и ҳосилаи* $f^{(m)}$*-и функсияи* $f \in B_2^{(m)}$*, оварда шудааст.*

Key words*: modulus of continuity, upper bounds, best approximation, complex algebraic polynomials, Bergman space.*

In this paper, we find some statements in the form of exact inequalities between the value of the best approximation of functions $E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2$ *and averaged with weight* $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)t$ *the value of the continuity modulus of the r-th order of the derivative* $f^{(m)}$ *functions функции* $f \in B_2^{(m)}$.

В работе приводятся некоторые необходимые факты, нужные в дальнейшем. Пусть $U := \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}(U)$ – множество аналитических в круге U функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 < \rho \le 1.$$

Будем говорить, что функция $f\in\mathcal{A}(U)$ принадлежит пространству Бергмана $B_2:=B_2(U)$ и является гильбертовым пространством. Специфика гильбертова пространства B_2 позволяет записать

$$\| f \|=\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^2\rho d\rho dt\right)^{1/2}<\infty$$

Через $\mathcal{P}_n$ обозначим совокупность комплексных алгебраических полиномов степени $\le n$. Хорошо известно [1-4], что среди всех полиномов $p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}$ наилучшее квадратичное приближение функции $f\in B_2$ в области U доставляет частичная сумма $(n-1)-$го порядка

$$T_{n-1}(f,z)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kz^k$$

разложения функции $f(z)$ в степенной ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k.$$

При этом, для величины наилучшей полиномиальной аппроксимации произвольной функции $f\in B_2$, имеем

$$E_{n-1}(f)_2:=E_{n-1}(f)_{B_2}=\inf\{\| f-p_{n-1}\|_2: p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\}=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k|^2}{k+1}\right\}^{1/2},$$

где $c_k(f)-$ коэффициенты Тейлора функции f. Далее введем обозначение

$$\|\Delta_h^rf(\cdot)\|_{B_2}:=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|\Delta_h^rf(\rho e^{it})|^2d\rho dt\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}C_r^kf\left(\rho e^{i(t+kh)}\right)\right|^2\rho d\rho dt\right\}^{1/2} \qquad (1)$$

и равенством

$$\omega_r(f;t)_{B_2}:=\sup\{\|\Delta_h^rf(\cdot)\|_{B_2}:|h|\le t\} \qquad (2)$$

определим модуль непрерывности r-го порядка функции $f\in B_2$. С целью получения явного вида модуля непрерывности (2) вычислим интеграл в правой части (2). Имеем

$$\| \Delta_h^rf(\cdot)\|_{B_2}^2:=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r-l}C_r^lf\left(\rho e^{i(t+lh)}\right)\right|^2\rho d\rho dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r-l}C_r^l\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\left(\rho e^{i(t+lh)}\right)^k\right)\right|^2\rho d\rho dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\left(\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r-l}C_r^l\left(\rho e^{i(t+lh)}\right)^k\right)\right|^2\rho d\rho dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\rho^ke^{ikt}\left(\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r-l}C_r^l\left(e^{ikh}\right)^l\right)\right|^2\rho d\rho dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\rho^ke^{ikt}\left(1-e^{ikh}\right)^r\right|^2\rho d\rho dt. \qquad (3)$$

Применяя к правой части равенства (3) тождество Парсеваля, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\rho^ke^{ikt}\left(1-e^{ikh}\right)^r\right|^2\rho d\rho dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot\left|1-e^{ikh}\right|^{2r}=2^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot(1-\cos kh)^r. \qquad (4)$$

Теперь учитывая равенства (2) и (4),

$$\| \Delta_h^rf(\cdot)\|_{B_2}^2=2^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot(1-\cos kh)^r,$$

в силу которого равенство (2) приобретает окончательный вид

$$\omega_r(f;t)_{B_2}:=2^r\sup_{|h|\le t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot(1-\cos kh)^r. \qquad (5)$$

Затем заметим, что для произвольной функции $f\in\mathcal{A}(U)$ обычные производные r-го порядка и производные r-го порядка по аргументу имеют вид

$$f_a^{(m)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(ik)^mc_k(f)z^k,\quad f^{(m)}(z)=\sum_{k=m}^{\infty}\alpha_{k,m}c_k(f)z^{k-m}. \qquad (6)$$

Учитывая равенство (6) для модуля непрерывности (5) получаем

$$\omega_r^2(f_a^{(m)};t)_{B_2}=2^r\sup_{|h|\le t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{2m}}{k+1}|c_k(f)|^2\cdot(1-\cos kh)^r, \qquad (7)$$

$$\omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}=2^r\sup_{|h|\le t}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\alpha_{k,m}^2}{k+1}|c_k(f)|^2\cdot(1-\cos(k-h)t)^r. \qquad (8)$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. *Для произвольной функции $f\in B_{2,a}^{(m)}\cap B_2^{(m)}$ при любых $n,m,r\in\mathbb{N}, n>m$ соответственно при $h\in(0,\pi/n]$ и $h\in(0,\pi/(n-m)]$ справедливы неравенства*

$$E_{\mathrm{n}-1}^2(f)_{B_2}\le\frac{\int_0^h\omega_r^2(f_a^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^rn^{2m}\int_0^h(1-\cos nt)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}, \qquad (9)$$

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} \le \frac{\int_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^r\alpha_{n,m}^2\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}. \qquad (10)$$

Для функции $f_0(z) = z^n \in B_{2,a}^{(m)} \cap B_2^{(m)}$ оба неравенства (9) и (10) обращаются в равенства.

Доказательство. Неравенства (9) и (10) доказываются по одной и той же схеме, поэтому приведём доказательство неравенства (10).

По определению модуля непрерывности (8) имеем

$$\int_0^h \omega_r(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \ge \int_0^h \|\Delta_h^r f^{(m)}(\cdot)\|_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \ge$$
$$\ge 2^r\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,m}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\int_0^h(1-\cos(k-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt \ge$$
$$\ge 2^r\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\min_{k\ge n}\left\{\alpha_{k,m}^2\int_0^h(1-\cos(k-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}. \qquad (11)$$

В работе [5] доказано, что при $k \ge n \ge m, \quad k,n,m \in \mathbb{N}$ функция

$$\varphi(k) = \alpha_{k,m}^2\int_0^h(1-\cos(k-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt$$

возрастает при любых $k \ge n$ и $r \in \mathbb{N}$, а потому

$$\min_{k\ge n}\varphi(k) = \varphi(n) = \alpha_{n,m}^2\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt.$$

Следовательно,

$$\int_0^h \omega_r(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \ge 2^r\alpha_{n,m}^2\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r \times$$
$$\times \sin\frac{\pi}{h}tdt\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = 2^r\alpha_{n,m}^2E_{n-1}(f)_{B_2}\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt.$$

Отсюда получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} \le \frac{\int_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^r\alpha_{n,m}^2\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt},$$

откуда и следует неравенство (10).

Покажем точность неравенства (10) для функции $f_0(z) = z^n \in B_{2,a}^{(m)} \cap B_2^{(m)}$. В силу равенств $E_{n-1}(f)_2 = \| f - S_{n-1}(f) \|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{1/2}$ и (8) для функции $f_0(z) = z^n$ запишем

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \omega_r(f_0^{(m)};t)_{B_2} = \frac{2^{r/2}\alpha_{n,m}}{\sqrt{n+1}}(1-\cos(n-m)t)^{r/2}. \qquad (12)$$

Учитывая эти равенства, получаем

$$\frac{\int_0^h \omega_r^2(f_0^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^r\alpha_{n,m}^2\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt} =$$
$$= \frac{2^r\alpha_{n,m}^2\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^r\alpha_{n,m}^2(n+1)\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt} = \frac{1}{n+1} = E_{n-1}^2(f_0)_{B_2},$$

откуда и вытекает точность неравенства (10), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in B_2^{(m)}\\ f\notin\mathcal{P}_m}}\frac{2^r\alpha_{n,m}^2E_{n-1}^2(f)_{B_2}}{\int_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt} = \frac{1}{\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}. \qquad (13)$$

В частности, при $h = \pi/(n-m), n > m, n, m \in \mathbb{N}$ из (14) вытекает равенство

$$\sup_{\substack{f\in B_2^{(m)}\\ f\notin\mathcal{P}_m}}\frac{\alpha_{n,m}^2E_{n-1}^2(f)_{B_2}}{\int_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin(n-m)tdt} = \frac{(r+1)(n-m)}{2^{2r+1}}. \qquad (13)'$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (10) сразу вытекает оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (13):

$$\sup_{\substack{f\in B_2^{(m)}\\ f\notin\mathcal{P}_m}}\frac{2^r\alpha_{n,m}^2E_{n-1}^2(f)_{B_2}}{\int_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt} \le \frac{1}{\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}. \qquad (14)$$

Оценку снизу указанной величины получаем для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}$, для которой имеют место равенства (12):

$$\sup_{\substack{f\in B_2^{(m)}\\ f\notin\mathcal{P}_m}}\frac{2^r\alpha_{n,m}^2E_{n-1}^2(f)_{B_2}}{\int_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt} \ge \frac{2^r\alpha_{n,m}^2E_{n-1}^2(f_0)_{B_2}}{\int_0^h \omega_r^2(f_0^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt} = \frac{1}{\int_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}. \qquad (15)$$

Требуемое равенство (13) вытекает из сопоставления неравенств (14) и (15), а равенство (13)’ из (13) при $h = \pi/(n-m)$ получается непосредственным вычислением.

Теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 2. *Пусть* $n, m, r \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+, m \geq \nu$ *и функция* $f \in B_{2,a}^{(m)} \cap B_2^{(m)}$. *Тогда, соответственно при* $h \in (0, \pi/n]$ *и* $h \in (0, \pi/(n-m)]$, *справедливы равенства*

$$\sup_{f \in B_{2,a}^{(m)}} \frac{2^r n^{m-\nu} E_{n-1}^2(f_a^{(\nu)})_{B_2}}{\int_0^h \omega_r(f_a^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt} = \frac{1}{\int_0^h (1-\cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}, \quad (16)$$

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(m)} \\ f \notin \mathcal{P}_m}} \frac{2^r (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,\nu})^2 E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_{B_2}}{\int_0^h \omega_r(f^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt} = \frac{1}{\int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}. \quad (17)$$

Доказательство. Приводим, например, доказательство равенства (16), так как (17) доказывается аналогичным образом. Если полагать $f_a^{(\nu)} = g$, то отсюда получаем $f_a^{(m)} = g_a^{(m-\nu)}$, а это означает, что $f \in B_{2,a}^{(m)}$, а потому $g \in B_{2,a}^{(m-\nu)}$. Поэтому, имеем

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,a}^{(m)} \\ f \notin \mathcal{P}_m}} \frac{2^r n^{m-\nu} E_{n-1}^2(f_a^{(\nu)})_{B_2}}{\int_0^h \omega_r^2(f_a^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt} = \sup_{\substack{g \in B_{2,a}^{(m-\nu)} \\ g \notin \mathcal{P}_{m-\nu}}} \frac{2^r n^{m-\nu} E_{n-1}^2(g)_{B_2}}{\int_0^h \omega_r^2(g_a^{(m-\nu)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt} =$$

$$= \frac{1}{\int_0^h (1-\cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt},$$

откуда и следует равенство (16). Теорема 2 доказана.

Исходя из результатов теоремы 2, вводим класс функций, для которых будем решать экстремальную задачу совместного приближения функций и их производных.

Через $W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h)$ обозначим класс функций $f \in B_{2,a}^{(m)}$, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^h \omega_r^2(f_a^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{h}{2} t dt \leq 1.$$

Аналогично, через $W_2^{(m)}(\omega_r, h)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(m)}$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^h \omega_r^2(f^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt \leq 1.$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $n, m, r \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+, m \geq \nu$. *Тогда соответственно для* $h \in (0, \pi/n]$ *и* $h \in (0, \pi/(n-m)], n > m$ *имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_{n,\nu}^2(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \sup\left\{E_{n-1}^2(f_a^{(\nu)})_{B_2} : f \in W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2^r n^{2(m-\nu)} \int_0^h (1-\cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}, \quad (18)$$

$$\mathcal{E}_{n,\nu}^2(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \sup\left\{E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_{B_2} : f \in W_2^{(m)}(\omega_r, h)\right\} =$$
$$= \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \frac{1}{2^r \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}. \quad (19)$$

Доказательство. Приводим доказательство равенства (19). Из равенства (17) для производной функции $f \in B_2^{(m)}$ следует неравенство

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_{B_2} \leq \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \cdot \frac{\int_0^h \omega_r^2(f^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt}{2^r \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}. \quad (20)$$

Из этого неравенства в предположении $f \in W_2^{(m)}(\omega_r, h)$ получаем оценку сверху

$$\mathcal{E}_{n,\nu}^2(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \sup\left\{E_{n-\nu-1}^2(f^{\nu})_{B_2} : f \in W_2^{(m)}(\omega_r, h)\right\} \leq$$
$$\leq \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^r \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}. \quad (21)$$

Для получения оценки снизу указанной величины вводим в рассмотрение функцию

$$g_1(z) = \frac{(n-m+1) z^n}{\alpha_{n,m} \left\{2^r \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt\right\}^{1/2}}. \quad (22)$$

Дифференцируя ν −раз функцию (22), получаем

$$g_1^{(\nu)}(z) = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m+1) z^{n-m}}{\left\{2^r \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt\right\}^{1/2}}.$$

Отсюда получаем

$$E^2_{n-\nu-1}(g_1^{(\nu)})_{B_2} = (\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}})^2 \cdot \frac{1}{2^r\int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h}tdt}. \quad (23)$$

Кроме того, непосредственным вычислением получаем

$$\int_0^h \omega_r^2(g_1^{(m)};t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}tdt = 1.$$

Последнее равенство показывает, что функция $g_1(z)$, определенная равенством (22), принадлежит классу $W_2^{(m)}(\omega_r,h)$, а потому запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}^2_{n,\nu}(W_2^{(m)}(\omega_r,h))_{B_2} \geq E^2_{n-\nu-1}(g_1^{(\nu)})_{B_2} =$$

$$= (\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}})^2 \cdot \frac{1}{2^r\int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h}tdt}. \quad (24)$$

Требуемое равенство (19) следует из сопоставления неравенств (21) и (24), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 соответственно при* $h=\pi/n$ и $h=\pi/(n-m), n>m$ имеют место равенства

$$\mathcal{E}^2_{n,\nu}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r,\frac{\pi}{n}))_{B_2} = \frac{r+1}{2^{2r}} \cdot \frac{1}{n^{2(r-\nu)-1}},$$

$$\mathcal{E}^2_{n,\nu}(W_2^{(m)}(\omega_r,\frac{\pi}{n-m}))_{B_2} = \frac{r+1}{2^{2r}} \cdot (\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}})^2 \cdot (n-m).$$

В частности, при $\nu=0$ *из этих равенств получим значение наилучших полиномиальных приближений классов* $W_{2,a}^{(m)}(\omega_r,\pi/n)_{B_2}$ *и*

$W_2^{(m)}(\omega_r,\pi/(n-m))_{B_2}$ *функций* $f\in B_2$*:*

$$E_{n-1}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r,\pi/n))_{B_2} = \frac{\sqrt{r+1}}{2^r} \cdot \frac{1}{n^{r-1/2}},$$

$$E_{n-1}(W_2^{(m)}(\omega_r,\pi/(n-m)))_{B_2} = \frac{\sqrt{r+1}}{2^r} \cdot \frac{\sqrt{n-m}}{\alpha_{n,m}}, \quad n>m.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабозов М.Ш., Тухлиев Д.К. О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана // ДАН РТ. 2018. Т.61. №5. С.419-426.
2. Тухлиев Д.К. О точных константах в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана // ДАН РТ. 2018. Т.61. №6. С.517-523.
3. Тухлиев Д.К. О точных константах в теоремах о приближении функций в пространстве Бергмана // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки. 2018. №3 (46). С.12-22.
4. Тухлиев Д.К. Об одноверменном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана // Изв. АН РТ., Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. №2. 2019. С.14-18.
5. Холмамадова Ш.А. Неравенства для производных аналитических функций и наилучшее полиномиальное приближение в пространстве Харди // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат. наук – Душанбе – 2015 г. – 85с.

.

REFERENCES

1. Shabozov M.Sh., Tukhliev D.K. Joint approximation of functions and their successive derivatives in the Bergman space // DAN RT. 2018.T.61. №5. P.419-426.
2. Tukhliev D.K. On exact constants in direct and converse theorems in Bergman space // DAN RT. 2018.T.61. №6. P.517-523.
3. Tukhliev D.K. Exact constants in theorems on the approximation of functions in the Bergman space // Sci. notes KhSU by name B.Gafurov. Series of natural and economic sciences. 2018. №3 (46). C.12-22.
4. Tukhliev D.K. About simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in the Bergman space // News of the Acad. Sci. RT. Branch phis.-math., chem.-geol. and technology sciences. №2. 2019. C.14-18.
5. Kholmamadova Sh.A. Inequalities for derivatives of analytic functions and the best polynomial approximation in Hardy's space // Dissertation for the degree of candidate phis.-math. Sciences - Dushanbe - 2015 - 85p.