УДК: 517.927.21
ББК 22.161.1
О - 42

ФОРМУЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Олими Абдуманон Гафорзода (Олимов Абдуманон Гафорович) *– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru.*

ФОРМУЛАИ ТАСВИРИ ҲАЛЛИ УМУМӢ ВА МАСЪАЛАҲОИ КАНОРӢ БАРОИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ХАТТИИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО НУҚТАИ ДОХИЛИИ СИНГУЛЯРӢ

Олимӣ Абдуманон Ғафорзода (Олимов Абдуманон Ғафорович) *- номзади илмҳои физика-математика, дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

REPRESENTATION FORMULA OF THE GENERAL SOLUTION AND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF THE TOO ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTERNAL SINGULAR POINT

Olimi Abdumanon Gaforzoda (Olimov Abdumanon Gaforovich) *– Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor Mathematical Analysis Department named after Professor A. Muksinov under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, внутренняя сингулярная точка, система интегральных уравнений Вольтерра, общее решение, формулы обращения, свойства решений, задачи типов Коши и линейного сопряжения.*

Исследуется система m *линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка общего вида с внутренней сингулярной точкой. Определенное уравнение системы считается основным и ее изучение проводится в зависимости от свойств коэффициента при соответствующей неизвестной функции в этом уравнении. Задача исследования данной системы сводится к изучению ранее расмотренных аналогичных систем с граничной сингулярной точкой. Используя известные результаты, общее решение системы выписывается при помощи резольвент соответствующих систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью. Полученное представление общего решения применяется для доказательства его формул обращения, изучения поведения решений в окрестности особой точки, постановки и решения нового типа задач Коши и линейного сопряжения.*

Вожаҳои калидӣ: *системаи муодилаҳои дифференсиалии одӣ, нуқтаи сингулярии дохилӣ, системаи муодилаҳои интегралии Волтерр, ҳалли умумӣ, формулаҳои баргардонӣ, хосиятҳои ҳалҳо, масъалаҳои намудҳои Кошӣ ва хаттӣ - ҳамроҳшавӣ.*

Системаи m *муодилаҳои дифференсиалии одии хаттии тартиби дуюми намуди умумӣ бо нуқтаи дохилии сингулярӣ тадқиқ карда мешавад. Муодилаи муайяни система асосӣ ҳисобида, омӯзиши он дар алоқамандӣ бо хосиятҳои коэффитсиенти назди функсияи номаълуми мувофиқи ин муодила гузаронида мешавад. Масъалаи тадқиқи системаи додашуда ба омӯзиши системаҳои пештар омӯхташудаи ба он монанд бо нуқтаи сарҳадии сингулярӣ оварда мешавад. Бо истифодаи натиҷаҳои маълум, ҳалли умумии система бо ёрии резолвентаҳои системаҳои мувофиқи муодилаҳои интегралии навъи дуюми Волтерр бо махсусияти суст навишта мешавад. Тасвири ҳосил кардашудаи ҳалли умумӣ дар исботи формулаҳои баргардонии он, омӯзиши хосиятҳои ҳалҳо дар атрофи нуқтаи махсус, гузориш ва ҳалли масъалаҳои нави намудҳои Кошӣ ва хаттӣ - ҳамроҳшавӣ татбиқ мегардад.*

Key words: *system of ordinary differential equations,internel singular point, system of Volterra integral equations, general solution, inversion formulas, properties of solutions, Cauchy and linear conjugation types problems.*

A system of linear ordinary differential equations of the second order of general form with an internal singular point is investigated. A certain equation of the system is considered the main one, and its study is carried out depending on the properties of the coefficient for the corresponding unknown function in this equation. The task of studying this system is to study previously considered similar systems with a boundary singular point. Using the known results, the general solution of the system is written out using the resolvents of the corresponding systems of Volterra integral equations of the second kind with a weak singularity. The obtained representation of the general solution is used to prove its inversion formulas, to study the behavior of solutions in the vicinity of a singular point, to formulate and solve a new type of Cauchy and linear conjugation problems.

Рассмотрим систему уравнений

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{|x-c|}y_j' + \sum_{k=1}^{m}\frac{r_{jk}(x)}{(x-c)^2}y_k = \frac{f_j(x)}{(x-c)^2}\,, x\in \Gamma_c = \Gamma\setminus\{c\},\ j=\overline{1,m}\ , \qquad (1)$$

где $\Gamma=(a,b)$ $(a<b)$ – промежуток числовой оси, c - особая сингулярная точка системы, принадлежащая этому промежутку, $p_j(x)$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)$ - известные, а $y_j(x)\in C^2(\Gamma_c)$ - искомые функции.

Исследованию дифференциальных уравнений первого и высшего порядков и их систем с сингулярными и сверх сингулярными коэффициентами, посвящен ряд публикаций, например, [1-12]. В работе [1] к изучению уравнений в частных производных применен новый класс особых интегральных уравнений. Там же поставлена и исследована задача сопряжения решений уравнений в частных производных. В монографии [2] изучены линейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с одной или многими сингулярными точками разного порядка и их системы. В этой работе разработан новый способ исследования сингулярных и сверхсингулярных уравнений и систем в зависимости от расположения особых точек. В работах [3-6] для модельного и общего видов систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной сингулярной или сверхсингулярной точкой поставлены и решены соответствующие задачи типов линейного сопряжения. Исследования [7, 8, 9] посвящены изучению общих систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков со слабосингулярной, сингулярной или сверхсингулярной точкой непосредственным сведением их к системе интегральных уравнений Вольтерра со слабой особенностью. В этих работах поставлены и решены новые задачи типов Коши и линейного сопряжения. В работах [10,11] исследованы линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго и третьего порядка с сингулярной и сверхсингулярной точкой, поставлены и решены задачи типов Коши и линейного сопряжения.

Для исследования системы (1), действуя по схеме, разработанной в работе [2] интервал Γ при помощи точки c разделяем на части $a<x<c$, $c<x<b$ и ее представим в виде объединения следующих двух систем:

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{x-c}y_j' + \sum_{k=1}^{m}\frac{r_{jk}(x)}{(x-c)^2}y_k = \frac{f_j(x)}{(x-c)^2}\,,\ j=\overline{1,m} \text{ при } c<x<b, \qquad (2)$$

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{c-x}y_j' + \sum_{k=1}^{m}\frac{r_{jk}(x)}{(c-x)^2}y_k = \frac{f_j(x)}{(c-x)^2}\ ,\ j=\overline{1,m} \text{ при } a<x<c. \qquad (3)$$

Точка c для системы (2) является левой, а для системы (3) правой граничной сингулярной точкой. К этим системам применяя операции, использованные в работах [2, 7 - 11] получим доказательство следующего утверждения:

Теорема 1. Пусть для системы (1) имеют место условия:

1) функции $p_j(x)$, $p_j'(x)$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)$, $j,k=\overline{1,m}$ непрерывны на $\overline{\Gamma}$ за исключением быть может точки c. В точке c эти функции могут иметь разрыв первого рода и, в таком случае их значение в точке c, при рассмотрении уравнений (2) и (3), соответственно доопределяемы по непрерывности, а также $p_j(c+0)\neq 0$, $p_j(c-0)\neq 0$;

2) уравнение системы с номером s считается основным. Для коэффициента $p_s(x)$ этого уравнения выполняются неравенства $p_s(c+0)>1$,

$p_s(c-0)<-1$;

3) функции $R^{1,+}_{js,c}(x)=r_{jj}(x)-(x-c)p'_s(x)+p_s(x)-p^2_s(x)$, $r_{jk}(\xi)$, $k\neq j$ и ${\Omega_{js}}'(x)$, $\Omega_{js}(x)=2[p_s(x)-p_j(x)]$ стремятся к нулю в соответствии с асимптотическим равенством: $R^{1,+}_{js,c}(x)=o[(x-c)^{\gamma^+_{js}}]$, $r_{jk}(\xi)=o[(x-c)^{\delta^+_{jk}}]$, $k\neq j$, ${\Omega_{js}}'(x)=o[(x-c)^{\varepsilon^+_{js}}]$, $\gamma^+_{js},\delta^+_{jk}>1$, $\varepsilon^+_{js}>0$, $j=\overline{1,m}$ при $x\to c+0$;

4) функции $R^{1,-}_{js,c}(x)=r_{jj}(x)-(c-x)p'_s(x)-p_s(x)-p^2_s(x)$, $r_{jk}(\xi)$, $k\neq j$ и ${\Omega_{js}}'(x)$ стремятся к нулю в соответствии с асимптотическим равенством:

$R^{1,-}_{js,c}(x)=o[(c-x)^{\gamma^-_{js}}]$, $r_{jk}(\xi)=o[(c-x)^{\delta^-_{jk}}]$, $k\neq j$, ${\Omega_{js}}'(x)=o[(c-x)^{\varepsilon^-_{js}}]$, $\gamma^-_{js},\delta^-_{jk}>1$, $\varepsilon^-_{js}>0$, $j=\overline{1,m}$ при $x\to c-0$.

Тогда общее решение системы уравнений (1) из класса $C^2(\Gamma_c)$ выражается формулой

$$y_j(x)=\begin{cases}Q^{1,+}_{j,c}[(p),(r),(f),c^+_{11},c^+_{10},...,c^+_{m1},c^+_{m0}] \ \text{при} \ \ c<x<b,\\ Q^{1,-}_{j,c}[(p),(r),(f),c^-_{11},c^-_{10},...,c^-_{m1},c^-_{m0}] \ \text{при} \ \ a<x<c,\end{cases} \qquad j=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где

$$Q^{1,+}_{j,c}[(p),(r),(f),c^+_{11},c^+_{10},...,c^+_{m1},c^+_{m0}]=$$
$$=(x-c)^{-p_s(c+0)}\exp[-w^{1,+}_{p_s,c}(x)]\Big\{T^{1,+}_c[p_s(x),f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}]-$$
$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^m\int_c^x\Gamma^{1,+}_{jk,c}(x,\xi)T^{1,+}_c[p_s(\xi),f_k(\xi),c^+_{k1},c^+_{k0}]d\xi-\int_c^x\Gamma^{1,+}_{jj,c}(x,\xi)T^{1,+}_c[p_s(\xi),f_j(\xi),c^+_{j1},c^+_{j0}]d\xi\Big\},$$

$$Q^{1,-}_{j,c}[(p),(r),(f),c^-_{11},c^-_{10},...,c^-_{m1},c^-_{m0}]=$$
$$=(c-x)^{p_s(c-0)}\exp[-w^{1,-}_{p_s,c}(x)]\Big\{T^{1,-}_c[p_s(x),f_j(x),c^-_{j1},c^-_{j0}]+$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^m\int_x^c\Gamma^{1,-}_{jk,c}(x,\xi)T^{1,-}_c[p_s(\xi),f_k(\xi),c^-_{k1},c^-_{k0}]d\xi+\int_x^c\Gamma^{1,-}_{jj,c}(x,\xi)T^{1,-}_c[p_s(\xi),f_j(\xi),c^-_{j1},c^-_{j0}]d\xi\Big\},$$

$(p)\equiv\{p_1(x),...,p_m(x)\}$, $(r)\equiv\{r_{11}(x),...,r_{1m}(x),...,r_{m1}(x),...,r_{mm}(x)\}$, $(f)\equiv\{f_1(x),...,f_m(x)\}$,

$$T^{1,+}_c[p_s(x)f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}]=\int_c^x(x-\xi)\,f_j(\xi)(\xi-c)^{p_s(c+0)-2}\exp[w^{1,+}_{p_s,c}(\xi)]d\xi+c^+_{j1}(x-c)+c^+_{j0},$$

$$T^{1,-}_c[p_s(x)f_j(x),c^-_{j1},c^-_{j0}]=c^-_{j1}(c-x)+c^-_{j0}-\int_x^c(x-\xi)\,f_j(\xi)(c-\xi)^{-p_s(c-0)-2}\exp[w^{1,-}_{p_s,c}(\xi)]d\xi,$$

$w^{1,+}_{p_s,c}(x)=\int_c^x\frac{p_s(t)-p_s(c+0)}{t-c}dt$, $w^{1,-}_{p_s,c}(x)=\int_x^c\frac{p_s(c-0)-p_s(t)}{c-t}dt$, $\Gamma^{1,+}_{jk,c}(x,\xi)$, $\Gamma^{1,-}_{jk,c}(x,\xi)$ - резольвенты, соответственно следующих систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью:

$$\varphi_j(x)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^m\int_c^x K^{1,+}_{jk,c}(x,\xi)\varphi_k(\xi)d\xi+\int_c^x K^{1,+}_{jj,c}(x,\xi)\varphi_j(\xi)d\xi=T^{1,+}_c[p_s(x),f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}],\ j=\overline{1,m};$$

$$\psi_j(x)-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_x^c K_{jk,c}^{1,-}(x,\xi)\psi_k(\xi)d\xi-\int_x^c K_{jj,c}^{1,-}(x,\xi)\psi_j(\xi)d\xi=T_c^{1,-}[p_s(x),f_j(x),c_{j1}^-,c_{j0}^-]\ ,\ j=\overline{1,m}\ ,$$

где

$$K_{jk,c}^{1,+}(x,\xi)=(x-\xi)r_{jk}(\xi)(\xi-c)^{-2}\,,k\neq j\,,\ K_{jj,c}^{1,+}(x,\xi)=$$

$$=\left\{(x-\xi)\left\{R_{js,c}^{1,+}(\xi)+(\xi-c){\Omega_{js}}'(\xi)+[p_s(\xi)-1]\Omega_{js}(\xi)\right\}-(\xi-c)\Omega_{js}(\xi)\right\}(\xi-c)^{-2},$$

$$K_{jk,c}^{1,-}(x,\xi)=(x-\xi)r_{jk}(\xi)(c-\xi)^{-2}\,,k\neq j\,,\ K_{jj,c}^{1,-}(x,\xi)=$$

$$=\left\{(x-\xi)\left\{R_{js,c}^{1,-}(\xi)+(c-\xi){\Omega_{js}}'(\xi)+[p_s(\xi)+1]\Omega_{js}(\xi)\right\}-(c-\xi)\Omega_{js}(\xi)\right\}(c-\xi)^{-2},$$

а $c_{jk}^{\pm}$, $j=\overline{1,m}$, $k=0,1$ - произвольные постоянные.

Следствие 1. Пусть в системе уравнений (1) вместо условий $p_s(c+0)>1$, $p_s(c-0)<-1$ выполняется одно из следующих условий:

а) $p_s(c+0)>1$, $p_s(c-0)\geq -1$, а функция $f_j(x)$ стремиться к нулю при $x\to c-0$ и имеет асимптотическое поведение

$$f_j(x)=o[(c-x)^{\beta_{js}^-}],\ \beta_{js}^->1+p_s(c-0),\ j=\overline{1,m}\,; \tag{5}$$

б) $p_s(c+0)\leq 1$, $p_s(c-0)<-1$, а функция $f_j(x)$ стремиться к нулю при $x\to c+0$ и удовлетворяет асимптотическому равенству

$$f_j(x)=o[(x-c)^{\beta_{js}^+}],\ \beta_{js}^+>1-p_s(c+0),\ j=\overline{1,m}\,; \tag{6}$$

в) $p_s(c+0)\leq 1$, $p_s(c-0)\geq -1$, а функция $f_j(x)$ при $x\to c\pm 0$ стремиться к нулю и подчиняется соответственно асимптотическому равенству (5) и (6).

Тогда заключение теоремы 1 остается неизменным.

Следствие 2. Из интегрального представления (4) общего решения системы (1), вытекает, что в определении поведения решений в окрестности точки c занимает существенную роль знак чисел $p_s(c+0)$ и $p_s(c-0)$. При $x\to c+0$ все решения системы (1) стремятся к бесконечности, если $p_s(c+0)>0$; к нулю, если $p_s(c+0)<0$. При $x\to c-0$ все решения системы (1) стремятся к нулю, если $p_s(c-0)>0$; к бесконечности, если $p_s(c-0)<0$. Решения системы (1) подчиняются следующим асимптотическим равенствам: при $x\to c+0$ $y_j(x)=O[(x-c)^{-p_s(c+0)}]$ в случае $p_s(c+0)>0$; $y_j(x)=o[(x-c)^{-p_s(c+0)}]$ в случае $p_s(c+0)<0$. При $x\to c-0$ $y_j(x)=o[(c-x)^{p_s(c-0)}]$ в случае $p_s(c-0)>0$; $y_j(x)=O[(c-x)^{p_s(c-0)}]$ в случае $p_s(c-0)<0$.

Следствие 3. Из формулы (4) и соответствующих систем интегральных уравнений следует, что решения системы (1), представляемые формулой (4) обладают свойством, выражаемым следующими равенствами

$$[(x-c)^{p_s(c+0)}{B_{p_s,c}^1}^q y_j(x)]_{x=c+0}=c_{jq}^+\,,\ [(c-x)^{-p_s(c-0)}{B_{p_s,c}^1}^q y_j(x)]_{x=c-0}=(-1)^q c_{jq}^-\,, \tag{7}$$

$$j=\overline{1,m}\,,\ q=0,1\,,\ B_{p_s,c}^1 y=y'+\frac{p_s(x)}{|x-c|}y\,,\ {B_{p_s,c}^1}^0 y\equiv y\,.$$

Интегральное представление (4) и его формулы обращения (7) позволяют исследовать задачи типов Коши и линейного сопряжения с условиями в точке c.

Задача 1. Требуется выделить решение системы (1) из класса $C^2(\Gamma_c)$, подчиняющееся следующим условиям:

$$[(x-c)^{p_s(c+0)} B^{1}_{p_s,c}{}^{q} y_j(x)]_{x=c+0} = y^{+}_{jq},\ [(c-x)^{-p_s(c-0)} B^{1}_{p_s,c}{}^{q} y_j(x)]_{x=c-0} = y^{-}_{jq}, \tag{8}$$

$$[(x-c)^{p_s(c+0)} B^{1}_{p_s,c}{}^{q} y_j(x)]_{x=c+0} = [(c-x)^{-p_s(c-0)} B^{1}_{p_s,c}{}^{q} y_j(x)]_{x=c-0} = y_{jq}, \tag{9}$$

$j=\overline{1,m}$, $q=0,1$, где $y^{\pm}_{jq}$, y_{jq} - заданные вещественные числа.

Для нахождения решения этой задачи формулу (4) общего решения системы подставим в условия задачи. Тогда на основании равенств (7) для определения произвольных постоянных $c^{\pm}_{jq}$ имеем следующие равенства: $c^{+}_{jq} = y^{+}_{jq}$, $c^{-}_{jq} = (-1)^q y^{-}_{jq}$ при требовании выполнения условий (8); $c^{+}_{jq} = y_{jq}, c^{-}_{jq} = (-1)^q y_{jq}$ при требовании выполнения условий (9), $j=\overline{1,m}$, $q=0,1$.

Найденные значения произвольных постоянных подставляя в формулу (4), приходим к следующему заключению:

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1. Тогда задача 1 имеет единственное решение. Решение, подчиняющееся условиям (8) дается формулой

$$y_j(x) = \begin{cases} Q^{1,+}_{j,c}[(p),(r),(f), y^{+}_{11}, y^{+}_{10},\dots, y^{+}_{m1}, y^{+}_{m0}]\ \textit{при}\quad c<x<b, \\ Q^{1,-}_{j,c}[(p),(r),(f),, -y^{-}_{11}, y^{-}_{10},\dots, -y^{-}_{m1}, y^{-}_{m0}]\ \textit{при}\quad a<x<c, \end{cases} \qquad j=\overline{1,m},$$

а условиям (9) формулой

$$y_j(x) = \begin{cases} Q^{1,+}_{j,c}[(p),(r),(f),\ y_{11}, y_{10},\dots, y_{m1}, y_{m0}]\ \textit{при}\quad c<x<b, \\ Q^{1,-}_{j,c}[(p),(r),(f),\ -y_{11}, y_{10},\dots, -y_{m1}, y_{m0}]\ \textit{при}\quad a<x<c, \end{cases} \qquad j=\overline{1,m}.$$

Задача 2. Требуется выделить решение системы (1) из класса $C^2(\Gamma_c)$, подчиняющееся следующим условиям сопряжения:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{1} b^{q,+}_{ij}[(x-c)^{p_s(c+0)} B^{1}_{p_s,c}{}^{q} y_j(x)]_{x=c+0} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{1} b^{q,-}_{i(m+j)}[(c-x)^{-p_s(c-0)} B^{1}_{p_s,c}{}^{q} y_j(x)]_{x=c-0} = d_i, \tag{10}$$

$i=\overline{1,4m}$, где $b^{q,+}_{ij}, b^{q,-}_{i(m+j)}$ - вещественные числа.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 1, а также детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} b^{0,+}_{11} & b^{1,+}_{11} & b^{0,+}_{12} & b^{1,+}_{12}\dots & b^{0,+}_{1m} & b^{1,+}_{1m} & b^{0,-}_{1(m+1)} & b^{1,-}_{1(m+1)} & b^{0,-}_{1(m+2)} & b^{1,-}_{1(m+2)}\dots & b^{0,-}_{1(2m)} & b^{1,-}_{1(2m)} \\ b^{0,+}_{21} & b^{1,+}_{21} & b^{0,+}_{22} & b^{1,+}_{22}\dots & b^{0,+}_{2m} & b^{1,+}_{2m} & b^{0,-}_{2(m+1)} & b^{1,-}_{2(m+1)} & b^{0,-}_{2(m+2)} & b^{1,-}_{2(m+2)}\dots & b^{0,-}_{1(2m)} & b^{1,-}_{1(2m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^{0,+}_{(4m)1} & b^{1,+}_{(4m)1} & b^{0,+}_{(4m)2} & b^{1,+}_{(4m)2}\dots & b^{0,+}_{(4m)m} & b^{1,+}_{(4m)m} & b^{0,-}_{4m(m+1)} & b^{1,-}_{4m(m+1)} & b^{0,-}_{4m(m+2)} & b^{1,-}_{4m(m+2)}\dots & b^{0,-}_{4m(2m)} & b^{1,-}_{4m(2m)} \end{vmatrix}$$

не равно нулю.

Тогда задача 2 имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y_j(x) = \begin{cases} Q^{1,+}_{j,c}[(p),(r),(f),\ \dfrac{\Delta^{+}_{11}}{\Delta}, \dfrac{\Delta^{+}_{10}}{\Delta},\dots, \dfrac{\Delta^{+}_{m1}}{\Delta}, \dfrac{\Delta^{+}_{m0}}{\Delta}]\ \textit{при}\quad c<x<b, \\ Q^{1,-}_{j,c}[(p),(r),(f), -\dfrac{\Delta^{-}_{11}}{\Delta}, \dfrac{\Delta^{-}_{10}}{\Delta},\dots, -\dfrac{\Delta^{-}_{m1}}{\Delta}, \dfrac{\Delta^{-}_{m0}}{\Delta}]\ \textit{при}\quad a<x<c, \end{cases} \qquad j=\overline{1,m}, \tag{11}$$

где детерминанты Δ^{+}_{jq} и Δ^{-}_{jq} получаются из детерминанта Δ заменой соответственно столбца, содержащего элементы $b^{q,+}_{ij}$ и $(-1)^q b^{q,-}_{i(m+j)}$, $i=\overline{1,4m}$, столбцом правой части системы (10).

Действительно, при указанных условиях, подчиняя интегральное представление (4) условиям (10), далее учитывая свойства (7) представления, получим следующую систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $c^{\pm}_{jq}$:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{1} b^{q,+}_{ij} c^{+}_{jq} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{1} (-1)^q b^{q,-}_{i(m+j)} c^{-}_{jq} = d_i,\ i=\overline{1,4m}.$$

Эта система имеет единственное решение, которое дается формулой

$$c_{jq}^{+} = \frac{\Delta_{jq}^{+}}{\Delta}, \ c_{jq}^{-} = (-1)^{q} \frac{\Delta_{jq}^{-}}{\Delta}, \ j = \overline{1, m}, \ q = 0{,}1.$$

Подставляя значение постоянных $c_{jq}^{\pm}$ из последних равенств в формулу (4), получим формулу (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Л.Г.Михайлов. - Душанбе: изд. АН ТаджССР, 1963. - 183с.
2. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. - Dushanbe: TSNU, 1998. - 160p.
3. Раджабов Н. Обобщенные задачи типа линейного сопряжения для общей линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной сингулярной и сверхсингулярной точкой / Н. Раджабов // Труды 9-го международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗ МФ-2000, Орел, 29 мая - 2 июня). - Орел, 2000. - С.367 - 369.
4. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order ordinary sistem of linear differential equations with singular or super-singular coefficients/ N.Rajabov//Proceedings of the Second ISAAC Congress. - London, Kluwer Academic Publishers, 2000, vol. I. - P.175 -183.
5. Раджабов Н., Меликов О.И. Задачи типа линейного сопряжения для модельной системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной внутренней сингулярной точкой// Вестник Таджикского Государственного Национального Университета. - Душанбе, 2004, №1(48). - С. 102-108.
6. Раджабов Н., Меликов О.И. Интегральные представления и задачи типа линейного сопряжения для модельной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной внутренней сверхсингулярной точкой// Вестник Таджикского Государственного Национального Университета. – Душанбе, 2008, №1(48). - С. 19 - 31.
7. Олими А.Г.(Олимов А.Г.) Интегральное представление общего решения и граничные задачи для системы m линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с особой точкой разного порядка/ А.Г. Олими (А.Г.Олимов) // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Сино. – 2021 (в печати).
8. Олимов А.Г. Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой/ А.Г. Олимов, Н. Раджабов// Докл. АН Республики Таджикистан. - 2016. - Т. 59. - № 3-4. - С. 99-105.
9. Олимов А.Г. Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярной точкой/ А.Г. Олимов, Н. Раджабов// Докл. АН Республики Таджикистан. - 2017. - Т.60. - №7-8. - С.279-285.
10. Олими А.Г.(Олимов А.Г.) Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с внутренней сингулярной точкой/ А.Г. Олими (А.Г.Олимов) // Ученые записки. Серия естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. - Худжанд: Нури маърифат. - 2019. - №3(50). - С. 20-25.
11. Олими А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задачи типов Коши и линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой/ А.Г. Олими// Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Сино. - 2021. - №1. - С.60-77.

REFERENCES

1. Mikhailov L.G. A new class of special integral equations and its applications to differential equations with singular coefficients / L.G. Mikhailov. - Dushanbe: ed. Academy of Sciences of the Tajik SSR, 1963. - 183 p.
2. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. - Dushanbe: TSNU, 1998. – 160 p.
3. Rajabov N. Generalized linear conjugation type problems for a general linear system of first-order ordinary differential equations with one singular and supersingular point / N. Rajabov // Proceedings of the 9th International Symposium " Methods of discrete singularities in problems of mathematical physics "(MDOZ MF-2000, Orel, May 29-June 2). - Orel, 2000. - P. 367-369.
4. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order ordinary sistem of linear differential equations with singular or super-singular coefficients/ N.Rajabov//Proceedings of the Second ISAAC Congress. - London, Kluwer Academic Publishers, 2000, vol. I.- P. 175-183.

5. Rajabov N., Melikov O. I. Linear conjugation type problems for a model system of two linear ordinary differential equations of the first order with one internal singular point// Bulletin of the Tajik State National University. - Dushanbe, 2004, №1(48). - P. 102-108.
6. Rajabov N., Melikov O. I. Integral representations and linear conjugation type problems for a model system of linear ordinary differential equations of the first order with one internal supersingular point// Bulletin of the Tajik State National University. - Dushanbe, 2008, №1(48). - P. 19-31.
7. Olimi A. G. (Olimov A. G.) Integral representation of the general solution and boundary value problems for a system of linear ordinary differential equations of the first order with a singular point of different order/ A.G. Olimi (A.G. Olimov) // Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences. - Dushanbe: Sino. - 2021 (in print).
8. Olimov A. G. Integral representations and Cauchy-type problems for a system of linear ordinary differential equations of the second order with a singular point/ A.G. Olimov, N. Rajabov// Docl. Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2016. - Vol. 59. - No. 3-4. - P. 99-105.
9. Olimov A. G. Integral representations and Cauchy-type problems for a system of linear ordinary differential equations of the second order with a supersingular point/ A.G. Olimov, N. Rajabov/ / Dokl. Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2017. - Vol. 60. - No. 7-8. - P. 279-285.
10. Olimi A. G. (Olimov A. G.) A linear ordinary differential equation of the third order with an internal singular point/ A. G. Olimi (A. G. Olimov) / / Scientific notes. Natural and Economic Sciences series. Founder: Khujand State University named after Academician B. Gafurov. - Khujand: Nuri marifat. - 2019. - №3(50). - P. 20-25.
11. Olimi A. G. Representation of the general solution in integral form and problems of Cauchy types and linear conjugation for a linear ordinary differential equation of the third order with a supersingular point/ A. G. Olimi// Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences. - Dushanbe: Sino. - 2021. - No. 1. - P. 60-77.