01.00.00 - ИЛМҲОИ ФИЗИКАВУ МАТЕМАТИКА
01.00.00 - ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
01.00.00 - PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-МАТЕМАТИКА
01.01.00-MATHEMATICS

01.01.01 Таҳлили моддӣ, мураккаб ва функсионалӣ
01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ
01.01.01 Material, complex and functional analysis

УДК 517.5
ББК 32.973

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА В МЕТРИКЕ $C(Q),\ Q:=\{0\le x,y\le 1\}$

***Зеваршоев Умар Нуралишоевич** - преподаватель кафедры высшей математики и естественно-научных дисциплин Таджикского государственного университета коммерции (Республика Таджикистан, г.Душанбе), e-mail: umar.zevarshoev@mail.ru*

НАЗДИККУНИИ ФУНКСИЯҲОИ БЕФОСИЛАИ ДУТАҒЙИРЁБАНДА БА ВОСИТАИ СПЛАЙНҲОИ ИНТЕРПОЛЯСИОНИИ ТАРТИБИ ТОҚ ДАР МЕТРИКАИ $C(Q),\ Q:=\{0\le x,y\le 1\}$

***Зеваршоев Умар Нуралишоевич** - омӯзгори кафедраи математикаи олӣ ва фанҳои табиатшиносии Донишгоҳи давлатии тиҷорати Тоҷикистон (Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Душанбе), e-mail: umar.zevarshoev@mail.ru*

THE APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY INTERPOLATION SPLINES OF ODD ORDER IN THE METRIC $C(Q),\ Q:=\{0\le x,y\le 1\}$

***Zevarshoev Umar Nuralishoevich** - Teacher of the Department of Higher Mathematics and Natural Science Disciplines Tajik State University of Commerce (Republic of Tajikistan, Dushanbe), e-mail: umar.zevarshoev@mail.ru*

***Ключевые слова:** билинейные сплайны, выпуклый модуль непрерывности, верхние грани приближения.*

В работе для классов функций $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H^{\omega,p}(Q)$, $0<p\le 3$, $Q:=\{0\le x,y\le 1\}$, определяемых выпуклыми модулями непрерывности $\omega_1(t),\omega_2(\tau)$ и $\omega(\delta)$, найдены точные верхние грани приближения непрерывных функций билинейными интерполяционными сплайн–функциями нечётных порядков по обеим переменным в равномерной метрике.

***Калимаҳои калидӣ:** сплайнҳои бихаттӣ, модули бефосилагӣ, наздиккунии сарҳади саҳеҳи болоӣ.*

Дар мақола барои синфи фуксияҳои $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ ва $H^{\omega,p}(Q)$, $0<p\le 3$, $Q:=\{0\le x,y\le 1\}$, ки ба воситаи модулҳои бефосилагии $\omega_1(t),\omega_2(\tau)$ ва $\omega(\delta)$ дода шудаанд, сарҳади саҳеҳи болоиш наздиккунии функсияҳо бо сплайн-функсияҳои тоқ дар метрикаи мунтазам ёфта шудаанд.

***Key words**: bilinear splines, continuity modules, upper bounds for the approximation.*

In this paper, for classes of functions $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega,p}(Q)$, $0<p\le 3$, $Q:=\{0\le x,y\le 1\}$ *we difine the convex modul of continuity* $\omega_1(t),\omega_2(\tau)$ *and* $\omega(\delta)$ *and find the exact tops of approximation of continuous functions by bilinear interpolation splines-functions of odd order in both variables in the uniform metric.*

Пусть $Q:=\{0\le x,y\le 1\}$ — единичный квадрат в плоскости переменных x и y, на котором задана непрерывная функция $f(x,y)$ и система точек $M_{k,i}:=M(k/m,i/n)$, $k=\overline{0,m}$; $i=\overline{0,n}$ – фиксированные числа. Прямоугольники с вершинами в точках $M_{k,i},M_{k,i+1},M_{k+1,\,i},M_{k+1,i+1}k=\overline{0,m-1}$; $i=\overline{0,n-1}$ обозначим через Q_{ki}. Через $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ обозначим совокупность $f(x,y)$, удовлетворяющих условиям:

$$\left|f(x'',y)-f(x',y)\right|\le\omega_1\left(\left|x''-x'\right|\right),\ x',x''\in[0,1],\ y\in[0,1], \tag{1}$$

$$\left|f(x,y'')-f(x,y')\right|\le\omega_2\left(\left|y''-y'\right|\right),\ y',y''\in[0,1],\ x\in[0,1], \tag{2}$$

где $\omega_1(t)$ и

$\omega_2(\tau)$ — некоторые заданные модули непрерывности. Легко доказать, что если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условия (1) и (2) то она удовлетворяет условию

$$\left|f(x'',y'')-f(x',y')\right|\le\omega_1\left(\left|x''-x'\right|\right)+\omega_2\left(\left|y''-y'\right|\right) \tag{3}$$

и наоборот.

Через $H^{\omega,p}(Q)(0<p\le\infty)$ обозначим множество функций $f(x,y)$, определенных на Q и таких, что для любых двух точек $M':=M(x',y'),M'':=M(x'',y'')$ из Q выполняется неравенство

$$\left|f(M')-f(M'')\right|\le\omega\left[\rho_p(M',M'')\right],$$

где

$$\rho_p(M',M'')=\sqrt[p]{\left|x''-x'\right|^p+\left|y'-y''\right|^p},\quad 0<p\le\infty,$$

а $\omega(t)$ – заданный на отрезке $0\le t\le\sqrt[p]{2}$ $(0<p\le\infty)$ модуль непрерывности. Очевидно, что при $p=\infty$ расстояние

$\rho_\infty(M',M'')=\max\left\{\left|x''-x'\right|,\left|y''-y'\right|\right\}.$

Поставим в соответствие каждой функции $f(x,y)\in C(Q)$ функцию $\sigma_{m,n}(f;x,y)\in C^{(r,s)}(Q)$, $r,s\in\mathrm{N}$, определенную следующими условиями:

1) на каждом частичном прямоугольнике $Q_{k,i}:=[x_k\le x\le x_{k+1},\ y_i\le x\le y_{i+1},]$ $(k=\overline{0,m-1}$; $i=\overline{0,n-1}$;) функция $\sigma_{m,n}(f;x,y)$ есть алгебраический многочлен $2r+1$-й степени по x и $2s+1$-й степени по y; 2) $\sigma_{m,n}(f;x_k,y_i)=f(x_k,y_i)k=\overline{0,m}$; $i=\overline{0,n}$;

3) $\sigma_{m,n}^{(l,j)}(f;x_k,y_i)\equiv 0,\ l=\overline{1,r};\ j=\overline{1,s}.$

Фунции $\sigma_{m,n}(f;x,y)$ (см., например, [1] с.157-160) называют сплайн– функциями порядка $2r+1$ по x и $2s+1$ по y или просто сплайн-функциями дефекта $r+1$ по x и $s+1$ по y. Очевидно, что для $(x,y)\in Q$ имеет место легко проверяемое представление

$$\sigma_{m,n}(f;x,y)=f(x_{k-1},y_{i-1})H_r(x-x_{k-1})\cdot H_s(y-y_{i-1})+$$
$$+f(x_k,y_{i-1})H_r(x_k-x)\cdot H_s(y-y_{i-1})+f(x_{k-1},y_i)\cdot H_r(x-x_{k-1})\times$$

$$\times H_s\left(y_i-y\right)+f\left(x_k,y_i\right)\cdot H_r\left(x_k-x\right)\cdot H_s\left(y_i-y\right), \tag{4}$$

где $H_q\left(h,t\right)$ — алгебраический многочлен степени $2q+1,$ удовлетворяющий следующим условиям:

1. $H_q\left(\delta;u\right)$ строго убывает на промежутке $\left[0,\delta\right]$ от $1=H_q\left(\delta;0\right)$ до $0=H_q\left(\delta;\delta\right)$;
2. $H_q^{(l)}\left(\delta;0\right)=H_q^{(l)}\left(\delta;\delta\right)\ \left(l=1,2,\ldots,q\right)$;
3. $H_q\left(\delta;u\right)$ для $0\le u\le\delta/2$ выпукла вверх, а для $\delta/2\le u\le\delta$ выпукла вниз;
4. $H_q\left(\delta;u\right)+H_q\left(\delta;\delta-u\right)\equiv1.$

В этой статье найдены точные верхние грани уклонений сплайн–функций $\sigma_{m,n}\left(f;x,y\right)$ от функций $f\left(x,y\right)\in \mathsf{M}\left(Q\right)$, где $\mathsf{M}\left(Q\right)$ есть один из введенных классов функций $H^{\omega_1,\omega_2}\left(Q\right)$ или $H^{\omega,p}\left(Q\right), 0<p\le3$.

Сформулируем основные результаты данной статьи.

Теорема 1 *Каковы бы ни были выпуклые модули непрерывности* $\omega_1\left(t\right)$ *и* $\omega_2\left(\tau\right)$, *справедливо равенство*

$$\sup\{\| f-\sigma_{m,n}(f)\|_C : f\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\}=\omega_1\left(\frac{1}{2m}\right)+\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Теорема 2 *Если* $\omega_1\left(t\right)$ *и* $\omega_2\left(\tau\right)$ *— произвольные модули непрерывности, то для любых* $m,n\in\mathrm{N}$ *справедливы соотношения:*

$$\sup\{\| f-\sigma_{m,n}(f)\|_C : f\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\}\le\frac{3}{2}[\omega_1\left(\frac{1}{2m}\right)+\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)].$$

$$\sup_{\omega_1,\omega_2}\sup_{f\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)}\frac{\| f-\sigma_{m,n}(f)\|_C}{\omega_1(1/2m)+\omega_1(1/2n)}=\frac{3}{2}.$$

Теорема 3 *Если* $\omega\left(t\right)$ *— выпуклый модуль непрерывности, то для любых* $m,n\in\mathrm{N}$ *и любого* $p\in\left(0,3\right]$ *справедливо равенство*

$$\sup\{\| f-\sigma_{m,n}(f)\|_C : f\in H^{\omega,p}(Q)\}=\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right). \tag{5}$$

При $p>3$ существует функция $f_0\in H^{\omega,p}\left(Q\right)$, для которой соотношение (4) не имеет место, а именно

$$\| f_0-\sigma_{m,n}(f_0)\|_C>\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right).$$

Доказательства теорем 1 и 2 повторяют схемы доказательств аналогичных теорем для обычных билинейных сплайнов, приведенные в работе В.Ф.Сторчая [2], а потому мы здесь не приводим их доказательство.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\left(x,y\right)\in Q_{k,i}$ $\left(k=0,1,\ldots,m-1;\ i=0,1,\ldots,n-1\right).$ Положим $t=x-x_k;\ \tau=y-y_i;\ h=1/m;\ \eta=1/n.$ Тогда из представления (4) и явного полинома $H_q\left(\delta,u\right)$ получим

$$\sigma_{m,n}\left(f;x,y\right)=f\left(x_k,y_i\right)H_r\left(h,t\right)H_s\left(\eta,\tau\right)+f\left(x_{k+1},y_i\right)H_r\left(h,h-t\right)H_s\left(\eta,\tau\right)+$$
$$+f\left(x_k,y_{i+1}\right)\cdot H_r\left(h,t\right)\cdot H_s\left(\eta,\eta-\tau\right)+f\left(x_{k+1},y_{i+1}\right)\cdot H_r\left(h,h-t\right)H_s\left(\eta,\eta-\tau\right). \tag{6}$$

Используя третье свойство функции $H_q\left(\delta,u\right)$, запишем функцию $f\left(x,y\right)$ в виде

$$f\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)\cdot\left[H_r\left(h,t\right)+H_r\left(h,h-t\right)\right]\cdot\left[H_s\left(\eta,\tau\right)+H_s\left(\eta,\eta-\tau\right)\right]=$$
$$=f\left(x,y\right)H_r\left(h,t\right)\cdot H_s\left(\eta,\tau\right)+f\left(x,y\right)H_r\left(h,t\right)H_s\left(\eta,\eta-\tau\right)+$$

$$+f(x,y)H_r(h,h-t)H_s(\eta,\tau)+f(x,y)H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau). \qquad (7)$$

Вычитая равенство (6) почленно из (7), запишем разность

$$f(x,y)-\sigma_{m,n}(f;x,y)=\left[f(x,y)-f(x_k,y_i)\right]\cdot H_r(h,t)H_s(\eta,\tau)+$$
$$+\left[f(x,y)-f(x_{k+1},y_i)\right]\cdot H_r(h,h-t)H_s(\eta,\tau)+$$
$$+\left[f(x,y)-f(x_k,y_i)\right]\cdot H_r(h,t)H_s(\eta,\tau)+$$
$$+\left[f(x,y)-f(x_{k+1},y_{i+1})\right]\cdot H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau). \qquad (8)$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (8) и учитывая выпуклость модуля непрерывности $\omega(u)$, получаем

$$\left|f(x,y)-\sigma_{m,n}(f;x,y)\right|\le\left|f(x,y)-f(x_k,y_i)\right|\cdot H_r(h,t)H_s(\eta,\tau)+$$
$$+\left|f(x,y)-f(x_{k+1},y_i)\right|\cdot H_r(h,h-t)H_s(\eta,\tau)+$$
$$+\left|f(x,y)-f(x_k,y_{i+1})\right|\cdot H_r(h,t)H_s(\eta,\eta-\tau)+$$
$$+\left|f(x,y)-f(x_{k+1},y_{i+1})\right|\cdot H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau)+$$
$$+H_r(h,t)H_s(\eta,\tau)\omega\left(\sqrt[p]{|x-x_k|^p+|y-y_i|^p}\right)+$$
$$+H_r(h,h-t)H_s(\eta,\tau)\omega\left(\sqrt[p]{|x_{k+1}-x_k|^p+|y-y_i|^p}\right)+$$
$$+H_r(h,t)H_s(\eta,\eta-\tau)\omega\left(\sqrt[p]{|x-x_k|^p+|y_{i+1}-y_i|^p}\right)+$$
$$+H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau)\omega\left(\sqrt[p]{|x_{k+1}-x_k|^p+|y_{i+1}-y_i|^p}\right)=$$
$$=H_r(h,t)H_s(\eta,\tau)\omega\left(\sqrt[p]{(\frac{t}{m^p})^p+(\frac{\tau}{n^p})^p}\right)+$$
$$+H_r(h,h-t)H_s(\eta,\tau)\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1-t}{m}\right)^p+\left(\frac{\tau}{n}\right)^p}\right)+$$
$$+H_r(h,t)H_s(\eta,\eta-\tau)\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{t}{m}\right)^p+\left(\frac{1-\tau}{n}\right)^p}\right)+$$
$$+H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau)\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1-t}{m}\right)^p+\left(\frac{1-\tau}{n}\right)^p}\right)\le$$
$$\omega\left(\sqrt[p]{\left[tH_r(h,t)+(h-t)H_r(h,h-t)\right]^p+\left[\tau H_s(\eta,\tau)+(\eta-\tau)H_s(\eta,\eta-\tau)\right]^p}\right). \qquad (9)$$

В работе [3] доказано, что функции

$$\varphi_1(h,t)=tH_r(h,t)+(h-t)H_r(h,h-t),$$
$$\varphi_2(\eta,\tau)=\tau H_s(\eta,\tau)+(\eta-\tau)H_s(\eta,\eta-\tau)$$

соответственно на отрезках $[0,h]$ и $[0,\eta]$ максимальные значения принимают в точках $t=h/2$ и $\tau=\eta/2$ для $0<p\le 3$, а при $p>3$ на указанных отрезках существуют точки, в которых соответствующий максимум не достигается, а потому из неравенства (9) получаем

$$\sup_{f\in H^{\omega,p}}\parallel f-\sigma_{m,n}(f)\parallel_C\le\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right), \qquad (10)$$

где $0 < p \le 3$.

Теперь при любых $k = \overline{0, m-1}$ и $i = \overline{0, n-1}$ введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x,y) = \begin{cases} \omega\left(\sqrt[p]{(x-x_k)^p + (y-y_i)^p}\right), (x,y) \in \left[x_k, x_k + \frac{1}{2m}\right] \times \left[y_i, y_i + \frac{1}{2n}\right]; \\ \omega\left(\sqrt[p]{(x-x_k)^p + (y_{i+1}-y)^p}\right), (x,y) \in \left[x_k, x_k + \frac{1}{2m}\right] \times \left[y_i, y_i + \frac{1}{2n}, y_{i+1}\right]; \\ \omega\left(\sqrt[p]{(x_{k+1}-x)^p + (y-y_i)^p}\right), (x,y) \in \left[x_k + \frac{1}{2m}, x_{k+1}\right] \times \left[y_i + \frac{1}{2n}\right]; \\ \omega\left(\sqrt[p]{(x_{k+1}-x)^p + (y_{i+1}-y)^p}\right), (x,y) \in \left[x_k + \frac{1}{2m}, x_{k+1}\right] \times \left[y_i + \frac{1}{2n}, y_{i+1}\right]. \end{cases}$$

Применяя лемму 2 Н.П.Корнейчука (см., например, монографию [4] с.177-178) убедимся, что функция $f_0 \in H^{\omega,p}(Q)(0 < p \le 3)$ и, так как для этой функции $\sigma_{m,n}(f_0; x, y) \equiv 0$, то мы имеем оценку снизу

$$\sup_{f \in H^{\omega,p}} \| f - \sigma_{m,n}(f) \|_C \ge \| f_0(x,y) - \sigma_{m,n}(f) \|_C =$$
$$= \max_{(x,y)\in Q_{k,i}} |f_0(x,y)| = \max_{(x,y)\in Q_{k,i}} \omega\left(\sqrt[p]{(x-x_k)^p + (y-y_i)^p}\right) =$$
$$= \omega\left(\sqrt[p]{(x_k + \frac{1}{2m} - x_k)^p + (y_i + \frac{1}{2n} - y_i)^p}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p} + \frac{1}{n^p}}\right). \quad (11)$$

Требуемое равенство (5) получаем из сопоставления неравенств (10) и (11), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Замечание. Теоремы 1-3 показывают, что несмотря на то, что гладкость сплайнов $\sigma_{m,n}(f; x, y)$ гораздо выше (ввиду того, что $\sigma_{m,n}(f; x, y) \in C^{(r,s)}(Q)$) по сравнению с гладкостью билинейных сплайнов $S_{1,1}(f; x, y)$ (поскольку $S_{1,1}(f; x, y) \in C^{(1,1)}(Q)$), тем не менее погрешность, доставляемая ими на классах функций $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H^{\omega,p}(Q)$ $0 < p \le 3$, не больше, чем погрешность, доставляемая билинейным интерполяционным сплайном $S_{1,1}(f; x, y)$. Это следует из сравнения результатов теорем 1-3 с соответствующими результатами В.Ф.Сторчая [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике // Наука, М.– 1976. – 248с.
2. Сторчай В.Ф. Приближение непрерывных функций двух переменных сплайн–функциями и сплайн-функциями в равнамерной метрике. В сб: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям // Днепропетровск: ДГУ. – 1975. – С. 82–89.
3. E.E.Berdysheva, S.N.Mehmonzoda, M.Sh.Shabozov. Approximation of functions of several variables by continuous linear splines an rectilinear grids // Jean Journal on Approximation: – 2021. – 1– p.1-23
4. Никольский С.М. Квадратурные формулы // М.:Наука, –1988,–288с.

REFERENCES

1. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. Splines in computational mathematics // Nauka, M. - 1976. - 248 p.
2. Storchay V.F. Approximation of continuous functions of two variables by spline functions and spline functions in an equal-dimensional metric. In Sat: Research on modern problems of summation and approximation of functions and their applications // Dnepropetrovsk: DGU. - 1975. - P. 82–89.
3. E.E.Berdysheva, S.N.Mehmonzoda, M.Sh.Shabozov. Approximation of functions of several variables by continuous linear splines an rectilinear grids // Jean Journal on Approximation: – 2021. – 1– p.1-23p.
4. Nikolsky S.M. Quadrature formulas // M.: Nauka, –1988, –288p.