УДК 517,837.2
ББК 22

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Мухсинов Едгор Мирзоевич *- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП,*
e-mail: - yodgor.mukhsinov@gmail.com

ҲАЛШАВАНДАГИИ ЯК БОЗИИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАЪҚИБКУНИИ НАВЪИ НЕЙТРАЛӢ

Мухсинов Едгор Мирзоевич *- номзади илмҳои физика ва математика, дотсенти кафедраи фанҳои риёзи-табиатшиносии муосири ДДҲБСТ,*
e-mail:yodgor.mukhsinov@gmail.com

RESOLUTION OF ONE DIFFERENTIAL GAME OF PURSUIT OF NEUTRAL TYPE

Mukhsinov Edgor Mirzoevich *- Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Disciplines and Modern Natural Science, TSUPBP,*
e-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com

Ключевые слова: *дифференциальная игра нейтрального типа, задача преследования, управления преследования, управления убегания, время преследования, банахово пространство.*

В банаховом пространстве рассматривается задача преследования в смысле определения Л.С.Понтрягина для одной дифференциальной игры, описываемая уравнением нейтрального типа с линейным замкнутым оператором, порождающим сильно непрерывную полугруппу. Доказаны одна лемма и две основные теоремы о разрешимости дифференциальной игры преследования.

Вожаҳои калидӣ: *бозии дифференсиалии намуди нейтралӣ, масъалаи таъқибкунӣ, идоракунии таъқибкунӣ, идоракунии гурезанда, вақти таъқибкунӣ, фазои Банах*

Дар фазои Банах масъалаи таъқибкунӣ ба маънои Л.С.Понтрягин барои як бозии дифференсиалӣ дида мешавад, ки бо муодилаи намуди нейтралии дорои оператори хаттии сарбастаи нимгурӯҳҳи бефосила пайдокунанда навишта мешавад. Як лемма ва ду теоремаи асосӣ оид ба ҳалшавандагии бозии дифференсиалии таъқибкунӣ исбот карда шудааст.

Key words*: differential game of neutral type, pursuit problem, pursuit controls, evasion controls, pursuit time, Banach space.*

In a Banach space, we consider the pursuit problem in the sense of Pontryagin's definition for a differential game, described by an equation of neutral type with a closed linear operator, generating a strongly continuous semigroup. One lemma and two main theorems on the solvability of a differential pursuit game are proved.

В банаховом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\,\dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + f(u(t), v(t), t) \tag{1}$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В игре (1) $t \geq 0,\ 0 < h_1 < h_2 < \dots < h_n = h,\ x(t) \in X,$ управления преследования $u(\cdot): [0, \infty) \to Y -$ из класса измеримых отображений, действующих из $[0, \infty)$ в банаховом пространстве Y, управления убегания $v(\cdot): [0, \infty] \to Z$ —из класса измеримых отображений, действующих из $[0, \infty]$ в банахово пространство Z, $B_i: X \to X$ —линейные ограниченные операторы, а $A: D \to X -$ линейный замкнутый оператор, имеющий плотную в X область определения, порождает сильно непрерывную полугруппу T(t) $([1], c. 316)$.

В силу $([2], c. 267)$ используя эту полугруппу можно построить фундаментальное решение

$\Phi(t)$, для которого справедливо равенство

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{\Phi}\,(t - h_i) + A\Phi(t) \tag{2}$$

и $\Phi(0) = \mathrm{I}$ −единичный оператор, Φ(t)=0 при $\mathrm{t} < 0$.

В дальнейшем, функция $\varphi(\cdot)\colon [-h, 0] \to X -$ из класса непрерывных функций, действующих из $[-h, 0]$ в банахово пространство X и локально интегрируемое отображения f:$Y \times Z \times [0, \infty] \to X$ такое, что для любых управления преследования $u(\cdot)$, управлений убегания $v(\cdot), t \geq 0$ задача Коши

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\, \dot{x}(t - h_i) + Ax(t) + f(u(t), v(t), t), \tag{3}$$
$$x(s) = \varphi(s), \qquad -h \leq s \leq 0$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение.

Справедлива следующая

Лемма 1. Если функция $\varphi(\cdot)$ абсолютно непрерывна, то задача (3) имеет следующее решение

$$x(t) = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i) B_i\right] \varphi(0) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi\,(t - s - h_i) B_i \dot{\varphi}(s) ds + \int_{0}^{t} \Phi(t - s) f(u(s), v(s), s) ds \tag{4}$$

Доказательство. Вначале, докажем, что функция

$$x_o(t) = \int_0^t \Phi(t - s)\, f(u(s), v(s), s) ds, \quad t > 0,$$

является частным решением задачи (3). Действительно, в силу (2) и

$$\left(\int_0^t \Phi(t - s - h) f(u(s), v(s), s) ds\right)' = \Phi(-h) f(u(t), v(t), t) +$$
$$+ \int_0^t \dot{\Phi}\,(t - s - h) f(u(s), v(s), s) ds = \int_0^t \Phi(t - s - h) f(\dot{u}(s), v(s), s) ds$$

имеем:

$$x_o'(t) = \left(\int_0^t \Phi(t - s) f(u(s), v(s), s) ds\right)' = f(u(t), v(t), t) +$$
$$+ \int_0^t \dot{\Phi}\,(t - s) f(u(s), v(s), s) ds = f(u(t), v(t), t) +$$
$$+ \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{n} B_i \dot{\Phi}(t - s) + A\Phi(t - s)\right] f(u(s), v(s), s) ds =$$
$$= f(u(t), v(t), t) dt + \sum_{i=1}^{n} B_i \int_0^t \dot{\Phi}\,(t - s - h_i) f(u(s), v(s), s) ds +$$
$$+ A \int_0^t \Phi(t - s) f(u(s), v(s), s) ds = f(u(t), v(t), t) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} B_i \left[\int_0^t \Phi\,(t - s - h_i) f(u(s), v(s), s) ds\right]' + Ax_o(t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} B_i x_o(t - h_i) + Ax_o(t) + \; f(u(t), v(t), t)$$

т.е. $x_o(t)$ является частным решением задачи (3).

Далее, в работе $([2], c. 268)$ доказанао, что однородная задача (3) имеет решение

$$\tilde{x}(t) = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i) B_i\right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - s - h_i)\, B_i\, \dot{\varphi}(s) ds \tag{5}$$

Следовательно, неоднородная задача (3) имеет решение $x(t) = \tilde{x}(t) + x_o(t)$, ибо, в силу (5) имеем:

$$\dot{x}(t)=\dot{\tilde{x}}(t)+\dot{x}_0(t)=\left[\Phi(t)-\sum_{i=1}^{n}\Phi(t-h_i)B_i\right]'\varphi(0)+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi(t-s-h_i)B_i\dot{\varphi}\,(s)ds\right]'+\left[\int_0^t\Phi(t-s)f(u(s),v(s),s)ds\right]'=$$

$$=\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}B_i\dot{\tilde{x}}\,(t-h_i)+A\tilde{x}(t)+\sum_{i=1}^{n}B_i\,x_0(t-h_i)+Ax_o(t)+$$

$$+f(u(t),v(t),t)=\sum_{i=1}^{n}B_i\left(\tilde{x}(t-h_i)+x_0(t-h_i)\right)+A\big(\tilde{x}(t)+x_o(t)\big)+$$

$$+f(u(t),v(t),t)=\sum_{i=1}^{n}B_i\,x\quad(t-h_i)+Ax(t)+f(u(t),v(t),t).$$

Лемма доказана.

В дифференциальной игре (1) рассмотрим разрешимость задачи преследования в смысле Л.С.Понтрягина.

Определение($[3], c.308$; $[4], c.129$; $[5], c.81$).В игре (1) из начального положения $\varphi(s), -h\le s\le 0$, $\varphi(0)\in X\backslash M$ возможно завершение преследования, если существует число $T=T(\varphi)\ge 0$ такое, что для любого измеримого управления убегания $\vartheta(\cdot)\colon[0,T]\to Z$ в каждый момент $t\in[0,T]$, зная уравнение (1) и значения $\vartheta(t)$ и $x(s), 0\le s\le t$, можно выбрать значение $u(t)$ таким образом, что управление преследования $u(\cdot)\colon[0,T]\to Y$ допустимо измеримо и $x(T_1)\in M$ при некотором $T_1\in[0,T]$, где $x(\cdot)$- решение задачи (3), соответствующее управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. При этом число $T=T(\varphi)$ называется гарантированным временем преследования, а точная нижняя грань гарантированных времен оптимальным временем преследования.

Задача преследования. Найти множество начальных положений, из которых в игре (1) возможно завершить преследования.

Справедливая следующая

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1. X,Y-сепарабельные банаховы пространства, а терминальное множество M выпукло;
2. отображение $(u,v,t)\to f(u,v,t)$ непрерывно по $(u,v)\in Y\times Z$ и измеримо по $t\in[0,\infty)$;
3. при любых $v\in Z, s\in[0,T]$ множество $\Phi(t-s)F(Y,v,s)$ замкнуто;
4. начальное положение $\varphi(s), -h\le s\le 0, \varphi(0)\in X\backslash M$ такое, что при некотором $T\ge 0$ имеет место включение

$$\left[\Phi(T)-\sum_{i=1}^{n}\Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0)+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi(T-s-h_i)\,B_i\,\dot{\varphi}(s)ds\in W_1(\gamma(\cdot),T)\qquad(6)$$

где

$$W_1(\gamma(\cdot),T)=\begin{cases} M, & \text{при}\quad T=0\\ \bigcup\limits_{\gamma(\cdot)\in\Gamma(T)}\int_0^T\bigcap\limits_{v\in Z}[\gamma(s)M-\Phi(T-s)f(Y,v,s)]ds, & \text{при}\quad T>0,\end{cases}$$

где

$$\Gamma(T)=\left\{\gamma(\cdot)\colon[0,\infty)\to[0,\infty)\colon\int_0^T\gamma(s)=1\right\}.$$

Тогда из начального положения φ можно завершить преследования с гарантированным временем преследования $T=T(\varphi)$.

Доказательство. В силу (6)для некоторой $\gamma(\cdot)\in\Gamma(T)$ существует интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ отображения

$$s\to\bigcap_{v\in Z}[\gamma(s)M-\Phi(T-s)f(Y,v,s)],\qquad s\in[0,T],$$

и что имеет место равенство

$$\left[\Phi(T)-\sum_{i=1}^{n}\Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0)+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi(T-s-h_i)\,B_i\,\dot{\varphi}(s)ds=$$

$$= \int_0^T \omega(s)ds \qquad (7)$$

Пусть выбрано произвольное допустимое управление убегания $v(\cdot)$. Тогда, в силу известной теоремы об измеримом селекторе $([6], c. 108)$ существует измеримое отображение $m(\cdot): [0, T] \to M$ и допустимое управление преследования $u(\cdot)$, что

$$\omega(s) = \gamma(s)m(s) - \Phi(T - s)f(u(s), v(s), s). \qquad (8)$$

Поэтому, учитывая (7), (8), выпуклость терминального множества M и равенство $\int_0^T \gamma(s)Mds = \left(\int_0^T \gamma(s)ds\right)M = M$ (например $([7], c. 271)$ для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (3), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеем:

$$x(T) = \left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T - h_i)\, B_i\dot{\varphi}\,(s)ds +$$

$$+ \int_0^T \Phi(T - s)\, f(u(s), v(s), s)ds = \int_0^T \omega(s)ds +$$

$$+ \int_0^T \Phi(T - s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^T \big(\gamma(s)m(s) - \Phi(T - s)f(u(s), v(s), s)\big)ds + \int_0^T \Phi(T - s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^T \gamma(s)m(s)ds - \int_0^T \Phi(T - s)\, f(u(s), v(s), s)ds +$$

$$+ \int_0^T \Phi(T - s)\, f(u(s), v(s), s)ds \in \int_0^t \gamma(s)Mds = \left(\int_0^T \gamma(s)ds\right)M = M,$$

т.е. $x(T) \in M$.

Поэтому, из начального положения φ можно завершить преследование с гарантированным временем преследования T. При этом, выбор управления преследования $u(\cdot)$ осуществляется согласно формуле (8).

Теорема доказана.

Замечание 1.

Когда отображение $W_1(\gamma(\cdot), t), t \in [0, T]$ замкнуто, то можно завершить преследование с гарантированным временем преследования

$$T_0 = min\{T\text{: для которых выполняется включение} \qquad (6)\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) X- сепарабельно и рефлексивно, Y- сепарабельно, а терминальное множество M выпукло;
2) отображение $(u, v, t) \to f(u, v, t)$ непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$ и измеримо по $t \in [0, \infty)$;
3) начальное положение $\varphi(s),\ -h \le s \le 0, \varphi(0) \in X\backslash M$ такое, что при некотором $T > 0$ имеет место включение

$$\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T - s - h_i)\, B_i\dot{\varphi}\,(s)ds \in$$

$$\in \int_0^T \Omega(\gamma(s), T, s)\, ds, \qquad (9)$$

где

$$\Omega(\gamma(s), T, s) = -\left[\bigcap_{v \in Z} \Phi(T - s)f(Y, v, s) \overset{*}{-} \gamma(s)M\right],$$

а функция $\gamma(\cdot): [0, T] \to [0, \infty)$ такая, что $\int_0^T \gamma(s)ds = 1$;

4) отображение $s \to \Omega(\gamma(s), T_1, s)$ измеримо, замкнутозначно, выпуклозначно и ограничено на $[0, T]$ при фиксированном $T_1 \in [0, T]$.

Тогда из начального положения φ можно завершить преследования с гарантированным временем преследования $T_0 = min\{T$: для которых выполняется (9)$\}$

Доказательство.

В силу условий 1) и 4) отображение

$$t \to \int_0^t \Omega(\gamma(s), t, s)ds, \quad t \in [0, T]$$

замкнуто.

Следовательно, включение (9) выполняется и для $T = T_0$.

Далее, в силу (9), для некоторой $\gamma(\cdot)$ существует интегрируемый селектор ω отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \Phi(T-s) f(Y, v, s) \overset{*}{\_} \gamma(s) M, \quad s \in [0, T], \qquad \text{что}$$

$$\left[\Phi(T_o) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_o - h_i) B_i\right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_o - s - h_i)\, B_i \dot{\varphi}\,(s) ds =$$
$$= \int_0^{T_o} \omega(s)\, ds, \tag{10}$$

Пусть выбрано произвольное допустимое управление убегания $v(\cdot)$. Тогда, в силу известной теоремы об измеримом селекторе $([6], c.\,108)$ существуют измеримое отображение $m(\cdot)\colon [0, T_o] \to M$ допустимое измеримое управление преследования $u(\cdot)$, что

$$\gamma(s) m(s) - \omega(s) = \Phi(T_o - s) f(u(s), v(s), s) \tag{11}$$

Поэтому, учитывая (10),(11), для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (3), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеем:

$$x(T_o) = \left[\Phi(T_o) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_o - h_i) B_i\right] \varphi(0) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi\,(T_o - s - h_i) B_i \dot{\varphi}(s) ds + \int_0^{T_o} \Phi(T_o - s)\, f(u(s), v(s), s) ds =$$
$$= \int_0^{T_o} \omega(s)\, ds + \int_0^{T_o} \Phi(T_o - s) f(u(s), v(s), s) ds =$$
$$= \int_0^{T_o} \big(\gamma(s) m(s) - \Phi(T_o - s) f(u(s), v(s), s)\big) ds +$$
$$+ \int_0^{T_o} \Phi(T_o - s) f(u(s), v(s), s) ds = \int_0^{T_o} \gamma(s) m(s) ds \in$$
$$\in \int_0^{T} \gamma(s) M ds = \left(\int_0^{T} \gamma(s) ds\right) M = M,$$

т.е. $x(T_O) \in M$.

Поэтому, из начального положения φ можно завершить преследование с гарантированным временем преследования T_O. При этом, выбор управления преследования $u(\cdot)$ осуществляется согласно формуле (11).

Теорема доказана.

Замечание 2. Доказанные теоремы обобщают соответствующие результаты работы $([7], c.\,272)$, когда дифференциальная игра описывается уравнением нейтрального типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.:ИИЛ.1962. 832 с.
2. Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations is a Banach Space //J. of Differential equations. 1977. V.25.P.258-274.
3. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980.Т.112 (154). №3. С.307-331.
4. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сибирский математический журнал. 2015. Т.56. №1.С. 129–148.
5. Мухсинов Е.М. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх // Управляемые системы. Выпуск 22, Новосибирск 1982. С.80-87.
6. *Castaing C*. M. Valadier Convex analysis and measurable multifunctions. // Lecture Notes Math. 1977. V. 580. P. 1 – 278.
7. Мухсинов Е.М. О задаче преследования в банаховом пространстве// Доклады АН Тадж. ССР. 1983. Т.26. №5. С.270-274.

8. Мухсинов Е.М., Муродова М.Н. Задача преследования для дифференциальной игры с запаздывающим аргументом в бесконечномерном пространстве // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2018. №3. С.79-86

REFERENCES

1. Hille E., Phillips R. Functional analysis and semigroups. M.: IIL. 1962. 832p.
2. Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations is a Banach Space //J. of Differential equations. 1977. V.25.P.258-274.
3. Pontryagin L.S. Linear differential pursuit games // Mathematical collection. 1980.V.112 (154) No. 3.P.307-331
4. Mamadaliev N. On one problem of pursuit with integral constraints on the controls of the players // Siberian Mathematical Journal. 2015. V.56. No1.P. 129–148.
5. Mukhsinov E.M. On the optimality of the pursuit time in differential games // Controlled systems. Issue 22, Novosibirsk 1982.P. 80-87.
6. *Castaing C*. M. Valadier Convex analysis and measurable multifunctions. // Lecture Notes Math. 1977. V. 580. P. 1 – 278.
7. Mukhsinov E.M. On the pursuit problem in a Banach space // Dokladi Academy of Science Tajik SSR. 1983. V.26. No. 5. P.270-274.
8. Mukhsinov E.M., Murodova M.N. The pursuit problem for a differential game with lagging argument in infinite-dimensional space // Bulletin of the Tajik National University. Series of natural sciences. 2018. No. 3. P. 79-86.