УДК – 517.9
ББК -22.311

ДЕЛТА ФУНКСИЯИ ДИРАК ВА БАЪЗЕ ТАТБИҚҲОИ ОН.

Воситова Дилором Абдурасуловна *– дотсенти кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинов МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: vositova.dilorom@mail.ru*
Зоидова Манижа Илҳомҷоновна *– омӯзгори кафедраи анализи математикӣ ба номи профессор А. Мӯҳсинов МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд), e–mail: manija.zoidova@mail.ru*
Умедзода Фархунда *–магистранти соли 2 – юм, ихтисоси математика МДТ "ДДХ ба номи академик Б. Ғафуров" (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Хуҷанд)*

ДЕЛЬТА ФУНЦИЯ ДИРАКА И НЕКОТОРЫЕ ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

Воситова Дилором Абдурасуловна *–доцент кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail: vositova.dilorom@mail.ru*
Зоидова Манижа Илхомжоновна *– преподаватель кафедры математического анализа имени профессора А.Мухсинова ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, Худжанд), e–mail:manija.zoidova@mail.ru*
Умедзода Фархунда *– магистрант 2-го года обучения, специальности "математика", ГОУ "ХГУ имени академика Б.Гафурова" (Республика Таджикистан, Худжанд)*

DIRAC DELTA FUNCTION AND SOME OF ITS APPLICATIONS

Vositova Dilorom Abdurasulovna *– Dotsent of the Department of Mathematical Analysis named after Professor A.Mukhsinov State Educational Instituon "KhSU named after academician B. Gafurov" (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: vositova.dilorom@mail.ru*
Zoidova Manizha Ilhomjonovna *– Teacher of the Department of Mathematical Analysis named after Professor A.Mukhsinov State Educational Instituon "KhSU named after academician B. Gafurov" (Tajikistan Republic, Khujand), e–mail: manija.zoidova@mail.ru*
Umedzoda Farhunda *– 2-nd year Undergraduate Student, Specialty Mathematician State Educational Instituon "KhSU named after academician B. Gafurov (Tajikistan Republic, Khujand)*

Вожаҳои калидӣ: *делта функсия, функсияи умумикардашуда, қувва, ҳаракат, импулс, масса, график.*

Дар кори мазкур функсияи умумикардашудаи аз тарафи физики англис Морис Дирак дохил карда шуда, дида мешавад. Ин функсия барои омӯхтани ҳаракати зарачаҳои атом татбиқ карда шуда буд. Дар мақола хосиятҳои асосии делта функсия омӯхта шуда, натиҷаҳои он барои ҳалли масъалаҳои математика ва физика татбиқ карда мешавад.

Ключевые слова: *дельта функция, обобщённая функция, сила, движение, импульс, масса, график.*

В данной работе рассматривается обобщённая функция, которая была введена английским физиком Морисом Дираком. Она была применена для изучения движения атомных частиц. В статье обсуждаются основные свойства дельта функции и применение этих свойств к задачам математики и физики.

Key words: *delta function, generalized function, force, movement, impulse, mass, graph.*

In this paper, a generalized function is considered, which was introduced by the English physicist Maurice Dirac. It has been used to study the movements of atomic particles. The article examines the main properties of the delta function and the application of these properties to problems of mathematics and physics.

I.Делта функсия аз тарафи физик – теоретикӣ англис Пол Андриан Морис Дирак кашф карда шуд. Дар китоби “Принципы квантовой механики” Дирак функсияи навро истифода мебарад ва ин функсияро ба $\delta(x)$ (делта функсия) ишорат мекунад. Бо ёрии ин функсия Дирак ҳаракатҳо электронҳоро дар майдонҳои электрикӣ ва магнитӣ бо суръати калон, наздик ба сураъти рӯшноӣ татқиқ мекунад. Делта функсияҳо масалан дар натиҷаи таъсири қувваҳои калони импулсӣ, ҷойгиршавии массаи воҳидӣ дар нуқта (зичигии масса) ва дигар ҳолатҳо пайдо шуда, дар ин ҳолатҳо истифода бурда мешавад. Делта функсияро бо намуди зерин навиштан мумкин

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & агар \quad x\neq 0\\ \infty, & агар \quad x=0\end{cases} \quad (1 \tag{1}$$

ва

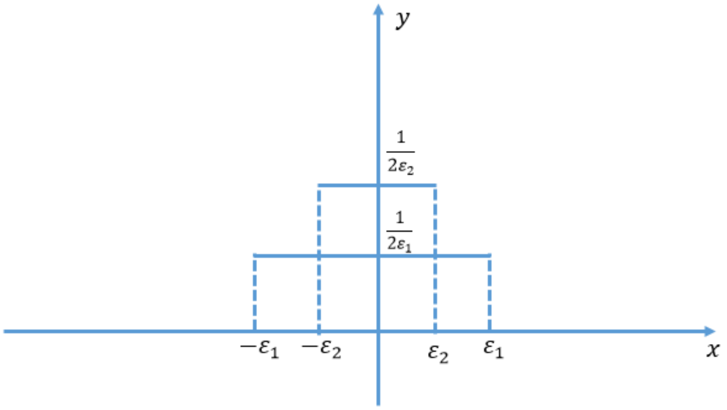
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{2}$$

Фарз мекунем, ки ягон массаи воҳидӣ $(m=1)$ дар нуқтаи $x=0$ ҷойгир карда шудааст. Он гоҳ зичигӣ $\rho(x)=\infty$, агар $x=0$, $\rho(x)=0$ агар $x\neq 0$ ва миқдори масса ба $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx=1$ баробар мебошад.

(Эзоҳ: ҳаргуна ҷисм дар ҳар як нуқтаи x - и он зичигии $\rho(x)$ - ро дорад. Зичигӣ дар нуқтаи $x=0$ ҷойгир шуда, ин суммаи ҳама зичигиҳо, яъне $\rho(0)=\sum\rho(x)=\infty$ баробар аст).

Функсияи $\delta(x)$ - ро бо ёрии график чунин ифода намудан мумкин аст. (қайд менамоем, ки ин ифодакунӣ ягона не) расм 1 функсияи додашуда, функсияи зинагӣ мебошад, яъне

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & x\in(-\varepsilon,\varepsilon)\\ 0, & |x|\geq\varepsilon\end{cases}.$$



Агар $\varepsilon \to 0$ бошад, интервали $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ ба нуқта $x=0$ майл мекунад. Аммо барои ҳама қиматҳои ε ва x $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$, яъне масоҳати чоркунҷаҳо як хел ба 1 баробар шуданаш лозим аст. Он гоҳ $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)=\delta(0)=\infty$ ва $x\neq 0$ бошад $\delta(x)=0$ мебошад. Функсияи $\delta(x)$ - ро бо дигар функсияҳо, аз ҷумла бо ёрии ҳудуди функсияҳои бефосила ифода намудан мумкин аст. Масалан функсияи

$$\delta_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{2},\ агар\quad x\in\left[-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right]\\ 0,\quad агар\quad |x|>\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

ба делта монанд функсия аст, чунки $\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)=\delta(x)$ ва $\int\delta(x)dx=1$ мебошад.

Таърифи делта функсия бо ёрии (1) ва хосияти (2) – и он аз хосиятҳои функсияҳои дар анализи математикӣ, назарияи функсияҳо омӯхта мешавад, умуман аз функсияҳо ба мо маълум аст фарқ мекунад, яъне дар байни функсияҳои одӣ функсияҳои ба делта монанд мавҷуд намебошад. Аз нуқтаи назари математикӣ ин гуна функсияҳои ғайри одии ба делта функсия монанд якумин бор олимҳои бузургӣ иттифоқи Шӯравӣ академик С.Л. Соболев, профессор Гелфанд И.М. ва математики франсавӣ Л.Швартс омӯхтан ва бисёр натиҷаҳои оламшумур соҳиб шуданд.

Делта функсияи Диракро бо ёрии формулаи зерин дохил намудан ҳам мумкин аст

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(a) \tag{3}$$

Азбаски $\delta(x)=0$, $x\neq 0$ аст, қимати интеграл барои қиматҳои $x\neq 0$ аз функсияи $\varphi(x)$ вобаста намебошад. Дар ҳолати $x=0$, функсияҳои ба делта монанд ба $\delta(x)$ майл мекунад ва $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$ аст. Он гоҳ дар ҳақиқат, аз (2) $\Rightarrow$ $\varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=\varphi(0)$ ва $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$ аст. Бо якчанд хосиятҳои делта функсияро қайд менамоем. Бо ёрии ивази тағйирёбандаҳо

$$\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\ ,\end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)dx=1 \text{ ва } \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\varphi(x)dx=\varphi(a)$$

- ҳоро ҳосил мекунем. Функсияи $\delta(x-a)$ - ро кӯчиши функсияи $\delta(x)$ ба нуқтаи $x=a$ меноманд.

Аз расми 1 дида мешавад, ки графики функсияи $b\delta(x)$ нисбат ба графики $\delta(x)$ b - баробар баландтар,дар $\delta(cx)$ бошад $(c>1)$ аргументи $\delta(x)$ аз фосилаи $\left(-\dfrac{1}{c\varepsilon},\ \dfrac{1}{c-x}\right)$ қимат мегирад. Ҳамин тавр

$$\int_{-\infty}^{\infty}b\,\delta(x)\varphi(x)dx=b\varphi(0),\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(c\cdot x)\varphi(x)dx=\frac{1}{|c|}\varphi(0)$$

аст. Аз (2) маълум мешавад, ки $\delta(-x)=\delta(x)$, чунки $\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx$ ва

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-x)\varphi(x)dx=\begin{Bmatrix}-x=t\\ t_1=\infty,\ t_2=-\infty\end{Bmatrix}=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(t)\varphi(-t)d(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(-t)dt=\varphi(0) \text{ аст.}$$

II.Функсияҳои умумикардашуда. Функсияи асосӣ гуфта ҳаргуна функсияи ҳақиқии $\varphi(x)$ -ро меноманд, ки он:

1)функсияи $\varphi(x)$ дар $(-\infty,\ \infty)$ аниқ карда шудааст.

2)дилхоҳ тартиби ҳосилаҳоро дорад.

3)функсияи финит аст, яъне барои ҳар як функсияи $\varphi(x)$ фосилаи охирнок мавҷуд аст, ки берун аз ин фосила қимати функсия ба сифр баробар мебошад.

Маҷмӯи ҳама функсияҳои асосӣ фазои хаттиро ташкил медиҳад, ки онро бо D ишорат мекунем. Пайдарпаии $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ функсияҳои фазои D ба сифр майл мекунад, агар

а) барои ҳама функсияҳои $\varphi_k(x)$ сегменти $[a,\ b]$ мавҷуд бошад, ки $\varphi_k(x)=0$ агар $x\notin[a,\ b]$

б) $\varphi_k^{(n)}(x)\Rightarrow 0,\quad n=0,1,2,...$ ва $k\to\infty$ бошад. $\left(\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=0\right)$ агар $\{\varphi_k-\varphi\}\to 0$ бошад, он гоҳ $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)$ мебошад.

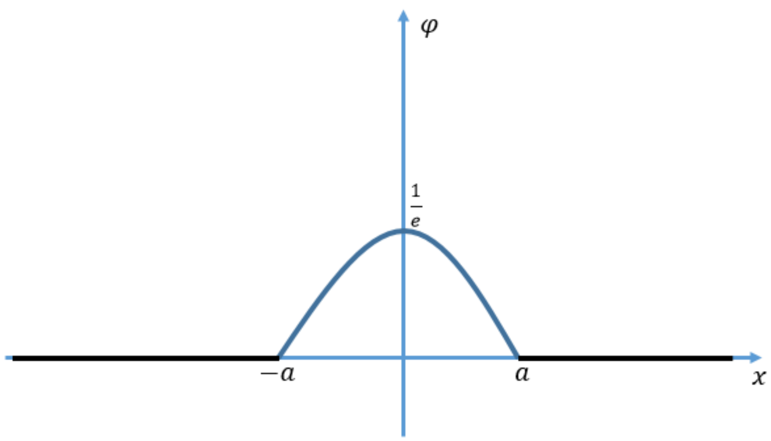
Амалҳои суммаи элементҳо, зарби элемент ба скаляр, зарби элементи фазои D ба дилхоҳ функсияи ҳосилаҳои тартиби дилхоҳ дошта, амалҳои нисбат ба наздикшаваии фазои D бефосила мебошад, яъне агар $\varphi_k\to\varphi,\psi_k\to\psi$ ва $\alpha,\beta\in R$ бошад, он гоҳ $\alpha\varphi_k+\beta\psi_k\to\alpha\varphi+\beta\psi$, бағайр аз ин $\forall\varphi_k(x)\in D$ ва $g(x)\in C^{\infty}$ $\{\varphi_k g\}\to\varphi g$ аст.

Мисоли 1. Функсияи

$$\varphi(x,\ a)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x|<a \\ 0, & |x|\geq a \end{cases} \tag{5}$$

мисоли функсияи асосӣ шуда метавонад.

Ин функсия ягона нуқтаи критикии $x=0$ -ро дорад ва $\max\varphi(x,\ a)=\dfrac{1}{e}$ аст. Исбот кардан мумкин аст, ки $\varphi(x,\ a)\in D$, яъне $\varphi(x)$ дар $(-\infty,\ \infty)$ бефосила ва $\varphi\in C^{\infty}$ (2, с.12-13) расми 2



Таърифи 1. Функсионали хаттӣ бефосилаи $f:D\to R$ функсияи умумикардашуда номида шуда, маҷмӯи ҳама функсияҳои умумикардашуда бо D' ишорат карда мешавад.

Агар функсионали $f:D\to R$ -ро ба намуди зерин

$$f(\varphi)=(f,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx \tag{6}$$

навишта тавонем, он гоҳ ин хел функсияи умумикардашуда регулярӣ, дар ҳолати баръакс функсияи сингулярӣ номида мешавад.

Қайд менамоем, ки барои ҳар як функсияи муқаррари $f(x)$, (яъне функсияи ҳақиқӣ дар $(-\infty, \infty)$, ҳар як фосилаи охирноки $[a, b]$ интерали Лебеги он мавҷуд аст) дар фазои D' функсионали хаттии бефосила

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

мувофиқ меояд. Ҳамин тавр, маҷмӯи ҳама функсияҳои муқаррар як қисми фазои D' мебошад. Нишон додан мумкин аст, ки функсионали $\delta(\varphi) = \varphi(0), \quad \varphi(x) \in D$ - ро ба намуди (5) – оварда намешавад, яъне делта функсияи $\delta(x)$ функсияи умумикардашудаи сингулярӣ аст. (2, с.14-15)

Бо ёрии формулаи зерин ҳосилаҳои функсияи умумикардашуда дохил карда мешавад. $(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \ (f'', \varphi) = -(f', \varphi') = (f, \varphi'')$ ва ғайра

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad n = 1, 2, ... \tag{7}$$

(Эзоҳ: дар ҳолати агар функсияи $f(x)$ функсияи муқаррар бошад, он гоҳ $(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi')$ аст).

III.Татбиқҳои делта функсия дар анализ. Омӯхтани баъзе хосиятҳои делта функсияро давом медиҳем.

а)барои функсияи муқаррари

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x| \le \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Исбот мекунем, ки $\lim_{\varepsilon \to +0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x)$ аст. Дар ҳақиқат, агар $\varphi(x) \in D$ бошад $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \dfrac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)dx = \varphi(0) + 0(1)$, дар ин ҷо $\varphi(0)$ қимати миёнаи функсияи $\varphi(x)$ дар $[-\varepsilon, \ \varepsilon]$, он гоҳ $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$

Бигзор функсияи Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

дода шавад.

б) татбиқ дар анализ. $\theta'(x) = \delta(x)$ аст

Дар ҳақиқат, барои $\forall \varphi \in D$ - функсияи асосӣ аз рӯи формулаи ҳосилаи функсияи умумикардашуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)\varphi(x)dx = \theta(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0)$$

аст, яъне $\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$.

Мисоли 2. Бигзор функсияи $f(x)$ дар нимтирҳои $x < a$ ва $x > a$ бефосила дифференсиронидашаванда буда, дар нуқта $x = a$ каниш охирнок дорад. Он гоҳ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{a}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{кисм ба кисм} \\ \text{интегронида} \end{matrix} \right\} = -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{a}^{\infty} +$$

$$+ \int_{a}^{\infty} \{f_0'(x)\}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{f_0'(x)\}\varphi(x)dx + [f(a+0) - f(a-0)]\varphi(a) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{f_0'(x)\}\varphi(x)dx + A\varphi(a) = \{f_0'(x)\} + A\delta(x-a),$$

дар ин ҷо $\{f_0'(x)\}$ ҳосилаи оддии функсияи $f(x)$ дар ҳар як нимтирҳо мебошад. Масалан ҳосилаи функсияи

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & агар \quad x < 1 \\ x^2, & агар \quad x > 1 \end{cases}$$

-ро бо намуди якто ҳосила (аз нуқтаи назари функсияи умумикардашуда)

$$f'(x) = \{f_0'(x)\} + 2\delta(x-1)$$

навиштан мумкин аст, дар ин ҷо

$$\{f_0'(x)\} = \begin{cases} -2x, & x < 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

мебошад. Бо тарзи ҳамин, агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаҳои $x = h_k$, $k = \overline{1,\ n}$ каниши охирнок дорад, он гоҳ

$$f'(x) = \{f_0'(x)\}_k + \sum_{k=1}^{n} A_k \delta(x - x_k)$$

аст, ки дар ин ҷо $A_k = f(h_k + 0) - f(h_k - 0)$ ва $\{f_0'(x)\}_k$ ҳосилаҳои одии функсияи $f(x)$ дар фосилаҳои алоҳида мебошад. Исбот кардан мумкин аст, ки

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx = 2\pi\delta(x) \tag{8}$$

Дар ҳақиқат, дар табдилдиҳиҳои Фурйе

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} dx \quad \text{ва} \quad \tilde{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \tag{9}$$

Агар $f(x) = \delta(x)$ ҳисобем, он гоҳ $\tilde{f}(\alpha) = 1$ ва аз (8) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \Rightarrow$ (7).

Делта функсия дар ҳалли бисёр масъалаҳои физика аҳамияти калон дорад.

IV.Тадбиқи делта функсия дар физика.

а) аз рӯи қонуни дуюми Нютон муайян намудани қонуни ҳаракат аз қувва вобаста бо ёрии муодилаи дифференсиалии

$$ma = m\frac{d\vartheta}{dt} = F(b) \tag{10}$$

аниқ карда мешавад, дар ин ҷо $\vartheta = \dfrac{dx(t)}{dt}$ - суръати ҳаракат мебошад. Агар суръати ҳаракат $\vartheta(t_0)$ дар ягон моменти вақти t_0 дода шавад, он гоҳ аз (9)

$$\vartheta(t) = \vartheta(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t)dt \tag{11}$$

-ро ҳосил кардан мумкин аст. Аз суръати ҳаракат $\vartheta(t)$ ҳолати ҷисмро ба дилхоҳ моменти вақт t_0 бо ёрии формулаи

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vartheta(t)dt \tag{12}$$

аниқ мекунем.

б) Импулси қувва. Ҳосили зарби масса ба суръат, яъне $P=m\vartheta$ миқдори ҳаракат номида мешавад. Миқдори

$$J(t_0,\ t)=\int_{t_0}^{t}F(t)dt \tag{13}$$

импулси қувваи $F(t)$ дар вақти аз t_0 то t номида мешавад. Формулаи (12) – ро истифода барем. $m\vartheta=m\vartheta(t_0)+\int_{t_0}^{t}F(t)dt$ ё

$$P(t)-P(t_0)=J(t_0,t) \tag{14}$$

-ро ҳосил мекунем, яъне тағйирёбии миқдори ҳаракат дар муддати аз t_0 то t ба импулси қувва дар ҳамин вақт баробар мешавад. Баъзе ҳолатҳо таъсири қувва дар вақти кӯтоҳ содир карда мешавад (Масалан таъсири қувва ба шари билярдӣ). Дар ин ҳолат то таъсир ва баъд аз он миқдори қувва ба сифр баробар мебошад.

Фарз мекунем, ки $F(t)$ танҳо дар (сегменти) порчаи $\Delta=[t_1,\ t_2]$ ғайри нули аст, яъне

$$F(t)=\begin{cases}F_0, & агар\ \ t\in\Delta\\ 0, & агар\ \ t\notin\Delta\end{cases}$$

Бузургии

$$J=\int_{t_1}^{t_2}F(t)dt \tag{15}$$

импулси пурраи қувва номида мешавад. Равшан аст, ки

$$J=\int_{t_1}^{t_2}F(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt$$

аст, чунки дар фосилаҳои $(-\infty,\ t_1)$ ва $(t_2,\ \infty)$ қувва ба сифр баробар мебошад. Ҳамин тавр, агар $t_0<t_1$ ва $t>t_2$ бошад, он гоҳ $J(t_0,\ t)=\int_{t_0}^{t}F(t)dt=J$ аст ва аз формулаҳои (13) ва (14) $P(t)=P(t_0)+J$ - ро ҳосил кардан мумкин.

Аз формулаи (10) хулоса кардан мумкин аст, ки сураът баъд аз таъсири (зарби) қувва аз импулси он, яъне аз интеграл вобаста аст.

б) барои қувваҳои беохир калони дар як моменти вақти t_0 таъсир дорад, намуди конктретии $F(t)$ аҳамият надорад, чунки миқдори ҳаракат аз интеграл вобаста мебошад (ва барои ҳамин тағйир наёфтани қимати интеграл муҳим аст). Функсияҳои гуногун (қувваҳои) мавҷуд аст, ки интегралҳои онҳо дар фосилаи $(-\infty,\ \infty)$ як хел мебошанд. Агар $J=1$ - ро қабул кунем ва $\varphi(t)$ яке аз ҳамин функсияҳо бошад, он гоҳ $n\varphi(nt)=F(t)$ функсия мебошад, ки барои он $\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt=1$ аст. Масалан барои функсияҳои

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \varphi_2(t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+t^2}\ \text{ва}\ \varphi_3(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$$ интегралҳои

$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(t)dt=1,\quad (k=1,\ 2,\ 3)$ аст. Он гоҳ $F(t)=n\varphi_k(nt)$ - ро гирем

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} n\varphi_k(nt)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(z)dz = 1$ мебошад ва ҳудуди ҳар яке функсияҳои ба функсияи $\delta(t)$ баробар мебошад. Дар ҳақиқат,

$$\lim_{n\to\infty} n\varphi_1(nt) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+n^2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} \infty, & агар \quad x = 0 \ бошад \\ 0, & агар \quad x \neq 0 \ бошад \end{cases}$$

Нисбат ба дигар функсияҳо ҳам ин ҳудудро ҳисоб намудан мумкин аст ва барои функсияҳои $\varphi_2(t)$ ва $\varphi_3(t)$ баробарии зерин ҷой дорад.

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} n\varphi_k(nt), \quad k = 2, 3$$

Функсияи $\delta(t)$ - ро бо ёрии функсияҳои канишдор ҳам ҳосил намудан мумкин аст. Масалан барои функсияи

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & агар \quad -1 < t < 1 \\ 0, & агар \quad |t| > 1 \end{cases}$$

Функсияи $n\varphi(nt) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & агар \quad -1 < nt < 1 \\ 0, & агар \quad |nt| > 1 \end{cases}$ ё $n\varphi(nt) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & агар \quad -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \\ 0, & агар \quad |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$

-ро ҳосил намудан мумкин аст, ки $\lim\limits_{n\to\infty} n\varphi(nt) = \delta(t)$ мебошад.

Ин мисолҳо нишон медиҳад, ки делта монанд функсияҳо бисёранд.

Ҳамин тавр, масъалаи зарбаи яклаҳзагии қувваи $F(t)$ - ро ба делта функсия иваз намудан мумкин аст, яъне $F(t) \to J\delta(t-\tau)$, дар ин ҷо τ - моменти зарба, $J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)dt$ импулси қувва мебошанд. Фарз мекунем, ки $J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = 1$. Он гоҳ қонуни Нютон намуди

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d\vartheta}{dt} = \delta(t-\tau) \tag{16}$$

-ро мегирад.

Бигзор $x = 0, \ \vartheta = \frac{dx}{dt} = 0$ (агар $t = -\infty$) бошад. Он гоҳ

$$\vartheta(t) = \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{t} \delta(t-\tau)dt = \frac{1}{m}\theta(t-\tau)$$

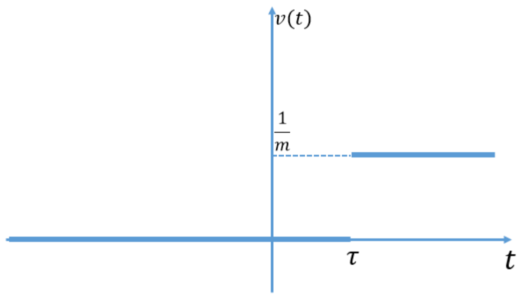
Ҳамин тавр

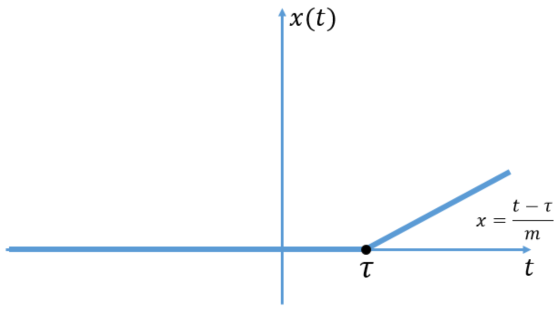
$$\vartheta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & агар \quad t < \tau \quad бошад \\ 0, & агар \quad t > \tau \quad бошад \end{cases}$$

Аз функсияи охирин интеграл гирем

$$x(t) = \begin{cases} 0, & агар \quad t < \tau \\ \frac{1}{m}(t-\tau), & агар \quad t > \tau \end{cases}$$

Графики функсияҳои $\vartheta(t)$ ва $x(t)$ - ро дар график ифода мекунем.





Аз графики функсияи $x(t)$ маълум мешавад, ки дар нуқтаи $t=\tau$ функсияи $x(t)$ дар маънои одӣ ҳосила надорад ва барои ҳамин дар муодилаи дифференсиалии (15) функсияи $\delta(t-\tau)$ иштирок дорад.

АДАБИЁТҲО

1. Я.Б.Зельдович, И.М.Яглом. Высшая математика для начинающих физиков и техников – М.: Наука, 1982, 510с.
2. Г.Е.Шилов. Математический анализ, второй специальный курс – М.: Издательства Московского университета, 1984, 201с.

REFERENCES

1. Y.B.Zeldovich, I. M. Yaglom. Higher mathematics for novice physicists and technicians – Moscow: Nauka, 1982, 510p.
2. G.E.Shilov. Mathematical analysis, the second special course – Moscow: Publishing houses of Moscow University, 1984, 201p.