01.00.00 - ИЛМҲОИ ФИЗИКАВУ МАТЕМАТИКА
01.00.00 -ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
01.00.00 -PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-MATHEMATICS

01.01.01 Таҳлили моддӣ, мураккаб ва функсионалӣ
01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ
01.01.01 Material, complex and functional analysis

УДК: 517. 927. 21
ББК 22.161.1
О – 42

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ В ИНТЕГРАЛЬНОМ ВИДЕ И ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ m ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ГРАНИЧНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Олими Абдуманон Гафорзода (Олимов Абдуманон Гафорович) *– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ “ХГУ имени академика Б.Гафурова” (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru.*

ТАСВИРИ ҲАЛЛИ УМУМӢ ДАР НАМУДИ ИНТЕГРАЛӢ ВА МАСЪАЛАИ НАМУДИ КОШӢ БАРОИ СИСТЕМАИ m МУОДИЛАҲОИ ХАТТИИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО НУҚТАИ САРҲАДИИ СИНГУЛЯРӢ

Олимӣ Абдуманон Ғафорзода (Олимов Абдуманон Ғафорович) *- номзади илмҳои физика-математика, дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинови МДТ “ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров” (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

REPRESENTATION OF THE GENERAL SOLUTION IN INTEGRAL FORM AND THE CAUCHY TYPE PROBLEM FOR A SYSTEM OF THE m TOO ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDARY SINGULAR POINT

Olimi Abdumanon Gaforzoda (Olimov Abdumanon Gaforovich) *– Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor Mathematical Analysis Department named after Professor A. Muksinov under Khujand State University named after academician B.G.Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: Abdumanon1950@mail.ru*

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений, сингулярная точка, система интегральных уравнений Вольтерра, общее решение, формулы обращения, свойства решений, задача типа Коши.*

В статье исследуется система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка общего вида с граничной сингулярной точкой. Определенное уравнение системы считается основным и ее изучение проводится в зависимости от свойств коэффициента при соответствующей неизвестной функции в этом уравненииi. Задача решения данной системы сведена к эквивалентной задаче решения системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью. Общее решение системы выражено с помощью резольвент системы интегральных уравнений. Полученное представление применено для установления его формул обращения, изучения поведения решений в окрестности сингулярной точки, выяснения правильной постановки задачи Коши нового типа и нахождения ее решения.

Вожаҳои калидӣ: *системаи муодилаҳои дифференсиалии одӣ, нуқтаи сингулярӣ, системаи муодилаҳои интегралии Волтерр, ҳалли умумӣ, формулаҳои баргардонӣ, хосиятҳои ҳалҳо, масъалаи намуди Кошӣ.*

Дар мақола системаи муодилаҳои дифференсиалии одии хаттии тартиби дуюми намуди умумӣ бо нуқтаи сарҳадии сингулярӣ тадқиқ карда мешавад. Муодилаи муайяни система асосӣ ҳисобида, омӯзиши он дар алоқамандӣ бо хосиятҳои коэффитсиенти назди функсияи номаълуми мувофиқи ин муодила гузаронида мешавад. Масъалаи ҳалли системаи додашуда ба масъалаи баробарқувваи ҳалли системаи муодилаҳои интегралии навъи дуюми Волтерр бо махсусияти суст оварда шудааст.Ҳалли умумии система бо ёрии резолвентаҳои системаи муодилаҳои интегралӣ ифода карда шудааст. Тасвири ҳосил кардашуда дар муқаррар кардани формулаҳои баргардонии он, омӯзиши хосиятҳои ҳалҳо дар атрофи нуқтаи сингулярӣ, муайян кардани гузориши дурусти намуди нави масъалаи Кошӣ ва ёфтани ҳалли он татбиқ гардидааст.

Key words: *system of ordinary differential equations, singular point, system of Volterra integral equations, general solution, inversion formulas, properties of solutions, Cauchy type problem.*

The article investigates a system of linear ordinary differential equations of the second order of a general form with a boundary singular point. A certain equation of the system is considered the main one and its study is carried out depending on the properties of the coefficient for the corresponding unknown function in this equation. The problem of solving this system is reduced to an equivalent problem of solving a system of Volterra integral equations of the second kind with a weak singularity. The general solution of the system is expressed using the resolvent system of integral equations. The obtained representation is used to establish its inversion formulas, study the behavior of solutions in the neighborhood of a singular point, the correct formulation and solving of the Cauchy problem of a new type.

Пусть дана система уравнений

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{|x-c|} y_j' + \sum_{k=1}^{m} \frac{r_{jk}(x)}{(x-c)^2} y_k = \frac{f_j(x)}{(x-c)^2}, x \in \Gamma_c = \Gamma \setminus \{c\}, \ j = \overline{1,m}, \quad (1)$$

где $\Gamma = (a,b)$ $(a < b)$ – промежуток числовой оси, c - особая сингулярная точка, подчиняющая условию $a \le c \le b$, $p_j(x)$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)$ - известные, а $y_j(x) \in C^2(\Gamma_c)$ - искомые функции.

Отметим, что изучению общих линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высшего порядков, а также систем уравнений первого и второго порядков с вырождением или с сингулярными и сверх сингулярными коэффициентами посвящен ряд исследований, например, [1-12]. Достаточно подробную библиографию по данному вопросу можно найти в монографиях [1,2,6]. В работах [2-5] системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка исследованы при помощи соответствующих модельных систем с постоянными коэффициентами, причем общий случай сведен к изучению систем интегральных уравнений, в том числе систем уравнений Вольтерра со слабой особенностью, а также решены задачи типа Коши. Монография [6] посвящена изучению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем с одной или многими сингулярными точками разного порядка. В этой работе разработан новый способ исследования уравнений и систем в зависимости от расположения особых точек. В монографии [7] изучены интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными ядрами, связанные с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. В работе [8] для исследования модельной системы первого порядка применен метод обобщенных степенных рядов. Исследования [10,11] посвящены изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной и сверхсингулярной точкой непосредственным сведением их к системе интегральных уравнений Вольтерра со слабой особенностью. В этих работах поставлены и решены новый тип задач Коши. В работах [9,12] исследованы линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго и третьего порядка с сингулярной и сверхсингулярной точкой, поставлены и решены задачи типов Коши и линейного сопряжения.

Целью настоящей работы явилось изучение системы (1) в случаях совпадения сингулярной точки c с граничными точками промежутка Γ.

1. **Случай $c = a$.** В таком случае систему (1) можно записать в виде

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{x-a} y_j' + \sum_{k=1}^{m} \frac{r_{jk}(x)}{(x-a)^2} y_k = \frac{f_j(x)}{(x-a)^2}, \ j = \overline{1,m}. \quad (1.1)$$

Здесь уравнение с номером s, $s=\overline{1,m}$ считаем основным и проведем изучение системы (1) опираясь на свойства коэффициента $p_s(x)$ этого уравнения и свойства ниже вводимых, связанных с ним функций. Данную систему после некоторых элементарных тождественных преобразований перепишем в следующем эквивалентном виде:

$$L^{1,+}_{p_s,a}y_j=\frac{f_j(x)-\sum\limits_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{m}r_{jk}(x)y_k-R^{1,+}_{js,a}(x)y_j+(x-a)\Omega_{js}(x)y'_j}{(x-a)^2}\,,\quad j=\overline{1,m},\qquad (1.1)$$

где $L^{1,+}_{p_s,a}y=y''+\dfrac{2p_s(x)}{x-a}y'+\dfrac{(x-a)p'_s(x)-p_s(x)+p_s^2(x)}{(x-a)^2}y$, $\Omega_{js}(x)=2[p_s(x)-p_j(x)]$,

$R^{1,+}_{js,a}(x)=r_{jj}(x)-(x-a)p'_s(x)+p_s(x)-p_s^2(x)$.

Если решение системы (1.1) из класса $C^2(\varGamma)$ существует, то на основании формулы (1.3) [9, с.25] оно, после некоторых преобразований, записывается в виде

$$y_j(x)=(x-a)^{-p_s(a)}\exp[-w^{1,+}_{p_s,a}(x)]\left\{-\int_a^x\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{m}(x-\xi)r_{jk}(\xi)(\xi-a)^{p_s(a)-2}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]y_k(\xi)d\xi-\right.$$

$$-\int_a^x(x-\xi)\,R^{1,+}_{js,a}(\xi)(\xi-a)^{p_s(a)-2}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]y_j(\xi)d\xi+$$

$$\left.+\int_a^x(x-\xi)\Omega_{js}(\xi)(\xi-a)^{p_s(a)-1}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]y'_j(\xi)d\xi+T^{1,+}_a[p_s(x),f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}]\right\},\ j=\overline{1,m},$$

(1.2)

где

$$T^{1,+}_a[p_s(x),f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}]=\int_a^x(x-\xi)\,f_j(\xi)(\xi-a)^{p_s(a)-2}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]d\xi+c^+_{j1}(x-a)+c^+_{j0},$$

$w^{1,+}_{p_s,a}(x)=\displaystyle\int_a^x\frac{p_s(t)-p_s(a)}{t-a}dt$, c^+_{j1},c^+_{j0}, $j=\overline{1,m}$ - произвольные постоянные.

Для справедливости проведенных вычислений требуем, чтобы коэффициенты и правая часть уравнений системы (1.1) удовлетворяли условиям $p_j(x)\in C^1(\overline{\varGamma})$, $p_j(a)\neq 0$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)\in C(\overline{\varGamma})$, $j,k=\overline{1,m}$.

Заметим, что функция $w^{1,+}_{p_s,a}(x)$, в силу условия на $p_s(x)$ является непрерывной на отрезке $\overline{\varGamma}$ и дифференцируемой на интервале $\varGamma$. Аналогичными свойствами обладает функция $T^{1,+}_a[p_s(x),f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}]$ при $p_s(a)>1$, в случае же $p_s(a)\leq 1$ для существования этого интеграла потребуем, чтобы $f_j(x)$ в точке $x=a$ обращалась в нуль и удовлетворяла асимптотическому равенству

$$f_j(x)=o[(x-a)^{\beta^+_{js}}],\ \beta^+_{js}>1-p_s(a),\ j=\overline{1,m}\ \text{при}\ x\to a+0.\qquad (1.3)$$

Для существования интегралов в формуле (1.2), кроме этого, нужно требовать, чтобы функции $R^{1,+}_{js,a}(x)$ и $r_{jk}(\xi)$, $k\neq j$ в точке $x=a$ обращались в ноль и удовлетворяли, соответственно следующим асимптотическим равенствам:

$$R^{1,+}_{js,a}(x)=o[(x-a)^{\gamma^+_{js}}],\ r_{jk}(\xi)=o[(x-a)^{\delta^+_{jk}}],\ \gamma^+_{js},\delta^+_{jk}>1,\ k\neq j,\ j,k=\overline{1,m}\ \text{при}\ x\to a+0$$

(1.4)

В системе (1.2) в интеграле содержащей $y'_j(\xi)$ проведем операцию интегрирования по частям, и полученный результат представим в виде:

$$\int_a^x (x-\xi)\Omega_{js}(\xi)(\xi-a)^{p_s(a)-1}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]y'_j(\xi)d\xi=$$

$$=\Big\{(x-\xi)\Omega_{js}(\xi)(\xi-a)^{p_s(a)-1}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]y_j(\xi)\Big\}_{\xi=a+0}^{\xi=x}-\int_a^x\Big\{(x-\xi)\Big\{(\xi-a)\Omega_{js}'(\xi)+$$

$$+[p_s(\xi)-1]\Omega_{js}(\xi)\Big\}-(\xi-a)\Omega_{js}(\xi)\Big\}(\xi-a)^{p_s(a)-2}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]y_j(\xi)d\xi. \qquad (1.5)$$

Пусть функция $\Omega_{js}'(x)$ в точке $x=a$ обращается в ноль и удовлетворяет условию

$$\Omega_{js}'(x)=o[(x-a)^{\varepsilon^+_{js}}],\ \varepsilon^+_{js}>0,\ j=\overline{1,m},\ j\neq s \text{ при } x\to a+0. \qquad (1.6)$$

Тогда функция $\Omega_{js}(x)$ удовлетворяет асимптотическому равенству [11]

$$\Omega_{js}(x)=o[(x-a)^{\varepsilon^+_{js}+1}],\ \varepsilon^+_{js}>0,\ j=\overline{1,m},\ j\neq s \text{ при } x\to a+0,$$

в силу чего в правой части равенства (1.5) двойная подстановка равняется нулю и интеграл существует. Значение преобразованного интеграла из равенства (1.5) подставляем в систему (1.2), затем в полученном результате объединим подобные интегралы и имеем систему

$$y_j(x)=(x-a)^{-p_s(a)}\exp[-w^{1,+}_{p_s,a}(x)]\Big\{-\int_a^x\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^m(x-\xi)r_{jk}(\xi)(\xi-a)^{p_s(a)-2}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]y_k(\xi)d\xi-$$

$$-\int_a^x\Big\{(x-\xi)\Big\{R^{1,+}_{js,a}(\xi)+(\xi-a)\Omega_{js}'(\xi)+[p_s(\xi)-1]\Omega_{js}(\xi)\Big\}-(\xi-a)\Omega_{js}(\xi)\Big\}\cdot$$

$$\cdot(\xi-a)^{p_s(a)-2}\exp[w^{1,+}_{p_s,a}(\xi)]y_j(\xi)d\xi+T^{1,+}_a[p_s(x),f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}]\Big\},\ j=\overline{1,m}.$$

В этой системе вводим новые неизвестные функции $\varphi_j(x)$, связанные с искомыми функциями $y_j(x)$ равенством

$$y_j(x)=(x-a)^{-p_s(a)}\exp[-w^{1,+}_{p_s,a}(x)]\varphi_j(x),\ j=\overline{1,m}. \qquad (1.7)$$

Тогда относительно функций $\varphi_j(x)$ имеем следующую систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода с ядрами, имеющими слабую особенность при $\xi\to a+0$ и непрерывной на $\overline{\Gamma}$ правой частью

$$\varphi_j(x)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^m\int_a^x K^{1,+}_{jk,a}(x,\xi)\varphi_k(\xi)d\xi+\int_a^x K^{1,+}_{jj,a}(x,\xi)\varphi_j(\xi)d\xi=T^{1,+}_a[p_s(x),f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}],\ j=\overline{1,m},$$

(1.8)

где

$$K^{1,+}_{jk,a}(x,\xi)=(x-\xi)r_{jk}(\xi)(\xi-a)^{-2},k\neq j,\ K^{1,+}_{jj,a}(x,\xi)=$$

$$=\Big\{(x-\xi)\Big\{R^{1,+}_{js,a}(\xi)+(\xi-a)\Omega_{js}'(\xi)+[p_s(\xi)-1]\Omega_{js}(\xi)\Big\}-(\xi-a)\Omega_{js}(\xi)\Big\}(\xi-a)^{-2},\ j,k=\overline{1,m}.$$

Система уравнений (1.8) имеет единственное, непрерывное на $\overline{\Gamma}$ решение при любых системах значений произвольных постоянных c^+_{j1},c^+_{j0}, $j=\overline{1,m}$. Следовательно, можно утверждать, что если $y_j(x)$, $j=\overline{1,m}$ есть решение системы (1.1), то $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, определяемая из равенства (1.7), будет удовлетворять системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.8) со слабой особенностью.

Можно доказать, что имеет место и обратное предложение. Действительно, пусть $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,m}$ есть решение системы (1.8). Тогда непосредственными вычислениями убеждаемся, что $\varphi_j(x)\in C^2(\Gamma)$, $j=\overline{1,m}$ и подчиняется системе дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_j''(x)+\frac{\Omega_{js}(x)}{x-a}\varphi_j'(x)+\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{m}\frac{r_{jk}(x)}{(x-a)^2}\varphi_k(x)+\frac{R_{js,a}^{1,+}(x)+p_s(x)\Omega_{js}(x)}{(x-a)^2}\varphi_j(x)=$$

$$\cdot= f_j(x)(x-a)^{p_s(a)-2}\exp[w_{p_s,a}^{1,+}(x)]\,,\; j=\overline{1,m}.$$

Из этого следует, что система функций $y_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, определяемая с помощью $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,m}$ равенством (1.7), подчиняется системе (1.1).

Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема 1.1. Пусть в системе (1) $c=a$, $p_j(x)\in C^1(\overline{\Gamma})$, $p_j(a)\neq 0$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)\in C(\overline{\Gamma})$, $j,k=\overline{1,m}$, $p_s(a)>1$. Функции $R_{js,a}^{1,+}(x)$ и $r_{jk}(\xi), k\neq j$, ${\Omega_{js}}'(x)$, $j,k=\overline{1,m}$ в точке $x=a$ обращаются в ноль в соответствии с асимптотическим равенством (1.4) и (1.6). Если выполняется неравенство $p_s(a)\leq 1$, то дополнительно функция $f_j(x)$, $j=\overline{1,m}$ в точке $x=a$ обращается в ноль и удовлетворяет условию (1.3).

Тогда система дифференциальных уравнений (1) равносильна системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.8) со слабой особенностью, в том смысле, что каждому решению системы (1) из класса $C^2(\Gamma)$ соответствует одно решение системы (1.8) из того же класса и обратно.

Выписывая решение системы (1.8) с помощью ее резольвент, и подставляя полученный результат в равенство из (1.7) приходим к следующему выводу:

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда общее решение системы уравнений (1) из класса $C^2(\Gamma)$ выражается формулой

$$\begin{cases} y_j(x)=(x-a)^{-p_s(a)}\exp[-w_{p_s,a}^{1,+}(x)]\Big\{\; T_a^{1,+}[p_s(x), f_j(x), c_{j1}^+, c_{j0}^+]- \\ -\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int\limits_a^x \Gamma_{jk,a}^{1,+}(x,\xi)T_a^{1,+}[p_s(\xi), f_k(\xi), c_{k1}^+, c_{k0}^+]d\xi-\int\limits_a^x \Gamma_{jj,a}^{1,+}(x,\xi)T_a^{1,+}[p_s(\xi), f_j(\xi), c_{j1}^+, c_{j0}^+]d\xi\;\Big\}\equiv \\ \equiv Q_{j,a}^{1,+}[(p),(r),(f),c_{11}^+,c_{10}^+,\dots,c_{m1}^+,c_{m0}^+],\; j=\overline{1,m},\, j\neq s \\ y_s(x)=(x-a)^{-p_s(a)}\exp[-w_{p_s,a}^{1,+}(x)]\Big\{\; T_a^{1,+}[p_s(x), f_s(x), c_{s1}^+, c_{s0}^+]- \\ -\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{m}\int\limits_a^x \Gamma_{sk,a}^{1,+}(x,\xi)T_a^{1,+}[p_s(\xi), f_k(\xi), c_{k1}^+, c_{k0}^+]d\xi-\int\limits_a^x \Gamma_{ss,a}^{1,+}(x,\xi)T_a^{1,+}[p_s(\xi), f_s(\xi), c_{s1}^+, c_{s0}^+]d\xi\;\Big\}\equiv \\ \equiv Q_{s,a}^{1,+}[(p),(r),(f),c_{11}^+,c_{10}^+,\dots,c_{m1}^+,c_{m0}^+]\,, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $\Gamma_{jk,a}^{1,+}(x,\xi)$, $j,k=\overline{1,m}$ - является резольвентой системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.8) со слабой особенностью, а $(p)\equiv\{p_1(x),\dots,p_m(x)\}$, $(r)\equiv\{r_{11}(x),\dots,r_{1m}(x),\dots,r_{m1}(x),\dots,r_{mm}(x)\}$, $(f)\equiv\{f_1(x),\dots,f_m(x)\}$.

Следствие 1.1. На основании представления (1.9) можно заключить, что при

$x\to a+0$ все решения системы (1) стремятся к бесконечности, если $p_s(a)>0$; стремятся к нулю, если $p_s(a)<0$ и подчиняются следующему асимптотическому равенству соответственно: $y_j(x)=O[(x-a)^{-p_s(a)}]$, $y_j(x)=o[(x-a)^{-p_s(a)}]$, $j=\overline{1,m}$.

Следствие 1.2. Непосредственные вычисления показывают, что для решений системы уравнений (1), выражаемых формулой (1.9), выполняются следующие равенства:

$$[(x-a)^{p_s(a)}B_{p_s,a}^{1,+\ q}y_j(x)]_{x=a+0}=c_{jq}^{+},\ j=\overline{1,m},\ q=0,1, \qquad (1.10)$$

где $B_{p_s,a}^{1,+}y=y'+\dfrac{p_s(x)}{x-a}y$, , $B_{p_s,a}^{1,+\ 0}y\equiv y$.

Используя представление (1.9) и его формулы обращения (1.10) можно ставить и исследовать следующую задачу типа Коши для системы уравнений (1):

Задача 1.1. Пусть в системе уравнений (1) $c=a$. Требуется найти решение системы из класса $C^2(\Gamma)$ по следующему условию в точке a:

$$[(x-a)^{p_s(a)}B_{p_s,a}^{1,+\ q}y_j(x)]_{x=a+0}=y_{jq}^{+},\ j=\overline{1,m},\ q=0,1, \qquad (1.11)$$

где y_{jq}^{+} - заданные вещественные числа.

Для решения этой задачи, считая выполненными условия теоремы 1.1, представление (1.9) подчиним условиям (1.11). Тогда, в силу свойства (1.10) приходим к следующим равенству для нахождения произвольных постоянных c_{jq}^{+}: $c_{jq}^{+}=y_{jq}^{+},\ j=\overline{1,m},\ q=0,1$. Внося это значение произвольных постоянных в формулу (1.9), получим следующее заключение:

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда задача 1.1 имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y_j(x)=Q_{j,a}^{1,+}[(p),(r),(f),y_{11}^{+},y_{10}^{+},...,y_{m1}^{+},y_{m0}^{+}],\ j=\overline{1,m}.$$

2.Случай $c=b$**.** В этом случае система (1) принимает вид

$$y_j''+\frac{2p_j(x)}{b-x}y_j'+\sum_{k=1}^{m}\frac{r_{jk}(x)}{(b-x)^2}y_k=\frac{f_j(x)}{(b-x)^2},\ j=\overline{1,m}. \qquad (2.1)$$

Выберем некоторую функцию $p_l(x)$, $l=\overline{1,m}$, уравнение с номером l считаем основным и данную систему преобразуем к виду

$$L_{l,b}^{1,-}y_j=\frac{f_j(x)-\sum\limits_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{m}r_{jk}(x)y_k-R_{jl,b}^{1,-}(x)y_j+(b-x)\Omega_{jl}(x)y_j'}{(b-x)^2},\ j=\overline{1,m},$$

где $L_{l,b}^{1,-}y=y''+\dfrac{2p_l(x)}{b-x}y'+\dfrac{(b-x)p_l'(x)+p_l(x)+p_l^2(x)}{(b-x)^2}y$, $\Omega_{jl}(x)=2[p_l(x)-p_j(x)]$,

$$R_{jl,b}^{1,-}(x)=r_{jj}(x)-(b-x)p_l'(x)-p_l(x)-p_l^2(x).$$

Если решение системы (2.1) из класса $C^2(\Gamma)$ существует, то оно при помощи формулы (2.3) [9, с. 27] записывается в виде

$$y_j(x)=(b-x)^{p_l(b)}\exp[-w_{p_l,b}^{1,-}(x)]\left\{\int_x^b\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{m}(x-\xi)r_{jk}(\xi)(b-\xi)^{-p_l(b)-2}\exp[w_{p_l,b}^{1,-}(\xi)]y_k(\xi)d\xi+\right.$$

$$+\int_x^b(x-\xi)R_{jl,b}^{1,-}(\xi)(b-\xi)^{-p_l(b)-2}\exp[w_{p_l,b}^{1,-}(\xi)]y_j(\xi)d\xi-$$

$$\left.-\int_x^b(x-\xi)\Omega_{jl}(\xi)(b-\xi)^{-p_l(b)-1}\exp[w_{p_l,b}^{1,-}(\xi)]y_j'(\xi)d\xi+T_b^{1,-}[p_l(x),f_j(x),c_{j1}^{-},c_{j0}^{-}]\right\},\ j=\overline{1,m},$$

(2.2)

где

$$T_b^{1,-}[p_l(x),f_j(x),c_{j1}^{-},c_{j0}^{-}]=c_{j1}^{-}(b-x)+c_{j0}^{-}-\int_x^b(x-\xi)f_j(\xi)(b-\xi)^{-p_l(b)-2}\exp[w_{p_l,b}^{1,-}(\xi)]d\xi,$$

$w^{1,-}_{p_l,b}(x)=\int\limits_x^b \frac{p_l(b)-p_l(t)}{b-t}dt$, c^-_{j1}, c^-_{j0} - произвольные постоянные.

Для существования интегралов в системе (2.2) и справедливости дальнейших ее преобразований потребуем выполнения следующих условий:

1) $p_j(x)\in C^1(\overline{\Gamma})$, $p_j(b)\neq 0$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)\in C(\overline{\Gamma})$, $j,k=\overline{1,m}$ и $p_l(b)<-1$. Если же $p_l(b)\geq -1$, то функция $f_j(x)$ в точке $x=b$ обращается в ноль с асимптотическим поведением

$$f_j(x)=o[(b-x)^{\beta^-_{jl}}],\ \beta^-_{jl}>1+p_l(b),\ j=\overline{1,m} \text{ при } x\to b-0.$$

2) функции $R^{1,-}_{jl,b}(x)$ и $r_{jk}(\xi), k\neq j$, $j=\overline{1,m}$ в точке $x=b$ обращаются в ноль и подчиняются, соответственно асимптотическим равенствам:

$R^{1,-}_{jl,b}(x)=o[(b-x)^{\gamma^-_{jl}}]$, $r_{jk}(\xi)=o[(b-x)^{\delta^-_{jk}}]$, $\gamma^-_{jl},\delta^-_{jk}>1$, $k\neq j$, $j=\overline{1,m}$ при $x\to b-0$.

3) функция $\Omega_{jl}'(x)$ в точке $x=b$ обращается в ноль и удовлетворяет условию

$$\Omega_{jl}'(x)=o[(b-x)^{\varepsilon^-_{jl}}],\ \varepsilon^-_{jl}>0,\ j=\overline{1,m} \text{ при } x\to b-0. \tag{2.3}$$

Заметим, что при выполнении условия (2.3) функция $\Omega_{jl}(x)$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$\Omega_{jl}(x)=o[(b-x)^{\varepsilon^+_{jl}+1}]$, $\varepsilon^+_{jl}>0$, $j=\overline{1,m}$ при $x\to b-0$.

Далее, в системе (2.2) в интеграле содержащем $y_j'(\xi)$ совершим интегрирование по частям, и полученный результат напишем в виде:

$$\int\limits_x^b (x-\xi)\Omega_{jl}(\xi)(b-\xi)^{-p_l(b)-1}\exp[w^{1,-}_{p_l,b}(\xi)]y_j'(\xi)d\xi=$$

$$=\left\{(x-\xi)\Omega_{jl}(\xi)(b-\xi)^{-p_l(b)-1}\exp[w^{1,-}_{p_l,b}(\xi)]y_j(\xi)\right\}_{\xi=x}^{\xi=b-0}-\int\limits_x^b\Big\{(x-\xi)\Big\{(b-\xi)\Omega_{jl}'(\xi)+$$

$$+[p_l(\xi)+1]\Omega_{jl}(\xi)\Big\}-(b-\xi)\Omega_{jl}(\xi)\Big\}(b-\xi)^{-p_l(b)-2}\exp[w^{1,-}_{p_l,b}(\xi)]y_j(\xi)d\xi. \tag{2.4}$$

В силу условия (2.3) в правой части равенства (2.4) двойная подстановка равняется нулю и интеграл существует. С учетом этого, значение преобразованного интеграла из равенства (2.4) вносим в систему (2.2), затем объединяя подобные интегралы, имеем систему

$$y_j(x)=(b-x)^{p_l(b)}\exp[-w^{1,-}_{p_l,b}(x)]\left\{\sum_{\substack{k=1,\\k\neq l}}^m\int\limits_x^b(x-\xi)r_{jk}(\xi)(b-\xi)^{-p_l(b)-2}\exp[w^{1,-}_{p_l,b}(\xi)]y_k(\xi)d\xi+\right.$$

$$+\int\limits_x^b\Big\{(x-\xi)\Big\{R^{1,-}_{jl,b}(\xi)+(b-\xi)\Omega_{jl}'(\xi)+[p_l(\xi)+1]\Omega_{jl}(\xi)\Big\}-(b-\xi)\Omega_{jl}(\xi)\Big\}\cdot$$

$$\left.\cdot(b-\xi)^{-p_l(b)-2}\exp[w^{1,-}_{p_l,b}(\xi)]y_j(\xi)d\xi+T^{1,-}_b[p_l(x),f_j(x),c^-_{j1},c^-_{j0}]\right\},\ j=\overline{1,m}.$$

Если ввести новые неизвестные функции $\psi_j(x)$, связанные с искомыми функциями $y_j(x)$ по формуле

$$y_j(x)=(b-x)^{p_l(b)}\exp[-w^{1,-}_{p_l,b}(x)]\psi_j(x),\ j=\overline{1,m}, \tag{2.5}$$

то последняя система относительно функций $\psi_j(x)$ записывается в виде следующей системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\psi_j(x)-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_x^b K^{1,-}_{jk,b}(x,\xi)\psi_k(\xi)d\xi-\int_x^b K^{1,-}_{jj,b}(x,\xi)\psi_j(\xi)d\xi=T^{1,-}_b[p_l(x),f_j(x),c^-_{j1},c^-_{j0}]\ ,\ j=\overline{1,m}\,,$$

(2.6)

где

$K^{1,-}_{jk,b}(x,\xi)=(x-\xi)r_{jk}(\xi)(b-\xi)^{-2}\,,k\neq j\,,\ K^{1,-}_{jj,b}(x,\xi)=$

$$=\left\{(x-\xi)\left\{R^{1,-}_{jl,b}(\xi)+(b-\xi)\Omega_{jl}{}'(\xi)+[p_l(\xi)+1]\Omega_{jl}(\xi)\right\}-(b-\xi)\Omega_{jl}(\xi)\right\}(b-\xi)^{-2}\ ,\ j=\overline{1,m}\,.$$

При выполнении условий выше приведенных в пунктах 1) – 3) в уравнениях системы (2.6) ядра имеют слабую особенность при $\xi\to b-0$, а правая часть непрерывна на $\overline{\varGamma}$. Поэтому, система интегральных уравнений (2.6) для каждой совокупности значений произвольных постоянных c^-_{j1},c^-_{j0}, $j=\overline{1,m}$ имеет единственное решение, непрерывное на отрезке $\overline{\varGamma}$.

Таким образом, заключаем, что если $y_j(x)$, $j=\overline{1,m}$ есть решение системы (2.1), то $\psi_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, определяемая из равенства (2.5) будет решением системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода (2.6) со слабой особенностью. Справедливо и предложение обратное этому. Действительно, если $\psi_j(x)$, $j=\overline{1,m}$ есть решение системы (2.6), то непосредственная проверка показывает, что $\psi_j(x)\in C^2(\varGamma)$, $j=\overline{1,m}$ и удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\psi''_j(x)-\frac{\Omega_{jl}(x)}{b-x}\psi'_j(x)+\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{m}\frac{r_{jk}(x)}{(b-x)^2}\psi_k(x)+\frac{R^{1,-}_{jl,b}(x)+p_l(x)\Omega_{jl}(x)}{(b-x)^2}\psi_j(x)=$$

$$=f_j(x)(b-x)^{-p_l(b)-2}\exp[w^{1,-}_{p_l,b}(x)]\,,\ j=\overline{1,m}.$$

Тогда система функций $y_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, определяемая из равенства (2.5) будет решением системы (2.1).

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 2.1. Пусть в системе (1) $c=b$ и для нее выполнены условия, сформулированные в выше приведенных пунктах 1) - 3).

Тогда система дифференциальных уравнений (1) равносильна системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода (2.6) со слабой особенностью, в том смысле, что каждому решению системы (1) из класса $C^2(\varGamma)$ соответствует одно решение системы (2.6) из того же класса и обратно.

Из этой теоремы вытекает следующий результат:

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда общее решение системы уравнений (1) из класса $C^2(\varGamma)$ выражается формулой

$$\begin{cases} y_j(x) = (b-x)^{p_l(b)} \exp[-w^{1,-}_{p_l,b}(x)] \Big\{ T^{1,-}_b[p_l(x), f_j(x), c^-_{j1}, c^-_{j0}] + \\ + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m} \int\limits_x^b \Gamma^{1,-}_{jk,b}(x,\xi) T^{1,-}_b[p_l(\xi), f_k(\xi), c^-_{k1}, c^-_{k0}]d\xi + \int\limits_x^b \Gamma^{1,-}_{jj,b}(x,\xi) T^{1,-}_b[p_l(\xi), f_j(\xi), c^-_{j1}, c^-_{j0}]d\xi \Big\} \equiv \\ \equiv Q^{1,-}_{j,b}[(p),(r),(f), c^-_{11}, c^-_{10}, ..., c^-_{m1}, c^-_{m0}],\ j=\overline{1,m},\ j\neq l \\ y_l(x) = (b-x)^{p_l(b)} \exp[-w^{1,-}_{p_l,b}(x)] \Big\{ T^{1,-}_b[p_l(x), f_l(x), c^-_{l1}, c^-_{l0}] + \\ + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{m} \int\limits_x^b \Gamma^{1,-}_{lk,b}(x,\xi) T^{1,-}_b[p_l(\xi), f_k(\xi), c^-_{k1}, c^-_{k0}]d\xi + \int\limits_x^b \Gamma^{1,-}_{ll,b}(x,\xi) T^{1,-}_b[p_l(\xi), f_l(\xi), c^-_{l1}, c^-_{l0}]d\xi \Big\} \equiv \\ \equiv Q^{1,-}_{l,b}[(p),(r),(f), c^-_{11}, c^-_{10}, ..., c^-_{m1}, c^-_{m0}], \end{cases} \quad (2.7)$$

где $\Gamma^{1,-}_{jk,b}(x,\xi)$, $j,k=\overline{1,m}$ - является резольвентой системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода (2.6) со слабой особенностью.

Следствие 2.1. Непосредственно из представления (2.7) следует, что при $x \to b-0$ все решения системы (1) стремятся к бесконечности, в случае $p_l(b)<0$; стремятся к нулю, в случае $p_l(b)>0$ и подчиняются следующему асимптотическому равенству соответственно: $y_j(x)=O[(b-x)^{p_l(b)}]$, $y_j(x)=o[(b-x)^{p_l(b)}]$, $j=\overline{1,m}$.

Следствие 2.2. Все решения системы уравнений (1), представляемые формулой (2.7), удовлетворяют следующим равенствам:

$$[(b-x)^{-p_l(b)} B^{1,-\ q}_{p_l,b} y_j(x)]_{x=b-0} = (-1)^q c^-_{jq},\ j=\overline{1,m},\ q=0,1, \quad (2.8)$$

где $B^{1,-}_{p_l,b} y = y' + \dfrac{p_l(x)}{b-x} y$, , $B^{1,-\ 0}_{p_l,b} y \equiv y$.

Представление (2.7) и его свойство (2.8) дают возможность ставить и исследовать следующую задачу типа Коши для системы (1):

Задача 2.1. Пусть в системе (1) $c=b$. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(\Gamma)$ по следующим условиям в точке $x=b$:

$$[(b-x)^{-p_l(b)} B^{1,-\ q}_{p_l,b} y_j(x)]_{x=b-0} = y^-_{jq},\ j=\overline{1,m},\ q=0,1,$$

где y^-_{jq} - заданные числа.

Поступая как в случае задачи 1.1, относительно задачи 2.1 имеем следующее утверждение:

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда задача 2.1 имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y_j(x) = Q^{1,-}_{j,b}[(p),(r),(f), -y^-_{11}, y^-_{10}, ..., -y^-_{m1}, y^-_{m0}],\ j=\overline{1,m}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения/ В.П. Глушко. – Воронеж: ВГУ, 1972. - 193с.
2. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. Пособие по спецкурсу.Часть 4/ Н.Раджабов. - Душанбе, 1985. - 148с.
3. Раджабов Н. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений со сверхсингулярной точкой / Н.Раджабов, В.В.Шевчук // Докл. АН ТаджССР. - 1989. - Т. 32. - №8. - С. 506 - 510.
4. Михайлов Л.Г. Об одном способе исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными точками // Докл. АН России. - 1994. - т. 336. - №1. - С. 21-23.
5. Раджабов Н. Задача типа Коши для системы двух линейных уравнений первого порядка с одной сверхсингулярной точкой/ Н.Раджабов, А.М.Мирзоев//Дифференциальные уравнения с

сингулярными коэффициентами. Тезисы докладов международной научной конференции (Душанбе, 17-19. 11. 1996). - Душанбе, 1996. - С.71.
6. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients.- Dushanbe: TSNU, 1998. - 160p.
7. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх сингулярными ядрами и их приложения / Н. Раджабов. –Душанбе: Деваштич. - 2007. - 222 с.
8. Раджабов Н. Линейная модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной левой граничной сингулярной точкой/ Н. Раджабов, О.И.Меликов //Докл. АН Республики Таджикистан. - 2015. Т. 58. - №6. - С.451 - 457.
9. Олимов А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с сингулярной точкой / А.Г.Олимов, М.Я.Дадоджанова// Ученые записки. Серия естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. – Худжанд: Нури маърифат. -2016.- №3 (38). - С. 24-31.
10. Олимов А.Г. Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой/ А.Г. Олимов, Н. Раджабов// Докл. АН Республики Таджикистан. - 2016. - Т. 59. - № 3-4. - С. 99-105.
11. Олимов А.Г. Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярной точкой/ А.Г. Олимов, Н. Раджабов// Докл. АН Республики Таджикистан. - 2017. - Т.60. - №7-8. - С.279-285.
12. Олими А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задачи типов Коши и линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой/ А.Г. Олими// Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Сино. - 2021. - №1. - С.60 - 77.

REFERENCES

1. Glushko V.P. Linear degenerate differential equations/ V.P. Glushko. – Voronezh: VSU, 1972. - 193p.
2. Rajabov N. Integral representations and boundary value problems for some differential equations with a singular line or singular surfaces. The manual for the special course. Part 4/ N. Rajabov . - Dushanbe, 1985. – 148p.
3. Rajabov N. On the theory of ordinary differential equations with a supersingular point / N. Rajabov, V. V. Shevchuk / / Dokl. Academy of Sciences of the Tajik SSR. - 1989. - Vol. 32. - No. 8. - P. 506-510.
4. Mikhailov L.G. On a method for studying systems of ordinary differential equations with singular points // Docl. AN of Russia. - 1994. - vol. 336. - No. 1. - P. 21-23.
5. Rajabov N. The Cauchy type problem for a system of two linear equations of the first order with one supersingular point/ N. Rajabov, A.M. Mirzoev/ / Differential equations with singular coefficients. Abstracts of reports of the international scientific conference (Dushanbe, 17-19. 11. 1996). - Dushanbe, 1996. - P. 71.
6. N. Rajabov Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients.- Dushanbe: TSNU, 1998. - 160p.
7. Rajabov N. Volterre type integral equations with fixed boundary and internal singular and super singular kernels and their applications / N. Rajabov. - Dushanbe: Devashtich. - 2007. - 222 p.
8. Rajabov N. Linear model system of first-order ordinary differential equations with one left boundary singular point/ N. Rajabov, O.I. Melikov / / Dokl. Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2015. Vol. 58. - No. 6. - P. 451-457.
9. Olimov A. G. Second order linear ordinary differential equation of the general form with a singular point / A. G. Olimov, M. Ya. Dadojanova// Scientific notes. Natural and Economic Sciences series. Founder: Khujand State University named after Academician B. Gafurov. - Khujand: Nuri marifat. -2016.- №3 (38). - P. 24-31.
10. Olimov A.G. Integral representations and Cauchy type problems for a system of second order linear ordinary differential equations with a singular point/ A. G. Olimov, N. Rajabov// Docl. Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2016. - Vol. 59. - No. 3-4. - P. 99-105.
11. Olimov A.G. Integral representations and Cauchy type problems for a system of the second order linear ordinary differential equations with a super - singular point/ A.G. Olimov, N. Rajabov/ / Dokl. Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. - 2017. - Vol. 60. - No. 7-8. - P. 279-285.
12. Olimi A.G. Representation of the general solution in integral form and the Cauchy and linear conjugation types problems for a third-order linear ordinary differential equation with a supersingular point/ A.G. Olimi// Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences. - Dushanbe: Sino. - 2021. - No. 1. - P. 60-77.