01.00.00 - ИЛМҲОИ ФИЗИКАВУ МАТЕМАТИКА
01.00.00 - ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
01.00.00 - PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-MATHEMATICS

01.01.02 Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ
01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
01.01.02 Differential equations, dynamic systems and optimal control

УДК: 517.946.9
ББК 22

РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПАМЯТЬЮ

Кибориён Бободжон Киборзода - *кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры информационных технологий и методики преподавании информатики Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава,*
e-mail: faizalizoda.bakhrullo@mail.ru

ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАИ КАНОРИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА БО ХОТИРАИ ҒАЙРИХАТТӢ

Кибориён Бобоҷон Киборзода - *номзади илмҳои физикаю математика, муаллими калони кафедраи технологияҳои иттилоотӣ ва методикаи таълими информатика Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав,*
e-mail: faizalizoda.bakhrullo@mail.ru

THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN ELECTRODYNAMICS NON-LINEAR MEMORY

Kiboriyon Bobojon Kiborzoda - *Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Information Technology and Methods of Teaching Informatics, Nosir Khusrav Bokhtar State University,*
e-mail: faizalizoda.bakhrullo@mail.ru

Ключевые слова: *теорема, вектор-функции, априорная оценка, начальные условия краевых задач, материальные уравнения, обобщенные решения, нелинейные неравенства Грануолла-Белманна.*

В работе первоначально доказана лемма, что если $\varepsilon, \mu, \psi(0)$ *-положительные постоянные,* $\psi(t-\tau)$*- непрерывная и положительная функция, имеющая непрерывные положительные производные первого порядка при* $t \geq \tau \geq 0$ *и кроме того выполнены условия*

$$c_1|E|^P \leq J(E)E \leq c_2|E|^P,\ P \geq 2,\ c_1, c_2 = const$$

$$c_3|H|^\alpha \leq \mu(|H|)H \leq c_4|H|^\alpha,\ 1<\alpha<\infty, c_3, c_4 = const$$

$$\left(J(E_1)-J(E_2), E_1-E_2\right) \geq 0, \forall E_1, E_2 \in L^P(\Omega),$$

$$\left(\mu((|H_1|)H_1-\mu(|H_2|)H_2, H_1-H_2\right) \geq 0,\ \forall H_1, H_2 \in L^\alpha(\Omega),$$

то для вышеуказанного решения краевой задачи справедлива априорная оценка

$$\varepsilon\|E(t)\|^2+\mu\|H(t)\|^2+\tilde{c}_1\int_0^t\|E(\tau)\|^P_{L^P(\Omega)}d\tau+\tilde{c}_2\int_0^t\|H(\tau)\|^\alpha_{L^\alpha(\Omega)}d\tau \leq const,$$

где $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, *c – определяется данными задачи:* $\psi(0)$, $\|E_0\|^2$, $\|H_0\|^2$, $\int_0^T\|J_{ct.}(t)\|\,dt$ и областью Ω.

Для доказательства леммы использованы нелинейные неравенства Грануолла – Белманна. Также, даны обобщенные решения вышеуказанной системы удовлетворяющие граничные и начальные условия. В ходе работы для решения задач были использованы приближенные решения

$$H_n(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{jn}(t)\omega_j(x)$$
$$E_n(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{jn}(t)\varphi_j(x)$$

где $C_{jn}(t)$, $d_{jn}(t)$ *определены с самим уравнением. Для определения* $C_{jn}(t)$, $d_{jn}(t)$ *- заданы начальные условия*

$$E_n(0) = E_{0n},\ \ E_{0n} \to E_0 \ \ в \ \ L^2{}_{(\Omega)} \ \ при \ \ n \to \infty,$$
$$H_n(0) = H_{0n},\ \ H_{0n} \to H_0 \ \ в \ \ L^2{}_{(\Omega)} \ \ при \ \ n \to \infty.$$

В этой теоремы доказаны ограниченности

$$H_n \ \ в \ \ L^\infty\left(O,T; L^2{}_{(\Omega)}\right) \cap L^\alpha\left(O,T; L^\alpha(\Omega)\right),$$
$$E_n \ \ в \ \ L^\infty\left(O,T; L^2{}_{(\Omega)}\right) \cap L^p\left(O,T; L^p(\Omega)\right)$$

Таким образом, доказаны существование и ограниченность решений.

Калидвожаҳо: *теорема, вектор-функксия, баҳодиҳии априорӣ, шартҳои канорӣ ва ибтидоӣ, муодилаи материалӣ, ҳалли умумикардашуда, нобаробарии ғайрихаттии Грануолла-Белманн.*

Дар мақолаи мазкур лемма зерин пешакӣ исбот шудааст, ки барои ададҳои мусбати $\varepsilon, \mu, \psi(0)$ *ва* $\psi(t-\tau)$ *- функсияи мусбат ва бефосила, ҳосилаҳои тартиби якуми бефосила дошта, ҳангоми* $t \ge \tau \ge 0$ *нобаробариҳои зерин иҷро шавад:*

$$c_1|E|^P \le J(E)E \le c_2|E|^P,\ P \ge 2,\ c_1, c_2 = const$$

$$c_3|H|^\alpha \le \mu(|H|)H \le c_4|H|^\alpha,\ 1 < \alpha < \infty,\ c_3, c_4 = const$$

$$\left(J(E_1) - J(E_2),\ E_1 - E_2\right) \ge 0,\ \forall E_1, E_2 \in L^P(\Omega),$$

$$\left(\mu((|H_1|)H_1 - \mu(|H_2|)H_2,\ H_1 - H_2\right) \ge 0,\quad \forall H_1, H_2 \in L^\alpha(\Omega).$$

Он гоҳ барои масъалаи канории дар боло овардашуда баҳодиҳии априории зерин ҷой дорад:

$$\varepsilon\|E(t)\|^2 + \mu\|H(t)\|^2 + \tilde{c}_1\int_0^t \|E(\tau)\|^P_{L^P(\Omega)} d\tau + \tilde{c}_2\int_0^t \|H(\tau)\|^\alpha_{L^\alpha(\Omega)} d\tau \le const$$

Дар ин, ҷо $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, *с аз ифодаҳои* $\psi(0)$, $\|E_0\|^2$, $\|H_0\|^2$, $\int_0^T \|J_{ct.}(t)\|\, dt$ *ва соҳаи* Ω *муайян карда мешавад.*

Барои исботи леммаи нобаробарии ғайрихаттии Грануолла – Белманн истифода шудааст.

Ба ғайр аз ин мавҷудияти ҳалли умумикардашуда, ки шартҳои канорӣ ва ибтидоиро қаноат мекунанд, ба шакли теорема пешниҳод шудааст. Дар ҷараёни исботи теорема аз ҳалҳои тақрибии зерин

$$H_n(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{jn}(t)\omega_j(x)$$
$$E_n(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{jn}(t)\varphi_j(x)$$

ки дар ин ҷо $C_{jn}(t)$, $d_{jn}(t)$ *аз худи муодилаҳо муайян мебошанд, истифода шудааст. Барои муайянкунии* $C_{jn}(t)$, $d_{jn}(t)$ *- шартҳои ибтидоии*

$$E_n(0) = E_{0n},\ \ E_{0n} \to E_0 \ \ в \ \ L^2{}_{(\Omega)} \ \ при \ \ n \to \infty,$$
$$H_n(0) = H_{0n},\ \ H_{0n} \to H_0 \ \ в \ \ L^2{}_{(\Omega)} \ \ при \ \ n \to \infty.$$

истифода гардидааст.

Дар ин теорема ғайр аз ин маҳдуд будани ҳалли умумикардашуда нишон дода шудааст.

$$H_n \ \ дар \ \ L^\infty\left(O,T; L^2{}_{(\Omega)}\right) \cap L^\alpha\left(O,T; L^\alpha(\Omega)\right),$$
$$E_n \ \ дар \ \ L^\infty\left(O,T; L^2{}_{(\Omega)}\right) \cap L^p\left(O,T; L^p(\Omega)\right)$$

Ҳамин тавр, мавҷудияти ҳалли умумикардашуда ва маҳдуд будани ин ҳалҳо нишон дода шудааст.

Key words*: theorem, vector functions, a priori estimate, initial conditions boundary value problems, constituent equations, generalized solutions, nonlinear Granwall - Belmann inequalities.*

Initially, a lemma was proved in the paper that for-positive constants, is a continuous and positive function having continuous positive derivatives of the first order for and, in addition, for

$$c_1|E|^P \le J(E)E \le c_2|E|^P\ ,\ P \ge 2,\ c_1, c_2 = const$$
$$c_3|H|^\alpha \le \mu(|H|)H \le c_4|H|^\alpha\ ,\ 1 < \alpha < \infty,\ c_3, c_4\ = const$$
$$\left(J(E_1) - J(E_2), E_1 - E_2\right) \ge 0, \forall E_1, E_2 \in L^P(\Omega),$$
$$\left(\mu((|H_1|)H_1 - \mu(|H_2|)H_2, H_1 - H_2\right) \ge 0,\ \forall H_1, H_2 \in L^\alpha(\Omega)$$

then for the above mentioned boundary value problem the a priori estimate

$$\varepsilon\|E(t)\|^2 + \mu\|H(t)\|^2 + \tilde{c}_1\int_0^t \|E(\tau)\|^P_{L^P(\Omega)} d\tau + \tilde{c}_2\int_0^t \|H(\tau)\|^\alpha_{L^\alpha(\Omega)} d\tau \le const$$ *,where $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, c - is determined by the data of the problem: $\psi(0)$, $\|E_0\|^2$, $\|H_0\|^2$, $\int_0^T \|J_{ct.}(t)\|\, dt$ and the domain Ω.*

To prove the lemma, we use the nonlinear Granwall - Belmann inequalities. Also given by a generalized solution of the above specified system satisfying the boundary and initial conditions. In the course of solving the problems, approximate solutions were used

$$H_n(t) = \sum_{j=1}^n C_{jn}(t)\omega_j(x)$$
$$E_n(t) = \sum_{j=1}^n d_{jn}(t)\varphi_j(x)$$

where $C_{jn}(t)$, $d_{jn}(t)$ is defined from the equation itself. To determine $C_{jn}(t)$, $d_{jn}(t)$ - given the initial conditions

$$E_n(0) = E_{0n},\ \ E_{0n} \to E_0 \quad in \quad L^2{}_{(\Omega)} \quad as\ n \to \infty,$$
$$H_n(0) = H_{0n},\ \ H_{0n} \to H_0 \quad in \quad L^2{}_{(\Omega)} \quad as\ n \to \infty.$$

This theorem proves the boundedness

$$H_n \ \ в\ \ L^\infty\left(0,T; L^2{}_{(\Omega)}\right) \cap L^\alpha\left(0,T; L^\alpha(\Omega)\right),$$
$$E_n \ \ в\ \ L^\infty\left(0,T; L^2{}_{(\Omega)}\right) \cap L^p\left(0,T; L^p(\Omega)\right)$$

Thus, the existence and boundedness of solutions are proved.

Рассмотрим материальные уравнения поля вида

$$B(H) = \mu H + \int_0^t \psi(t-\tau)\mu(\|H(\tau)\|)H(\tau)d\tau,$$
$$D(E) = \varepsilon E\ ,\ \ J(E) = \sigma(|E|)E \tag{1}$$

Требуется найти вектор-функции $E = \{E_1(x,t),\ E_2(x,t),\ E_3(x,t)\}$ и $H = \{H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнениям

$$rotH = \frac{\partial D(E)}{\partial t} + J(E) + J_{\text{ст.}}(x,t), \tag{2}$$
$$rotE = -\frac{\partial B(H)}{dt}, \tag{3}$$
$$divD(E) = 0, \tag{4}$$
$$divB(H) = 0 \tag{5}$$

граничному условию $E_\tau|s = 0,$ (6)

и начальным условиям $E(x,0) = E_0(x),\ H(x,0) = H_0(x)$ (7)

с учетом материальных уравнений (1).

Предположим, что
$$\begin{gathered} c_1|E|^P \le J(E)E \le c_2|E|^P\ ,\ P \ge 2,\ c_1, c_2 = const \\ c_3|H|^\alpha \le \mu(|H|)H \le c_4|H|^\alpha\ ,\ 1 < \alpha < \infty,\ c_3, c_4\ = const \end{gathered} \tag{8}$$

Кроме того,
$$\begin{gathered} \left(J(E_1) - J(E_2),\ E_1 - E_2\right) \ge 0,\ \forall E_1, E_2 \in L^P(\Omega), \\ \left(\mu((|H_1|)H_1 - \mu(|H_2|)H_2,\ H_1 - H_2\right) \ge 0,\quad \forall H_1, H_2 \in L^\alpha(\Omega). \end{gathered} \tag{9}$$

Лемма. Если $\varepsilon, \mu, \psi(0)$ -положительные постоянные, $\psi(t-\tau)$- непрерывная и положительная функция, имеющая непрерывные положительные производные первого порядка при $t \ge \tau \ge 0$, и, кроме того, выполняются условия (8), (9) то для решения краевой задачи (2)-(5), (6)-(7) , (1) справедлива априорная оценка

$$\varepsilon\|E(t)\|^2 + \mu\|H(t)\|^2 + \tilde{c}_1\int_0^t \|E(\tau)\|^P_{L^P(\Omega)} d\tau + \tilde{c}_2\int_0^t \|H(\tau)\|^\alpha_{L^\alpha(\Omega)} d\tau \le const\ , \tag{10}$$

где ĉ1, ĉ2, с – определяется данными задачи: ψ(0), $\|E_0\|^2$, $\|H_0\|^2$, $\int_0^T \|J_{ct.}(t)\|\, dt$ и областью Ω.

Доказательство. Умножим в L^2 (Ωx]0,T[ ) уравнения (2) – (3) с учетом (1) на E и H соответственно и сложим результаты. Замечая , что

$$\int_{\Omega} ErotHdx = \int_{\Omega} HrotEdx + \int_{\Omega} H_\tau \times E_\tau ds\,, \qquad (11)$$

получим $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\varepsilon \parallel E(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \mu \parallel H(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)}\right] + \int_{\Omega} (J(E),E)dx + \psi(0)\int_{\Omega} \mu\,(|H|)H^2\; dx ==$
$-\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\int_{\Omega} \mu|\mathrm{H}(\tau)|\mathrm{H}(\tau)\mathrm{H}(t)dxd\tau - \left(J_{\text{ст.}},\mathrm{E}\right)$ (12)

Тогда из (12) в силу неравенства Коши и неравенства Юнга после несложных преобразований вытекает неравенство

$$\varepsilon \parallel E(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \mu \parallel H(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \mathrm{C}\int_0^t \|E(\tau)\|^{p}_{L^p(\Omega)}d\tau + \hat{c}\int_0^t \|H(\tau)\|^{\alpha}_{L^\alpha(\Omega)}d\tau \le$$

$$\le \int_0^t N(\tau)\|H(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau + \nu\int_0^t\int_0^\tau \bar{G}(\tau,s)\|H(s)\|^{2(\alpha-1)}_{L^{2(\alpha-1)}(\Omega)}dsd\tau + \varepsilon\|E_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+\mu\|H_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}d\tau, \qquad (13)$$

где c, ĉ, ν – означают различные константы,

$$N(t) = \int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}d\tau,\;\; G(\tau,s) = \frac{\partial\psi(\tau-s)}{\partial\tau}.$$

В силу свойства (8), (9) и нелинейных неравенств Грануолла - Белманна [20], с предположением, что $N(\tau)$ и $G(\tau,s) -$ непрерывные и неотрицательные функции при $t\ge\boldsymbol{\tau}\ge\boldsymbol{s}\ge0$ из (13) получим оценки

$$\mu \parallel H(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \le \left\{\varepsilon\|E_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|H_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}d\tau\right\}\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\; exp[\int_0^t N(\tau)d\tau + \nu\int_0^t\int_0^\tau G(\tau,s)dsd\tau],\;\left(\alpha = \frac{3}{2}\right),$$

$$\mu \parallel H(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \le\; exp\left[\int_0^t N(\tau)d\tau\{[\,\varepsilon\|E_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|H_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}d\tau\right]^{3-2\alpha} +$$

$$+(3-2\alpha)\int_0^t\int_0^\tau G(\tau,s)exp\left[(2-3\alpha)\int_0^t N(\eta)d\eta]\,dsd\tau\right\}^{\frac{1}{3-2\alpha}},\left(1 \le \alpha \le \frac{3}{2}\right),$$

$$\mu \parallel H(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \le \left\{\varepsilon\|E_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|H_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}d\tau\right\}\;\; exp[\int_0^t N(\tau)d\tau]\left\{1\right.$$

$$-(2\alpha-3)\left[\varepsilon\|E_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|H_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right.$$

$$\left.+\int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}d\tau\right]^{2\alpha-3}\int_0^t\int_0^\tau G(\tau,s)exp\left[(2-3\alpha)\int_0^\tau N(\eta)d\eta\right]dsd\tau\Bigg]^{\frac{1}{3-2\alpha}},\alpha > \frac{3}{2}$$

Возвращаясь снова к (13), получим

$$\varepsilon \parallel E(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \mu \parallel H(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \mathrm{C}\int_0^t \|E(\tau)\|^{p}_{L^p(\Omega)}d\tau + \hat{c}\int_0^t \|H(\tau)\|^{\alpha}_{L^\alpha(\Omega)}d\tau \le const \qquad (14)$$

Неравенство (14) приводит к априорным оценкам

$$\mathrm{E}\in L^\infty\left(O,T;L^2{}_{(\Omega)}\right)\cap L^{p'}\left(O,T;L^{p'}(\Omega)\right),\;\mathrm{H}\in L^\infty\left(O,T;L^2{}_{(\Omega)}\right)\cap L^{\alpha}\left(O,T;L^{\rho}(\Omega)\right), \qquad (15)$$

если предположить, что μ, ε, ψ(0) – положительные постоянные и $\psi'(t-\tau)$ – непрерывные и положительные функции при $t\ge\tau\ge0$ кроме того,

$$E_0, H_0 \in L^2{}_{(\Omega)},\;\; J_{\text{ст.}} \in L^{p'}{}_{(\Omega)}(0,\mathrm{T};\; L^{p'}(\Omega)) \qquad (16)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(5) назовем пару векторов $E\in L^{\infty}\big(O,T;L^{2}{}_{(\Omega)}\big)\cap L^{p'}\big(O,T;L^{p'}(\Omega)\big)$, $H\in L^{\infty}\big(O,T;L^{2}{}_{(\Omega)}\big)\cap L^{\alpha}\big(O,T;L^{p}(\Omega)\big)$, удовлетворяющую условиям (6), (7) и тождествам

$$\int_0^T\int_\Omega\,[-\varepsilon(E)U_t+J(E)U-HrotU+J_{\text{ст.}}U]dxdt=\varepsilon\int_\Omega E_0U(x,0)dx, \tag{17}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\,[B(H)V_t+ErotV]dxdt=\mu\int_\Omega H_0V(x,0)dx,$$

при любых

$$U\in X\cap L^{2}{}_{(\Omega)},\quad V\in Y\cap L^{\alpha}{}_{(\Omega)},\ U(x,T)=0,\ V(x,T)=0.$$

Теорема. Предположим, что $\varepsilon,\mu,\ \psi(0)-$ положительное постоянные, ψ(t-τ) – непрерывные и положительные функции, имеющие непрерывные положительные производные первого порядка при t≥τ≥0 и, кроме того, пусть выполнены условия (8), (9), (16).

Тогда задача (1)-(7) имеет в Q обобщенное решение в смысле выполнения интегрального тождества (17).

Доказательство. Будем искать приближенное решение задачи (1) – (7) в виде [5]

$$H_n(\mathrm{t})=\sum_{j=1}^{n}C_{jn}\,(t)\omega_j(x) \tag{18}$$
$$E_n(\mathrm{t})=\sum_{j=1}^{n}d_{jn}\,(t)\varphi_j(x)$$
$$\{\omega_j\}\in Y\cap L^{\alpha}{}_{(\Omega)},\ \{\varphi_j\}\in Y\cap L^{p}{}_{(\Omega)},$$

где $C_{jn}(t)$, $d_{jn}(t)$ определяются из уравнений

$$-\big(rotH_n,\varphi_j\big)+\Big(\frac{\partial D(E_n)}{\partial t}+J(E_n),\varphi_j\Big)+\ \big(J_{\text{ст.}},\varphi_j\big)=0 \tag{19}$$
$$\big(rotE_n,\omega_j\big)+\left(\frac{\partial B(H_n)}{dt},\omega_j\right)=0.$$

Чтобы определить из уравнений (19) функции $C_{jn}(t)$ и $d_{jn}(t)$, надо задать для них начальные условия. Эти условия мы зададим таким образом, чтобы при

$$E_n(0)=E_{0n},\quad E_{0n}\to\ E_0\ \text{ в }\ L^{2}{}_{(\Omega)}\ \text{ при }\ n\to\infty,$$
$$H_n(0)=H_{0n},\quad H_{0n}\to\ H_0\ \text{ в }\ L^{2}{}_{(\Omega)}\ \text{ при }\ n\to\infty.$$

Умножая (19) на $C_{jn}(t)$ и $d_{jn}(t)$ соответственно и суммируя по j, затем сложим результаты. Замечая (11) и учитывая (1), (6), (7), получим тождество

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\varepsilon\parallel E_n(t)\parallel_{L^2}^2\ +\mu\parallel H_n(\mathrm{t})\parallel_{L^2}^2\ \Big]+\int_\Omega J(E_n)E_n\,dx+\psi(0)\int_\Omega\mu\,(|H_n\,|)H_n{}^{\,2}\ dx$$
$$=-\int_0^t\frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\int_\Omega\ \mu|H_n(\tau)|H_n(\tau)H_n(t)dxd\tau-\Big(J_{\text{ст.,}}(t),E_n(t)\Big).$$

Из последнего тождества в силу неравенства Юнга и предположения (8) вытекают нелинейные неравенства вида

$$\varepsilon\parallel E_n(t)\parallel_{L^2(\Omega)}^2\ +\mu\parallel H_n(t)\parallel_{L^2(\Omega)}^2+\ \mathrm{C}\int_0^t\ \|E_n(\tau)\|^{\,p}_{L^p\ (\Omega)}d\tau+\quad\hat{\mathrm{c}}\int_0^t\|H(\tau)\|^{\,\alpha}_{L^\alpha\ (\Omega)}d\tau$$
$$\le\int_0^t N(\tau)\|H_n(\tau)\|^{\,2}_{L^2\ (\Omega)}d\tau+\nu\int_0^t\int_0^\tau\bar G\,(\tau,s)\|H(s)\|^{\,2(\alpha-1)}_{L^{2(\alpha-1)}\ (\Omega)}dsd\tau+\varepsilon\|E_{0n}\|^{\,2}_{L^2\ (\Omega)}$$
$$+\mu\|H_{0n}\|^{\,2}_{L^2\ (\Omega)}+\int_0^t\ \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{\,p'}_{L^{p'}\ (\Omega)}d\tau, \tag{20}$$

В силу свойства (9) и нелинейных неравенств Гроноулла-Беллмана [20] из (20) получим оценки

$$\mu\parallel H_{0n}(t)\parallel_{L^2(\Omega)}^2\le\left\{\varepsilon\|E_{0n}\|^{\,2}_{L^2\ (\Omega)}+\mu\|H_{0n}\|^{\,2}_{L^2\ (\Omega)}+\int_0^t\ \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{\,p'}_{L^{p'}\ (\Omega)}d\tau\right\}\mathrm{x}$$
$$\mathrm{x}\ exp\Big[\int_0^t N(\tau)d\tau+\nu\int_0^t\int_0^\tau\ G\,(\tau,s)dsd\tau\Big],\ \Big(\alpha=\frac{3}{2}\Big),$$

$$\mu \parallel H_n(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq exp\left[\int_0^t N(\tau)d\tau\{[\varepsilon\|E_{0n}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|H_{0n}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} d\tau\right]^{3-2\alpha} +$$

$$+ (3-2\alpha)\int_0^t\int_0^\tau G(\tau,s)exp\left[(2-3\alpha)\int_0^t N(\eta)d\eta]\,dsd\tau\right\}^{\frac{1}{3-2\alpha}},\left(1<\alpha<\frac{3}{2}\right),$$

$$\mu \parallel H_n(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \left\{\varepsilon\|E_{0n}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|H_{0n}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} d\tau\right\} exp \,*$$

$$*\,[\int_0^t N(\tau)d\tau]\left\{1\right.$$

$$-(2\alpha-3)\left[\varepsilon\|E_{0n}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|H_{0n}\|^2_{L^2(\Omega)}\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t \|J_{\text{ст.}}(\tau)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} d\tau\right]^{2\alpha-3}\int_0^t\int_0^\tau G(\tau,s)exp\left[(2-3\alpha)\int_0^\tau N(\eta)d\eta\right]dsd\tau\right]^{\frac{1}{3-2\alpha}},\ \alpha>\frac{3}{2}$$

для всех $t\in[0;T]$

Возвращаясь снова к (20), получим

$$\varepsilon \parallel E_n(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \mu \parallel H_n(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|E_n(\tau)\|^p_{L^p(\Omega)}d\tau + \hat{c}\int_0^t\|H(\tau)\|^\alpha_{L^\alpha(\Omega)}d\tau \leq const \quad (21)$$

Отсюда следует, что $t_n=T$, неравенство (21) означает, что при $n\to\infty$

H_n ограничена в $L^\infty(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^\alpha(O,T;L^\alpha(\Omega))$,

E_n ограничена в $L^\infty(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(O,T;L^p(\Omega))$

Известно из [4, 9], что пространства $L^\infty(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^\alpha(O,T;L^\alpha(\Omega))$ и $L^\infty(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(O,T;L^p(\Omega))$ являются сопряженными к $L^1(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^{\alpha'}(O,T;L^{\alpha'}(\Omega))$, $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}=1$ и $L^1(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^{p'}(O,T;L^{p'}(\Omega))$, соответственно, значит, из последовательностей $\{H_n\}$, $\{E_n\}$ можно извлечь подпоследовательности $\{H_k\}$, $\{B_k\}$ так, что

$H_k\to H$ слабо в $L^\infty(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^\alpha(O,T;L^\alpha(\Omega))$,

$E_k\to E$ слабо в $L^\infty(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(O,T;L^p(\Omega))$,

$J(E_k)\to\chi$ слабо в $L^{p'}(O,T;L^{p'}(\Omega))$,

$\mu(|H_k|)H_k\to\tilde{\chi}$ слабо в $L^{\alpha'}(O,T;L^{\alpha'}(\Omega))$.

Теперь переходим в (19) к пределу при $n=k\to\infty$ при фиксированном j, получим

$$-(rotH,\varphi_j) + \left(\frac{\partial D(E)}{\partial t}+\chi,\varphi_j\right) + \left(J_{\text{ст.}},\varphi_j\right) = 0 \quad (22)$$

$$(rotE,\omega_j) + \left(\mu\frac{\partial H}{\partial t} + \psi(0)\tilde{\chi} + \int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\tilde{\chi}(\tau)d\tau,\omega_j\right) = 0, \forall j.$$

Так как система $\{\varphi_j\}$ плотна в $X\cap L^p(\Omega)$ и $\{\omega_j\}$ плотна в $Y\cap L^\alpha(\Omega)$, то (22) имеет место для любых функций $U,V\in L^2(\Omega)$

$$-(rotH,U) + \left(\frac{\partial D(E)}{\partial t}+U\right) + (\chi,U) + \left(J_{\text{ст.}},U\right) = 0, \quad (23)$$

$$(rotE,V) + \left(\mu\frac{\partial H}{\partial t} + \psi(0)\tilde{\chi} + \int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\tilde{\chi}(\tau)d\tau,V\right) = 0.$$

Итак мы докажем существование решения, если покажем, что

$$\chi=J(E),\quad \tilde{\chi}=\mu(|H|)H, \quad (24)$$

В силу монотонности $J(E)$ и $\mu(|H|)H$ следует, что

$X_k=\int_0^T(J((E_k)) - J(\tilde{E}(t)),\ E_k(t)-\tilde{E}_k(t))dt \geq 0,\quad \forall\tilde{E}\in L^p(0,T;L^p(\Omega))$.

$Y_k=\int_0^T(\mu(|H_k(t)|)H_k(t) - \mu(|\tilde{H}(t)|\tilde{H}(t)),\ H_k(t)-\tilde{H}(t))dt \geq 0, \forall\tilde{H}\in L^\alpha(0,T;L^2(\Omega))$.

Согласно (19)

$$\int_0^T (J\Big((E_k)), E_k)dt + \psi(0)\int_0^T (\mu(|H_k|)\, H_k\,,\, H_k\,) + \int_0^T [\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\,(\mu|H_k(\tau)|)\, H_k(\tau),\,)\, H_k(\tau)d\tau]dt$$

$$= -\int_0^T (J_{CT.}, E_k)dt - \frac{1}{2}\,[\mu\|\, H_k(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\, E_k(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \mu\|\, H_{0k}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$- \varepsilon\|\, E_{0k}\|^2_{L^2(\Omega)}\,], \Big)$$

или, следовательно,

$$X_k + \psi(0)Y_k = -\int_0^T (J_{CT.}, E_k)dt + \frac{1}{2}[\mu\|\, H_{0k}\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|\, E_{0k}\|^2_{L^2(\Omega)} - \mu\|\, H_k(T)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$\varepsilon\|\, E_k(T)\|^2_{L^2(\Omega)}] - \int_0^T [\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}\,(\mu|H_k(\tau)|)\, H_k(\tau),\quad H_k(\tau)d\tau]dt - \int_0^T (J(E_k(t)), \tilde{E}\,(t)dt -$$

$$-\int_0^T ((J(E_k(t)), \tilde{E}\,(t)dt - \int_0^T \left(J\left(\tilde{E}\,(t)\right), E_k - \tilde{E}\,\right)dt - \psi(0)\int_0^T (\mu(|\widetilde{H}|)\widetilde{H},\quad H_k - \widetilde{H})dt.$$

Так как $H_k(t) \to)\, H\,(t)$ в $L^2{}_{(\Omega)}$ слабо, $E_k(t) \to)\, E\,(t)$ в $L^2{}_{(\Omega)}$ слабо, поскольку

$$\liminf[\mu\|\, H_k(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\, E_k(T)\|^2_{L^2(\Omega)}] \geq \left[\mu\|\, H\,(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\, E\,(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\right],$$

$$\liminf\{\int_0^T [\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}(\mu|H_k(\tau)|)\, H_k(\tau),\, H_k(\tau)d\tau]dt\} \geq$$

$$\geq \int_0^T [\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}(\mu|H_k(\tau)|)\, H_k(\tau),\, H_k(\tau)d\tau]dt,$$

откуда

$$0 \leq \lim sup\{X_k + \psi(0)Y_k\} \leq -\int_0^T (J_{CT.}, E\,)dt + \frac{1}{2}[\mu\|\, H_0\,\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|\, E_0\,\|^2_{L^2(\Omega)} - -\Big[\mu\|\, H\,(T)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$\varepsilon\|\, E\,(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] - \int_0^T [\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}(\,\tilde{\chi})\, H\,(\tau),\, H_k(\tau))d\tau]dt\; -$$

$$-\int_0^T (\chi, \tilde{E})dt - \int_0^T \left(J(\tilde{E}), E - \tilde{E}\right)dt - \psi(0)\int_0^T (\chi, \widetilde{H})dt - \psi(0)\int_0^T (\mu(|\widetilde{H}|)\widetilde{H},\quad H_k - \widetilde{H})dt.$$

Из (23) мы можем заключить, что

$$\int_0^T (J_{CT.}, E\,)dt + \frac{1}{2}[\mu\|\, H_0\,\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|\, E_0\,\|^2_{L^2(\Omega)}] - \left[\mu\|\, H\,(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\, E\,(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] -$$

$$-\int_0^T [\int_0^t \frac{\partial\psi(t-\tau)}{\partial t}(\,\tilde{\chi})\, H\,(\tau),\, H_k(\tau))d\tau]dt\; - \int_0^T (\chi, E)dt - \psi(0)\int_0^T \left(\chi, \widetilde{H}\right)dt. \qquad (25)$$

Но из (24) в силу (25) следует, что

$$\int_0^T (\chi - J(\tilde{E}), E - \tilde{E})dt + \psi(0)\int_0^T (\tilde{\chi}\; - \mu(|\widetilde{H}|)\widetilde{H},\, H - \widetilde{H})dt \geq 0. \qquad (26)$$

Теперь мы используем семенепрерывность для доказательства того, что из (26) следует (24) [8]. Положим $\tilde{E} = E - \lambda w$, $\widetilde{H} = H - H\widetilde{\overline{w}}$, $\lambda > 0, w \in L^p\left(0,T;\; L^p{}_{(\Omega)}\right)$,
$\overline{w} \in L^\alpha\left(0,T;\; L^\alpha{}_{(\Omega)}\right)$ произвольно, тогда из (26) следует, что

$$\lambda\int_0^T (\chi - J(E - \lambda\omega), \omega)dt + \lambda\psi(0)\int_0^T (\tilde{\chi}\; - \mu(\,|H - \lambda\overline{\omega}|)(H - \lambda\overline{\omega}), \overline{\omega})dt \geq 0$$

откуда

$$\int_0^T (\chi - J(E - \lambda\omega), \omega)dt + \psi(0)\int_0^T (\tilde{\chi} - \mu(|H - \lambda\overline{\omega}|)(H - \lambda\overline{\omega}), \overline{\omega})dt \geq 0, \forall\omega, \overline{\omega}.$$

Следовательно, χ=J(E), $\tilde{\chi} = \mu(|H|)H$.

Замечание. Обобщенные решения начально-краевой задачи (2),(5), (6),(7) также существуют, если материальные уравнения поля имеют вид D(E)=$\varepsilon E+\int_0^t \varphi(t-\tau)\varepsilon(|E|)E(\tau)d\tau,\ J(E)=\sigma(|E|)E,\ B(H)=\mu H$,
и удовлетворяют условиям H$\in L^{\infty}\big(O,T;L^2{}_{(\Omega)}\big)$, E$\in L^{\infty}\big(O,T;L^2{}_{(\Omega)}\big)\cap V$, V=$L^p\big(O,T;L^p{}_{(\Omega)}\big)\cap L^{\alpha'}\big(O,T;L^{\alpha'}{}_{(\Omega)}\big)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Березовский А.А., Кравченко А.Н. О нелинейных краевых задачах электромагнитного поля. – Киев: изд-во АН УССР, 1963. – 72с.
2. Березовский А.А. О некоторых нелинейных краевых задачах математической физики.-В кн.: Прикладная математика и математическая физика. – М.: Наука,- 1966.- С.186-199.
3. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики.: В 2-х т.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. чЛ .- 444с.
4. Дюво Г., Лионс Ж.-П. Неравенства в механике и физике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1980. -382 с.
5. Курбанов И. Существование электромагнитного поля в пластине с памятью // Методы исследования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 46-50.
6. Курбанов И. О разрешимости нелинейных краевых задач электродинамики с общими материальными уравнениями // Нелинейные проблемы теории дифференциальных уравнений. Киев: - Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 31-41.
7. Курбанов И., Турдиев Б.К. О разрешимости нелинейных краевых задач электродинамики с памятью // Ирфон «Исследования по теории дифференциальных и интегральных уравнений» (серия естественных наук). - Курган-Тюбе, 2002 - №8. – С.31-42.
8. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир. – 1972. – 587 с.
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложениях. – М. : Мир, - 1971. – 371 с.
10. Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – Киев. думка, 1989. – 271 с.
11. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 493 с.
12. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. – М.: Наука, 1967. – 458 с.
13. Нетребко В.П., Лучников М.А. Метод последовательных приближений в задачах нелинейной теории вязкоупругости // Прикл. мех. 1981.-т.17.-№3.-с.23-30.
14. Плотницкий Т.А. О разрешимости некоторых задач электродинамики проводящих сред // Линейные краевые задачи математической физики. –Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1973. – С.52-68.
15. Плотницкий Т.А. О разрешимости нелинейных краевых задач электродинамики проводящих сред // нелинейные краевые задачи электродинамики проводящих сред. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С.139-148.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 569 с.
17. Трикоми К. Дж. Интегральные уравнения. -М.: Из-во иностр. лит., 1960. – 297 с.
18. Улитко А.Ф. О некоторых особенностях постановки задач электроупругости //Современные проблемы механики и авиации. – М.: Машиностроение, 1982. – С.290-300.
19. Фикера Г. Теорема существования в теории упругости. – М.: Мир. – 1974. – 159 с.
20. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория колебания линейных упругих сред. – Ташкент: Фан. – 236 с.

REFERENCES

1. Berezovsky A.A., Kravchenko A.N. On nonlinear boundary value problems of the electromagnetic field. -Kiev: publishing house of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1963. -72s.
2. Berezovsky A.A. On some nonlinear boundary value problems of mathematical physics.-In the book: Applied mathematics and mathematical physics, Moscow: Nauka.- 1966.-p.186-199.
3. Berezovsky A.A. Lectures on nonlinear boundary value problems of mathematical physics.: In 2 volumes-Kiev: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1974. Part-444s.
4. Duveau G., Lyons J.-P. Inequalities in mechanics and physics. - M .: Publishing house of foreign. lit., 1980. -382s.
5. Kurbanov I. Existence of an electromagnetic field in a plate with memory // Methods of research of differential and functional-differential equations. - Kiev: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1990. - 46-50.

6. Kurbanov I. On the solvability of nonlinear boundary value problems of electrodynamics with general material equations // Nonlinear problems of the theory of differential equations. Kiev: - Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1991. - p. 31-41.
7. Kurbanov I., Turdiev B.K. On the solvability of nonlinear boundary value problems in electrodynamics with memory // Irfon "Research on the theory of differential and integral equations" (series of natural sciences). No. 8. Kurgan-Tyube, 2002, pp. 31-42.
8. Lyons J.-L. Some methods for solving nonlinear boundary value problems. - M .: Mir. - 1972 .-- 587s.
9. Lyons J.-L., Magenes E. Inhomogeneous boundary value problems and their applications.-M .: Mir.- 1971.-371s.
10. Martynyuk AA, Lakshmikantam V., Leela S. Stability of motion: the method of integral inequalities.-Kiev. dumka, 1989.-271s.
11. Sobolev S.L. Equations of Mathematical Physics, Moscow: Nauka, 1966, 493p.
12. Nikolsky V.V. Variational methods for internal problems of electrodynamics. - M .: Nauka, 1967.- 458s.
13. Netrebko V.P., Luchnikov M.A. The method of successive approximations in problems of the nonlinear theory of viscoelasticity // Prikl. fur. 1981.-t.17.-No.3.-p.23-30.
14. Plotnitsky T.A. On the solvability of some problems in the electrodynamics of conducting media // Linear boundary value problems of mathematical physics. –Kiev: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.-1973.-p.52-68.
15. Plotnitsky T.A. On the solvability of nonlinear boundary value problems in the electrodynamics of conducting media // Nonlinear boundary value problems in the electrodynamics of conducting media. - Kiev: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.-1976.-p.139-148.
16. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of Mathematical Physics.- Moscow: Nauka, 1966.-569p.
17. Tricomi K.J. Integral equations. –M .: From foreign. lit., 1960.-297s.
18. Ulitko A.F. On some features of the formulation of problems of electroelasticity // Modern problems of mechanics and aviation. –M .: Mechanical engineering, 1982.-p. 290-300
19. Fickera G. Existence theorem in elasticity theory. –M .: Mir.-1974.-159s.
20. Filatov A.N., Sharova L.V. Integral inequalities and the theory of oscillations of linear elastic media. - Tashkent: Fan. - 236p.